

Нелинейные модели межотраслевого баланса и их приложение к сценарному анализу экономических рисков в условиях реструктуризации экономики и ресурсных ограничений

Обросова Н.К., Шананин А.А.

Федеральный исследовательский центр Информатика и управление
РАН
МГУ им.М.В.Ломоносова
МФТИ

ПМИФИ 2024

- Геополитические шоки. Структурные изменения в экономике РФ.
 - переход от приоритетного развития экспортных капиталоемких отраслей к **развитию трудоемкого сектора**; технологический суверенитет
 - переориентация **экспортно-импортных потоков**; импортозамещение
- **Риски ресурсных ограничений**:
 - Сальдо **баланса внешней торговли**: удорожание импорта, курс рубля
 - Баланс спроса и предложения на **рынке труда**
 - Рост спроса на услуги инфраструктурных отраслей: **неразвитость инфраструктуры - инфляция издержек**.
- **Проблема**: Анализ макроэкономических последствий государственных программ экономического развития (в том числе инфляционных рисков).
- **Инструмент**: нелинейные математические модели межотраслевого баланса - экономическое равновесие в сети поставок и цен. Учет замещения производственных факторов. Учет ресурсных ограничений.
- **Возможности моделей**: среднесрочный риск-анализ трендов макроэкономического развития в заданных сценарных условиях с учетом
 - ресурсных ограничений, изменений геополитических условий
 - оперативный пересчет при изменении сценарных условий

База данных. Система национальных счетов

- Р.Стоун (Richard Stone, 1913-1991), Нобелевская премия (1984, Развитие Системы национальных счетов СНС)
- Симметричные таблицы затраты-выпуск, СТЗВ - регистрация финансовых потоков



		Промежуточное потребление	Конечное потребление					Валовый выпуск
Симметричная таблица затраты-выпуски отечественной продукции (СТЗВ)		продукты	Домашние хозяйства	Государство	Валовое накопление (наличное запасов материальных оборотных средств)	Экспорт		
		1 ... m						
отечественные продукты	1		$Z_1^{H,0}$	$Z_1^{G,0}$	$Z_1^{INV,0}$	$Z_1^{EXP,0}$		Y_1
	...	$Z_d = \left \left Z_i^j \right \right $ $i, j = 1, \dots, m$	$Z_2^{H,0}$	$Z_2^{G,0}$	$Z_2^{INV,0}$	$Z_2^{EXP,0}$		Y_2
	m	I квадрант	$Z_m^{H,0}$	$Z_m^{G,0}$	$Z_m^{INV,0}$	$Z_m^{EXP,0}$		Y_m
			II квадрант					
Расходы на первичные ресурсы	импорт	Z_{m+1}^j						
	оплата труда	Z_{m+2}^j						
	прибыль*	Z_{m+3}^j						
	Валовая добавленная стоимость	$Z_{m+2}^j + Z_{m+3}^j$						
Валовый выпуск		$Y_1 \ Y_2 \dots Y_m$						

$$Z_j^0 = Z_1^{H,0} + Z_1^{G,0} + Z_1^{INV,0} + Z_1^{EXP,0}$$

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m+3} Z_i^j = Z_j^0 + \sum_{i=1}^m Z_j^i,$$

$$j = 1, \dots, m$$

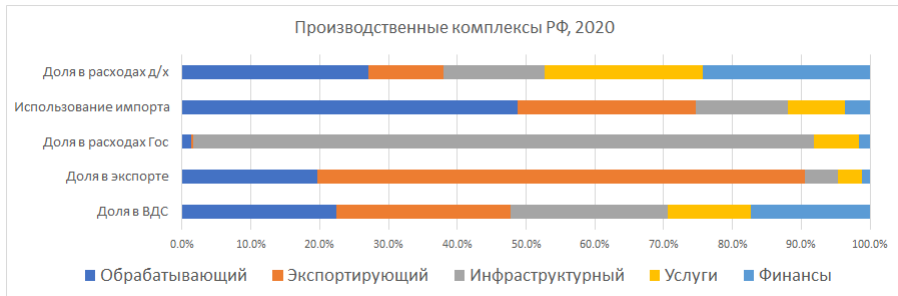
Особенности системы национальных счетов СНС в России. Формирование базы данных СТЗВ

- **Публикация СТЗВ** раз в пять лет с задержкой 3 года. Доступны СТЗВ продукт-продукт за 2011, 2016г. 98х98
- **Ежегодные публикации СНС Росстат с задержкой в 3 года:** Таблицы Ресурсов (ТР) и Таблицы Использования (ТИ) за 2016-2020г. Номенклатура ОКВЭД2 61 отрасль - ОКПД 61 продукт <https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts>
- **Решена задача восстановления СТЗВ в номенклатуре ПРОДУКТ x ПРОДУКТ (ОКПД) по ТРИ 2016-2020** на основе отраслевой гипотезы ¹.
- **Сформированы 5 крупных агрегированных комплексов отраслей** по признакам структуры конечного потребления и экспортно-импортным операциям: обрабатывающий (трудоемкий), экспортирующий, инфраструктура, торговля, финансы
- **построены агрегированные СТЗВ 5х5, 2016-2020г.**

¹ см., например, Саяпова А.Р. (2013), Продуктовые и отраслевые таблицы «Затраты-выпуск», Научные труды: Институт народнохозяйственного прогнозирования РАН, issue 11, p. 405-429, <https://EconPapers.repec.org/RePEc:scn:031151:15347618> (метод С в терминологии статьи) 

Агрегированные отраслевые комплексы. Доля продукта в конечном потреблении

- обрабатывающий (трудоемкий), экспортирующий, инфраструктура, торговля, финансы



Пример. Агрегированная СТЗВ 5х5, 2020 год

2020 год, трлн. руб.	Обрабаты вающий	Экспортир ующий	Инфрастру ктурный	Услуги	Финансы	Расходы домашних хозяйств на конечное потребление	Расходы государстве нного управления на	Расходы некоммерч еских организац ий,	Валовое накопление основного капитала; приобретен	Изменени е запасов материал ных оборотны	Экспорт
Обрабатывающий	12.63	2.41	1.79	2.50	1.05	11.40	0.28	0.01	16.12	0.80	5.14
Экспортирующий	8.89	19.47	2.84	2.40	0.60	5.47	0.32	0.00	1.83	0.85	19.27
Инфраструктурный	1.05	2.50	4.46	0.85	0.68	3.43	11.07	0.00	0.01	0.02	0.57
Услуги	1.59	3.62	1.27	3.51	0.66	11.58	9.42	0.58	0.24	0.00	0.92
Финансы	2.00	2.88	0.91	3.07	3.01	10.24	0.34	0.09	0.66	0.00	0.32
Импортные продукты	5.79	3.23	0.85	1.55	0.43	5.86	0.06	0.00	4.16	0.30	0.04
Налоги за вычетом субсидий на продукты	0.44	0.44	0.43	0.58	0.24	7.04	0.01	0.00	0.20	0.07	1.21
потребление/конечное использование	32.40	34.56	12.54	14.46	6.67	54.75	21.50	0.69	23.21	2.04	27.48
Оплата труда	8.99	7.09	7.06	12.31	3.34						
в том числе зарботная плата	7.12	5.56	6.10	9.80	2.72						
Потребление основного капитала	2.24	4.58	3.69	0.97	3.71						
Чистая прибыль (чистый смешанный доход)	10.87	15.72	1.35	5.68	9.60						
Валовая добавленная стоимость	21.74	27.39	12.10	18.93	16.84						
Выпуск отраслей в основных ценах	54.14	61.94	24.64	33.39	23.51						

*В инфраструктурной отрасли "Трубопроводный и сухопутный транспорт" выделен трубопроводный транспорт и отнесен к экспортному комплексу.

Классическая линейная модель межотраслевого баланса Леонтьева - I квадрант СТЗВ (Input-Output Analysis)

- В.Леонтьев (1906-1999), Нобелевская премия (1973, Theory of Input-Output Analysis)

- m чистых отраслей,

$$V = (V_1, \dots, V_m)$$

- вектор валовых выпусков в постоянных ценах

X_i^j - поток ресурсов из $i \rightarrow j$ в постоянных ценах

$W = (W_1, \dots, W_m)$ - конечное потребление

Гипотеза: $a_i^j = \frac{X_i^j}{V_j} = \text{const}$

$A = \left\| a_i^j \right\| \geq 0$ - $m \times m$ - матрица Леонтьева

Линейная модель

межотраслевого баланса В.Леонтьева $V = AV + W$

Если **A** продуктивна, то существуют

$(E - A)^{-1} \geq 0$ - экономические мультипликаторы

$$V = (E - A)^{-1}W$$



Усложнение сетей поставок.

Критика модели В.Леонтьева.

Нелинейные модели межотраслевого баланса

- Современные производственные сети - замещение товаров и услуг
- Нарушение гипотезы В.Леонтьева о постоянстве норм прямых затрат
- Потребность в новых методах, учитывающих замещение входов в производственных сетях
- Новые модели межотраслевого баланса - учет замещения факторов
- Наиболее близкие исследования в мире: изучение распространения флуктуаций в результате случайных шоков в узлах сети поставок; модели с производственными функциями Кобба-Дугласа - постоянная структура финансовых затрат
[Acemouglu et.al., 2010,2012,2015,2017, Baqaee, 2018, Carvalho et.al., 2019]

Ключевые особенности нового подхода. Нелинейные математические модели межотраслевого баланса

- **Вычисление экономического равновесия** в сети поставок и цен при следующих предположениях:
 - **открытая экономика:** спрос на первичные ресурсы (III квадрант СТЗВ) удовлетворяется при заданных ценах $s_1, \dots, s_n$
 - технологии описываются производственными функциями, допускающими замещение производственных факторов
 - **задан конечный спрос в текущих ценах** $\hat{X}^0 = (\hat{X}_1^0, \dots, \hat{X}_m^0)$ - сумма векторов спроса конечных потребителей II квадранта СТЗВ: домашних хозяйств, государства, валового накопления, экспорта.
- **Результат вычисления экономического равновесия в модели:**
 - вектор равновесных цен на продукты $p = (p_1, \dots, p_m)$
 - I и III квадрант СТЗВ
- **Возможности методики:**
 - контроль баланса спроса и предложения первичных ресурсов
 - контроль ограничений производственных мощностей секторов
 - корректировка сценарных условий для соблюдения балансов

Постановка задачи в форме вариационного неравенства

- Производственные возможности (технологии) определяют множество A допустимых конечных выпусков $\hat{X}^0$
- Суммарный конечный спрос (II квадрант) зависит от цен на продукты $\hat{X}^0(p)$
- Агрегированное поведение конечных потребителей может быть описано обратной функцией спроса $P(\hat{X}^0)$
- В каждой точке технологического множества A задано значение функции $P(\hat{X}^0)$
- Задача поиска конкурентного равновесия: вычислить равновесные цены на продукты сети и межотраслевые потоки, при которых предложение на рынке товаров равно спросу, и каждый производитель максимизирует прибыль
→ **вариационное неравенство**

Математический аппарат. Вариационные неравенства

Вариационное неравенство: пара (A, f) , где $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$

Определение $\hat{x} \in A$ является решением вариационного неравенства (A, f) , если существует $p \in f(\hat{x})$

$$(p, \hat{x}) \geq (p, x)$$

для любого $x \in A$.

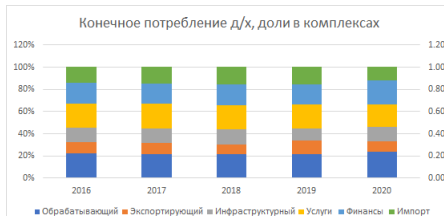
Пусть A -выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вогнутая функция. Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\max_{x \in A} F(x) \tag{1}$$

Предложение 1. Для того чтобы $\hat{x} \in A$ было решением задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы $\hat{x}$ было решением вариационного неравенства $(A, \partial F)$. Здесь ∂F - супердифференциал функции F .

Стабильность структуры расходов конечных потребителей РФ в разрезе агрегированных производственных комплексов модели. Статистика 2016-2020

Вывод: поведение агрегированного конечного потребителя можно описывать функцией полезности → задача оптимального распределения ресурсов



Структура производственной сети: m чистых отраслей, n первичных производственных факторов, один агрегированный конечный потребитель.

- $X^j = (X_1^j, \dots, X_m^j)$ - промежуточное потребление отрасли j ,
- $\mu^j = (\mu_1^j, \dots, \mu_n^j)$ - первичные факторы отрасли j ,
- $X^0 = (X_1^0, \dots, X_m^0)$ - конечное потребление

$F_j(X^j, \mu^j) \in \Phi_{m+n}$ - производственная функция (неоклассическая), где Φ_{m+n} - множество вогнутых, монотонно неубывающих, непрерывных и положительно однородных порядка 1 на R_+^{m+n} , $F_j(0, 0) = 0$ функций.

$F_0(X^0) \in \Phi_m$ - функция полезности конечного потребителя

$$F_0(X^0) \rightarrow \max \quad (2)$$

$$F_j(X^j, l^j) \geq \sum_{i=0}^m X_j^i, j = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m l^j \leq l \quad (4)$$

$$X^0 \geq 0, X^1 \geq 0, \dots, X^m \geq 0, l^1 \geq 0, \dots, l^m \geq 0. \quad (5)$$

Предположение 1. Условие продуктивности. Производственная сеть является продуктивной, т.е. существует

$\hat{X}^1 \geq 0, \dots, \hat{X}^m \geq 0, \hat{l}^1 \geq 0, \dots, \hat{l}^m \geq 0$ такие, что

$$F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) > \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i, j = 1, \dots, m.$$

Следствие 1. Если производственная сеть продуктивна и $l = (l_1, \dots, l_n) > 0$, то задача оптимизации (2)-(5) удовлетворяет условию Слейтера.

Предложение 1. Множество векторов $\{\hat{X}^0, \hat{X}^1, \dots, \hat{X}^m, \hat{p}^1, \dots, \hat{p}^m\}$, удовлетворяющих ограничениям задачи оптимального распределения ресурсов (3)-(5), является решением задачи (2)-(5) тогда и только тогда когда существуют множители Лагранжа $p_0 > 0$, $p = (p_1, \dots, p_m) \geq 0$ и $s = (s_1, \dots, s_n) \geq 0$ такие что

$$(\hat{X}^j, \hat{p}^j) \in \text{Arg max}\{p_j F_j(X^j, p^j) - pX^j - s^j \mid X^j \geq 0, p^j \geq 0\}, j = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$p_j \left(F_j(\hat{X}^j, \hat{p}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i \right) = 0, j = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$s_k \left(l_k - \sum_{j=1}^m \hat{p}_k^j \right) = 0, k = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$\hat{X}^0 \in \text{Arg max}\{p_0 F_0(X^0) - pX^0 \mid X^0 \geq 0\}. \quad (9)$$

Двойственное описание. Преобразование Янга.

Интерпретация множителей Лагранжа к ограничениям (3) и (4)

- $p = (p_1, \dots, p_m)$ - цены на продукцию отраслей,
- $s = (s_1, \dots, s_n)$ - цены на первичные факторы производства.

Функция себестоимости

$$q_j(p, s) = \inf \left\{ \frac{pX^j + s\mu^j}{F_j(X^j, \mu^j)} \mid X^j \geq 0, \mu^j \geq 0, F_j(X^j, \mu^j) > 0 \right\} \in \Phi_{m+n}.$$

Индекс потребительских цен

$$q_0(q) = \inf \left\{ \frac{qX^0}{F_0(X^0)} \mid X^0 \geq 0, F_0(X^0) > 0 \right\} \in \Phi_m.$$

Преобразование Янга является инволюцией

$$F_0(X^0) = \inf \left\{ \frac{qX^0}{q_0(q)} \mid q \geq 0, q_0(q) > 0 \right\},$$

$$F_j(X^j, \mu^j) = \inf \left\{ \frac{pX^j + s\mu^j}{q_j(p, s)} \mid p \geq 0, s \geq 0, q_j(p, s) > 0 \right\}.$$

Двойственная по Янгу задача

Теорема. Если множители Лагранжа $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq 0$, $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n) \geq 0$ к задаче (2)-(5) удовлетворяют (6)-(9), тогда $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) \geq 0$ являются решением следующей задачи

$$q_0(p) \rightarrow \max_p \quad (10)$$

$$q_j(\hat{s}, p) \geq p_j, j = 1, \dots, m \quad (11)$$

$$p = (p_1, \dots, p_m) \geq 0. \quad (12)$$

Задача выпуклого программирования (10)-(12) называется двойственной по Янгу задачей к задаче (2)-(5).

Модель равновесия в производственной сети с ограничением M_k мощностей комплекса k (напр., инфраструктурного). Смещение равновесных цен

Задача оптимального распределения ресурсов

Двойственная задача
определения равновес-
ных цен

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(X^0) \rightarrow \max \\ F_j(X^j, \mu^j) \geq \sum_{i=0}^m X_j^i, \\ \sum_{i=0}^m X_k^i \leq M_k \\ \sum_{j=1}^m \mu^j \leq l \\ X^j \geq 0, \mu^j \geq 0, j = 1..m \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0(p) \rightarrow \max \\ q_j(s, p) \geq p_j, \\ q_k(s, p) \geq p_k - \lambda_k, \\ p_j \geq 0, j = 1..m \end{array} \right.$$

λ_k - наценка в результате дефицита мощностей сектора k

Решение прямой задачи: равновесные потоки ресурсов (X^j, μ^j) при заданном конечном потреблении X^0 .

Решение двойственной задачи: равновесные индексы цен p_j при заданных индексах цен на первичные ресурсы s_j . Индексы цен p_j - решение уравнений $q_j(s, p) = p_j, j = 1, .., m, j \neq k, q_k(s, p) = p_k - \lambda, \lambda(F_k(X^j, \mu^j) - M_k) = 0$
 $\hat{Y}_k(\hat{Z}_0, p(s, \lambda)) = p_k M_k, \hat{Y}_k$ - валовый выпуск сектора k .

- Агрегированные СТЗВ 5x5 за 2016-2020г.;
- Для СТЗВ $Z_{5 \times 5}$ базового 2016г. → расчет коэффициентов прямых затрат (Леонтьева)

$$a_{ij} = \frac{Z_{ij}}{Y_j}, \quad b_{kj} = \frac{Z_{m+k,j}}{Y_j}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n$$

- Индексы цен на первичные ресурсы, статистика/прогноз²:
 - s_1 индекс импортных цен (промежуточный импорт)
 - s_2 - индекс средней номинальной заработной платы (оплата труда)
 - s_3 - индекс потребительских цен ВВП (прибыль)
- $\hat{Z}^0 = (\hat{Z}_1^0, \dots, \hat{Z}_m^0)$ - суммарный вектор конечного потребления: государство, ДХ, валовое накопление, экспорт, $m = 5$; статистика/прогноз.

²источник: ЕМИСС, Росстат, официальные прогнозы социально-экономического развития РФ

- Описание технологий в производственных комплексах - производственные функции с постоянной эластичностью замещения (класс CES)

$$F_j(X^j, l^j) = \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{X_i^j}{w_i^j} \right)^{-\rho_j} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{l_k^j}{w_{m+k}^j} \right)^{-\rho_j} \right)^{-\frac{1}{\rho_j}}$$

$$w_i^j = (a_{ij})^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}, \quad w_{m+k}^j = (b_{kj})^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}$$

- X_i^j - промежуточное потребление продукта i для производства продукта j .
- l_k^j - промежуточное потребление первичного ресурса k для производства j .
- $\frac{1}{1+\rho_j}$ - эластичность замещения производственных факторов

- Преобразование Янга производственной функции F_j :

$$q_j(p, s) = \inf \left\{ \frac{pX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)} \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j(X^j, l^j) > 0 \right\}$$

- функция себестоимости в зависимости от индексов цен $(p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_n)$

В случае CES:

$$q_j(p, s) = \left(\sum_{i=1}^m \left(w_i^j p_i \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} + \sum_{k=1}^n \left(w_{m+k}^j s_k \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \right)^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}$$

Сценарные условия: $s = (s_1, \dots, s_n)$, $\hat{Z}^0$

- **Равновесные индексы цен** $p_1, \dots, p_m$: решение системы уравнений

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} (p_i)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} + \sum_{k=1}^n b_{kj} (s_k)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \right)^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}} = p_j, \quad j = 1, \dots, m$$

- **Валовой выпуск** $\hat{Y} = (\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m)$:

$$\hat{Y} = (E - \Lambda)^{-1} \hat{Z}^0, \quad \Lambda = \|\lambda_{ij}\|, \quad \lambda_{ij} = a_{ij} \left(\frac{p_i(s)}{p_j(s)} \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}}, \quad i, j = 1..m,$$

E - единичная матрица $(m \times m)$,

- **Элементы I и III квадрантов СТЗВ:**

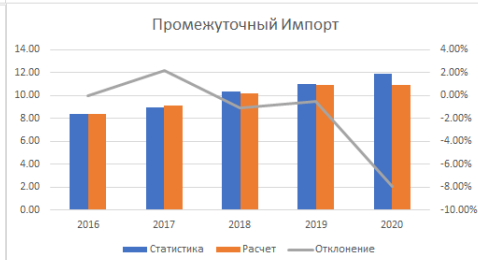
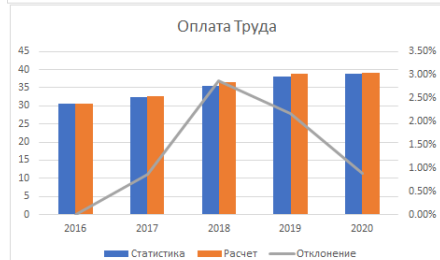
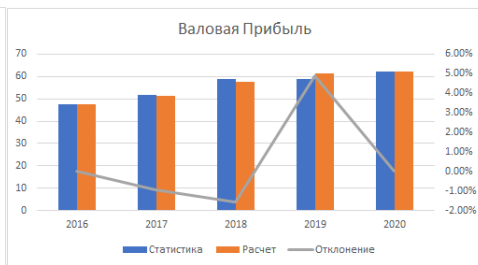
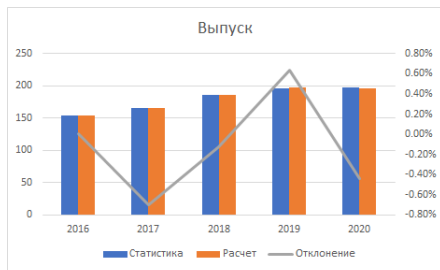
$$\hat{Z}_i^j = \lambda_{ij} \hat{Y}_j, \quad i, j = 1..m.$$

$$\hat{Z}_{m+k}^j = b_{kj} \hat{Y}_j \left(\frac{s_k}{p_j(s)} \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \quad k = 1..n, j = 1..m.$$

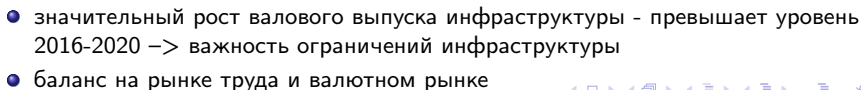
- Решение задачи воспроизводит СТЗВ базового 2016г. ($p = 1, s = 1$)

Качество калибровки модели. Расчет и статистика 2017-2020

Комплексы	Обрабатывающий	Экспортирующий	Инфраструктурный	Услуги	Финансы
ρ	-0.24	-0.016	-0.05	0.11	21



- **Цель:** анализ влияния инфраструктурных инвестиций на показатели инфляции с помощью модели
- **Методика сценарного расчета инфляции:** анализ динамики индексов равновесных цен в модели.
- **Базовые сценарные условия:**
 - прогноз социально-экономического развития РФ 2024-2027, апрель 2024, Минэкономразвития (<https://www.economy.gov.ru>)
 - сохранение структуры сценарного вектора конечного спроса $\hat{Z}^0$: конечного потребления домашних хозяйств и государства, валового накопления, экспорта.
- **Инфраструктурные проекты в объеме 5 трлн. руб.** индуцируют рост конечного потребления в обрабатывающем комплексе (строительство) на величину 5 трлн. руб.
- **Фондоотдача от инвестиций:** качественная оценка приростной фондоемкости проектов на основе NPV и IRR. Пример сценария:
 - Инфраструктурные проекты приводят к росту мощностей в инфраструктурном комплексе с приростной фондоемкостью 0.2, сценарий: 5 трлн.руб. инвестиций в основной капитал увеличивают мощность инфраструктурного комплекса на 1 трлн.руб. в год

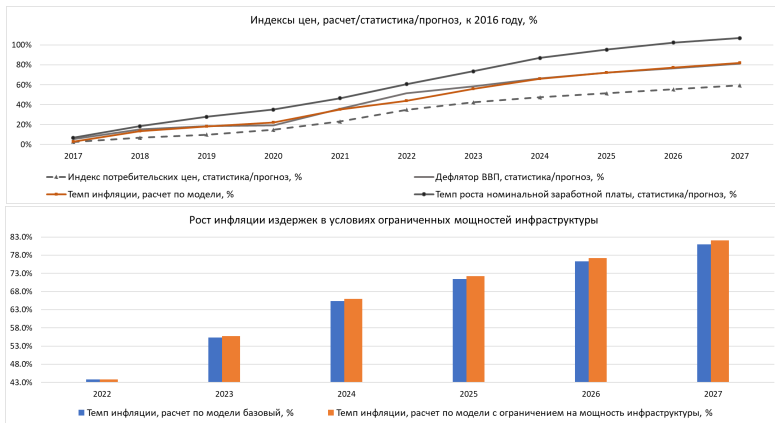


Сбалансированность спроса и предложения на рынке труда.

- Перераспределение прибыли при прогнозном росте занятости и высоких темпах роста оплаты труда



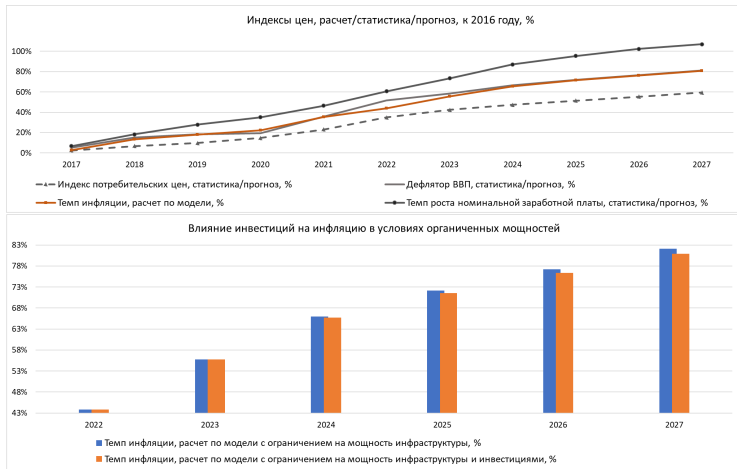
Сценарий 2: Рост инфляции при ограниченных мощностях



- Ресурсные ограничения выполнены (труд, валютный рынок, ограниченная мощность инфраструктуры)
- **ОГРАНИЧЕННАЯ МОЩНОСТЬ ЛИМИТИРУЕТ ВЫПУСК ИНФРАСТРУКТУРЫ → рост инфляции издержек**

Сценарий 3: доп. инвестиции 5 трлн.руб. с 2024

Модель с учетом ограничения мощностей инфраструктурного комплекса



- Выполнение всех ресурсных ограничений
- Дополнительные инвестиции снижают инфляцию в условиях ограниченности мощностей

Результаты

- Методика на основе модели позволяет учитывать актуальные ресурсные ограничения для экономики РФ.
- Идентификация и калибровка модели по данным СНС России 2016-2020: адекватность модельных оценок основных макроэкономических показателей.
- Применение модели: оперативные сценарные среднесрочные макроэкономические прогнозы с учетом рисков, в том числе прогноз инфляции.
- Применение для анализа инфляционных рисков в условиях инфраструктурных ограничений:
 - инфраструктурные ограничения являются существенным фактором инфляционных рисков в ближайшие годы в России (инфляция издержек)
 - в условиях ограниченности мощностей инфраструктурного комплекса реализация инвестиционных проектов сдерживает инфляцию издержек на горизонте прогнозирования до 2025г.
- Постановка задачи в форме вариационного неравенства - позволяет изучать формирование эффективной ниши производственного кластера в сети

Shananin, A.: Young Duality and Aggregation of Balances. Doklady Mathematics, **102**(1), 330–333 (2020)

Shananin, A.: Problem of Aggregating of an Input-Output Model and Duality. Computational Mathematics and Mathematical Physics, **61**(1), 153–166 (2021)

Boranbayev, S., Obrosova, N., Shananin, A.: Production Network Centrality in Connection to Economic Development by the Case of Kazakhstan Statistics. Lecture Notes in Computer Science, **13078**, 321–335 (2021).

Obrosova, N., Shananin, A., Spiridonov, A.: On the comparison of two approaches to intersectoral balance analysis. Journal of Physics: Conference Series, **2131**(2) (2021)

Rassokha, A., Shananin, A.: Inverse Problems of the Analysis of Input-Output Balances. Mathematical Models and Computer Simulations, **13**(6), 943–954 (2021)

Shananin, A., Rassokha, A.: Inverse problems in analysis of input-output model in the class of CES functions, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **29**(2), 305–316 (2021).

Publication of results

Kerimkhulle, S., Obrosova, N., Shananin, A., Azieva, G.: The Nonlinear Model of Intersectoral Linkages of Kazakhstan for Macroeconomic Decision-Making Processes in Sustainable Supply Chain Management. Sustainability, Volume 14, **21**(1) (2022)

Boranbayev, A., Obrosova, N., Shananin, A.: Nonlinear input-output balance and Young duality: analysis of Covid-19 macroeconomic impact on Kazakhstan. Siberian Electronic Mathematical Reports, **19**(2), 835–851 (2022)

Obrosova, N., Shananin, A., Spiridonov, A.: Nonlinear Input-Output Model with Nested CES Technologies for the Analysis of Macroeconomic Effects of a Foreign Trade Shock. Lobachevskii Journal of Mathematics, **44**(1), 401–417 (2023)

Obrosova, N.K., Shananin, A.A. Analysis of Mechanisms of Production Investment Stimulation in an Imperfect Capital Market Based on a Mathematical Model. Comput. Math. and Math. Phys. 63, 369–385 (2023).

Obrosova, N., Shananin, A. (2023). General Equilibrium Models in Production Networks with Substitution of Inputs. In: Khachay, M., Kochetov, Y., Ereemeev, A., Khamisov, O., Mazalov, V., Pardalos, P. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2023. Lecture Notes in Computer Science, vol 13930. Springer, Cham.

N.K. Obrosova, A.A. Shananin. Young duality of variational inequalities. An application for the analysis of interactions in production networks. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 88–105.

Boranbayev, A.; Obrosova, N.; Shananin, A. Technology of Input–Output Analysis with CES Production: Application for Studying the Kazakhstan Supply Chain during the COVID-19 Pandemic. Sustainability 2023, 15, 14057.

Boranbayev, A. Obrosova, N., Shananin, A. Mathematical model of economic dynamics in an epidemic, Siberian Electronic Mathematical Reports, 2023, 20(2), 797-813.

Kerimkhulle, S.; Obrosova, N.; Shananin, A.; Tokhmetov, A. Young Duality for Variational Inequalities and Nonparametric Method of Demand Analysis in Input–Output Models with Inputs Substitution: Application for Kazakhstan Economy. Mathematics 2023, 11, 4216.

Thank You for attention!

Модификация. Производственные кластеры

- В построенной модели агрегированный потребитель - функция полезности
- В более общем случае потребителей несколько и их интересы могут быть различны
- Постановка задачи в форме вариационного неравенства - позволяет изучать формирование эффективной ниши производственного кластера в сети
- Проблема: технологическая неоднородность в сети кластеров - формирование "производственных ниш"
- Россия - новые ниши международной торговли - постановка задачи в случае изменяющихся потоков внешних и внутренних ресурсов и разных потребителей

Опишем функционирование **открытого** (выпуск и первичные ресурсы) **производственного кластера** = множество $J = \{1, \dots, m\}$ чистых отраслей .

Отрасль $j \in J$ кластера использует

промежуточные ресурсы, производимые внутри кластера = вектор X^j ,
внутренние первичные ресурсы = вектор $I_{INT}^j \in R_+^n$ по ценам $s_{INT} \in R_+^n$,
импортные первичные ресурсы = вектор $I_{EXT}^j \in R_+^k$ по ценам $s_{EXT} \in R_+^k$

Ограничение на первичные ресурсы кластера:

$I_{INT} \in R_+^n$ ограничение на внутренние первичные ресурсы

$I_{EXT} \in R_+^k$ ограничение на промежуточный импорт

Выпуск продуктов в кластере $F_j \left(X^j, I_{EXT}^j, I_{INT}^j \right)$, $j \in J$ распределяется на
промежуточное потребление и конечное потребление = (при фиксированном
составе отраслей кластера) $X^0 = (X_1^0, \dots, X_m^0)$

Существует конечный импорт по ценам s_{EXT}

Будем считать, что любой платежеспособный конечный спрос $\hat{X}^0$ кластера
удовлетворяется по сложившимся в сети ценам $\hat{p}$

$$\hat{X}^0(\hat{p}, s_{EXT}) = \hat{X}^{int}(\hat{p}, s_{EXT}) + \hat{X}^{exp}(\hat{p}, s_{EXT}),$$

$$\hat{X}^{int}(\hat{p}, s_{EXT}) > 0, \quad \hat{X}^{exp}(\hat{p}, s_{EXT}) \geq 0.$$

где $\hat{X}^{int}$ - вектор внутреннего конечного спроса, $\hat{X}^{exp}$ - вектор экспорта
продукции кластера

Вариационное неравенство

- Знаем суммарную функцию спроса $X^0(\hat{p})$ на продукцию кластера
→ строим обратную функцию спроса $P(X^0)$ = отображение в вариационном неравенстве.
- Определим множество $\Gamma(l_{EXT}, l_{INT})$ - множество допустимых конечных выпусков X^0 кластера :

$$F_j(X^j, p_{EXT}^j, p_{INT}^j) \geq \sum_{i=0}^m X_j^i, \quad j = 1, \dots, m \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^m p_{EXT}^j \leq l_{EXT}, \quad \sum_{j=1}^m p_{INT}^j \leq l_{INT} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} X^0 &\geq 0, X^1 \geq 0, \dots, X^m \geq 0, \\ l_{EXT}^1 &\geq 0, \dots, l_{EXT}^m \geq 0, l_{INT}^1 \geq 0, \dots, l_{INT}^m \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Задача распределения ресурсов. Опорная функция множества конечных выпусков (зависит от цен $\hat{p}$ и ограничений первичных ресурсов).

Переход к двойственному описанию

$$\langle \hat{p}, X^0 \rangle \rightarrow \max \quad (16)$$

$$F_j \left(X^j, l_{EXT}^j, l_{INT}^j \right) \geq \sum_{i=0}^m X_j^i, \quad j = 1, \dots, m \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^m l_{EXT}^j \leq l_{EXT}, \quad \sum_{j=1}^m l_{INT}^j \leq l_{INT} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} X^0 &\geq 0, X^1 \geq 0, \dots, X^m \geq 0, \\ l_{EXT}^1 &\geq 0, \dots, l_{EXT}^m \geq 0, l_{INT}^1 \geq 0, \dots, l_{INT}^m \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Оптимальное значение функционала в задаче (16)-(19)

$H(\hat{p}, l_{EXT}, l_{INT})$ при ценах $\hat{p}$ равно значению опорной функции множества $\Gamma(l_{EXT}, l_{INT})$.

$H(\hat{p}, l_{EXT}, l_{INT})$ выпуклая по $\hat{p}$ (как опорная функция) и вогнута по l_{EXT}, l_{INT} (как агрегированная производственная функция). 

Задача распределения ресурсов. Как устроено решение. Переход от ограничений по ресурсам к ценам

Предложение 2. Множество векторов

$\tilde{X}^0 \geq 0, \tilde{X}^1 \geq 0, \dots, \tilde{X}^m \geq 0, \tilde{l}_{EXT}^1 \geq 0, \dots, \tilde{l}_{EXT}^m \geq 0, \tilde{l}_{INT}^1 \geq 0, \dots, \tilde{l}_{INT}^m \geq 0$,
удовлетворяющих (17)-(19) есть решение задачи (16)-(19) если и только если
существуют вектора $p \geq \hat{p}, s_{EXT} \geq 0, s_{INT} \geq 0$, такие что

$$\left(\tilde{X}^j, \tilde{l}_{EXT}^j, \tilde{l}_{INT}^j \right) \in \operatorname{Arg} \max \left\{ p_j F_j \left(X^j, l_{EXT}^j, l_{INT}^j \right) - \right. \\ \left. p X^j - s_{EXT} l_{EXT}^j - s_{INT} l_{INT}^j \mid X^j \geq 0, l_{EXT}^j \geq 0, l_{INT}^j \geq 0 \right\}, \quad j \in J$$

$$p_j \left(F_j \left(\tilde{X}^j, \tilde{l}_{EXT}^j, \tilde{l}_{INT}^j \right) - \tilde{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \tilde{X}_j^i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$\left\langle s_{EXT}, l_{EXT} - \sum_{j=1}^m \tilde{l}_{EXT}^j \right\rangle = 0, \quad \left\langle s_{INT}, l_{INT} - \sum_{j=1}^m \tilde{l}_{INT}^j \right\rangle = 0, \quad \langle p - \hat{p}, \tilde{X}^0 \rangle = 0.$$

При этом $(s_{EXT}, s_{INT}) \in \partial_{l_{EXT}, l_{INT}} H(\hat{p}, l_{EXT}, l_{INT})$, $q_j(p, s_{EXT}, s_{INT}) \geq p_j \quad j = 1, \dots, m$.

Если $F_j \left(\tilde{X}^j, \tilde{l}_{EXT}^j, \tilde{l}_{INT}^j \right) > 0$, то $q_j(p, s_{EXT}, s_{INT}) = p_j$.

Здесь $\partial_{l_{EXT}, l_{INT}} H(\hat{p}, l_{EXT}, l_{INT})$ - супердифференциал $H(\hat{p}, l_{EXT}, l_{INT})$ по l_{EXT}, l_{INT} при фиксированном $\hat{p}$.

Закрытая экономическая система: в задаче распределения ресурсов (16)-(19) ограничения по ресурсам I_{EXT} и I_{INT} зафиксированы.

Открытая экономическая система: фиксированы цены s_{EXT} и s_{INT} и по ним может быть удовлетворен платежеспособный спрос

$$(s_{EXT}, s_{INT}) \in \partial_{I_{EXT}, I_{INT}} H(\hat{p}, I_{EXT}, I_{INT})$$

Замечание. $H(\hat{p}, I_{EXT}, I_{INT})$ ненулевая, положительно-однородная первой степени, вогнутая, непрерывная, неотрицательная на неотрицательном октанте функция по I_{EXT}, I_{INT} .

Двойственное описание открытого кластера. Преобразование Янга функции $H(\hat{p}, I_{EXT}, I_{INT})$ по переменным I_{EXT}, I_{INT} :

$$h(\hat{p}, s_{EXT}, s_{INT}) = \inf \left\{ \frac{\langle s_{EXT}, I_{EXT} \rangle + \langle s_{INT}, I_{INT} \rangle}{H(\hat{p}, I_{EXT}, I_{INT})} \mid I_{EXT} \geq 0, I_{INT} \geq 0, H(\hat{p}, I_{EXT}, I_{INT}) > 0 \right\}$$

Замечание. $h(\hat{p}, s_{EXT}, s_{INT})$ ненулевая, положительно-однородная первой степени, вогнутая по s_{EXT}, s_{INT} , непрерывная, неотрицательная на неотрицательном ортанте функция.

Преобразование Янга является инволюцией

$$H(\hat{p}, I_{EXT}, I_{INT}) = \inf \left\{ \frac{\langle s_{EXT}, I_{EXT} \rangle + \langle s_{INT}, I_{INT} \rangle}{h(\hat{p}, s_{EXT}, s_{INT})} \mid s_{EXT} \geq 0, s_{INT} \geq 0, h(\hat{p}, s_{EXT}, s_{INT}) > 0 \right\}$$

Предложение 3. Функцию h можно вычислить:

$$h(\hat{p}, s_{EXT}, s_{INT}) = \max_p \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} \frac{p_i}{\hat{p}_i} \mid q_j(p, s_{EXT}, s_{INT}) \geq p_j \geq 0, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Равновесие кластера - характеризует набор товаров, который в нем производится, остальные - "первичные ресурсы".

Определение. Множество $\{J, p\}$ есть "производственная ниша" кластера J с равновесными ценами p , если $J \subset \{1, \dots, m\}$, $p \in \text{int } \mathbb{R}_+^J$ и существует набор $\{\tilde{X}^j, \tilde{p}_{EXT}^j, \tilde{p}_{INT}^j \mid j \in J\}$ такой что

$$\left(\tilde{X}^j, \tilde{p}_{EXT}^j, \tilde{p}_{INT}^j \right) \in \text{Arg max} \left\{ p_j F_j \left(X^j, p_{EXT}^j, p_{INT}^j \right) - p X^j - s_{EXT} p_{EXT}^j - s_{INT} p_{INT}^j \mid X^j \geq 0, p_{EXT}^j \geq 0, p_{INT}^j \geq 0 \right\}, \quad j \in J$$

$$\hat{X}_j^0(p, s_{EXT}) = F_j \left(\tilde{X}^j, \tilde{p}_{EXT}^j, \tilde{p}_{INT}^j \right) - \sum_{i=1}^m \tilde{X}_j^i > 0, \quad j \in J.$$

Теорема. Множество $\{J, p\}$ есть "производственная ниша" кластера с равновесными ценами p если и только если вектор p удовлетворяет

$$q_j(p, s_{EXT}, s_{INT}) = p_j > 0, \text{ if } j \in J; \quad q_j(p, s_{EXT}, s_{INT}) \geq p_j, \text{ if } j \notin J$$

“Производственная ниша” кластера. Равновесные цены

Замечание. Из теоремы следует, что если $\{J, p\}$ есть “производственная ниша” кластера J с равновесными ценами p , то

$$\left\langle p, \hat{X}^0(p, s_{EXT}) \right\rangle = \sum_{j \in J} \left(p_j F_j \left(X^j, l_{EXT}^j, l_{INT}^j \right) - \left\langle p, X^j \right\rangle \right) = \sum_{j \in J} \left(\left\langle s_{EXT}, l_{EXT}^j \right\rangle + \left\langle s_{INT}, l_{INT}^j \right\rangle \right).$$

т.е. общая стоимость первичных ресурсов равна стоимости конечного потребления кластера.

Конечное потребление $\hat{X}^0(p, s_{EXT})$ равно

$$\hat{X}^0(p, s_{EXT}) = \hat{X}^{exp}(p, s_{EXT}) + \hat{X}^{int}(p, s_{EXT})$$

Торговый баланс кластера

$$\left\langle p, \hat{X}^{exp}(p, s_{EXT}) \right\rangle - \sum_{j \in J} \left\langle s_{EXT}, l_{EXT}^j \right\rangle,$$

Оценка сбережений и вывоза капитала

$$\sum_{j \in J} \left\langle s_{INT}, l_{INT}^j \right\rangle - \left\langle p, \hat{X}^{int}(p, s_{EXT}) \right\rangle$$

Суммарный внешний спрос = сумме внутренних составляющих. Детально - проблема взаимодействия кластеров. В международной торговле торговый баланс регулируется за счет курса национальной валюты

Двойственность по Янгу в сети с M открытыми производственными кластерами.

Схема в условиях единой валюты

Пусть $F_j^\alpha (X^{j\alpha}, \mu^\alpha) \in \Phi$ - производственная функция отрасли j кластера α , где $X^{j\alpha}$ - промежуточные входы (inputs) - продукция сети кластеров, μ^α - промежуточные затраты первичных ресурсов, внутренних для кластера α . Предположим, что система продуктивна.

Функция себестоимости отрасли j кластера α зависит от вектора цен на продукты p и цен первичных ресурсов s^α кластера α :

$$q_{j\alpha}(p, s^\alpha) = \inf_{X^{j\alpha}, \mu^\alpha} \left\{ \frac{\langle p, X^{j\alpha} \rangle + \langle s^\alpha, \mu^\alpha \rangle}{F_{j\alpha}(X^{j\alpha}, \mu^\alpha)} \mid X^{j\alpha} \geq 0, \mu^\alpha \geq 0, F_{j\alpha}(X^{j\alpha}, \mu^\alpha) > 0 \right\}$$

Обозначим L^α -вектор предложения первичных ресурсов кластера α .

Определим множество достижимости $\Gamma(L^1, \dots, L^M)$ векторов конечного спроса X^0 :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^M F_{j\alpha}(X^{j\alpha}, \mu^\alpha) &\geq \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i=1}^n X_j^{i\alpha} + X_j^0, \quad j = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \mu_j^\alpha &\leq L^\alpha \quad \alpha = 1, \dots, M, \\ X_j^0 &\geq 0; X_j^{i\alpha} \geq 0; \mu_j^\alpha \geq 0 \quad j, i = 1, \dots, m, \quad \alpha = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Преобразование Янга

- Обозначим $X^0(p) = (X_1^0(p), \dots, X_m^0(p))$ - функции конечного спроса на продукты сети.
- Аналогично описанию отдельного кластера построим вариационное неравенство $(P(X^0), \Gamma(L^1, \dots, L^M))$, где $P(X^0)$ - обратная функция спроса
- Обозначим через $H(\hat{p}, L^1, \dots, L^M)$ опорную функцию множества $\Gamma(L^1, \dots, L^M)$.

Лемма. Преобразование Янга функции H по переменным $L^1, \dots, L^M$

$$\begin{aligned} h(\hat{p}, s^1, \dots, s^M) &= \\ &= \max_p \min_j \left\{ \frac{p_j}{\hat{p}_j} \mid \min_{1 \leq \alpha \leq M} q_{i\alpha}(p, s^\alpha) \geq p_i > 0, i = 1, \dots, m \right\} \end{aligned}$$

Определение. Вектор $p > 0$ является вектором равновесных цен в сети открытых производственных кластеров с вектором цен на первичные ресурсы $\{s^\alpha | \alpha = 1, \dots, M\}$ если существует набор

$$\left\{ \left(\tilde{X}^{j\alpha}, \tilde{p}^{j\alpha} \right) | j = 1, \dots, m; \alpha = 1, \dots, M \right\}$$

такой что

$$\left(\tilde{X}^{j\alpha}, \tilde{p}^{j\alpha} \right) \in \underset{X^{j\alpha} \geq 0, p^{j\alpha} \geq 0}{\text{Arg max}} \left\{ p_j F_{j\alpha} \left(X^{j\alpha}, p^{j\alpha} \right) - p X^{j\alpha} - s^\alpha p^{j\alpha} \right\}, j = 1, \dots, m; \alpha = 1, \dots, M$$

$$\sum_{\alpha=1}^M F_{j\alpha} \left(\tilde{X}^{j\alpha}, \tilde{p}^{j\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{i=1}^n \tilde{X}_j^{i\alpha} = X_j^0(p) \quad j = 1, \dots, m.$$

Следствие. Вектор $p > 0$ является вектором равновесных цен в сети открытых производственных кластеров с вектором цен на первичные ресурсы $\{s^\alpha | \alpha = 1, \dots, M\}$ если и только если он является решением системы

$$\min_{1 \leq \alpha \leq M} q_{i\alpha}(p, s^\alpha) = p_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно, выпуск кластера β включает только продукты, цена которых оказалась не выше цены конечного спроса в экономике. Поэтому множество

$$J_\beta = \left\{ i \left| q_{i\beta}(p, s^\beta) = p_i = \min_{1 \leq \alpha \leq M} q_{i\alpha}(p, s^\alpha) \right. \right\}$$

определяет "производственную нишу" кластера β

- Проблема архитектуры новых торговых отношений и экономических альянсов в условиях единой валюты:
 - Еврозона - технологическая неоднородность производственных кластеров в условиях единой валюты → трудности с формированием эффективных производственных ниш
 - Южный европейский блок (Italy, Spain, Greece, Portugal) оказался противопоставлен Северному европейскому блоку (Germany, Finland, Belgium).
- Вход модели : WIOD IO statistics for economies 2000-2014, 56x56
- Для каждой страны еврозоны:
 - мы идентифицировали модель с технологиями и функцией полезности Кобба-Дугласа
 - вычислили равновесные индексы цен p_t , $t = 2000, \dots, 2014$ в секторах экономики
 - вычислили индекс потребительских цен Конюса-Дивизиа $q_0(p_t)$, $t = 2000, \dots, 2014$
- Сценарные условия для расчетов - индексы цен первичных ресурсов:
 - среднегодовой номинальной заработной платы (<https://stats.oecd.org.>)
 - единица (i.e. =1) для импорта

Приложения. Кластеризация производственной сети еврозоны. Оценки на основе модели с технологиями Кобба-Дугласа

С помощью модели рассчитан скорректированный показатель реальной среднегодовой заработной платы $Q(t)$, учитывающий структуру конечного потребления отечественной и импортной продукции Q_t ($t=2000-2014$),

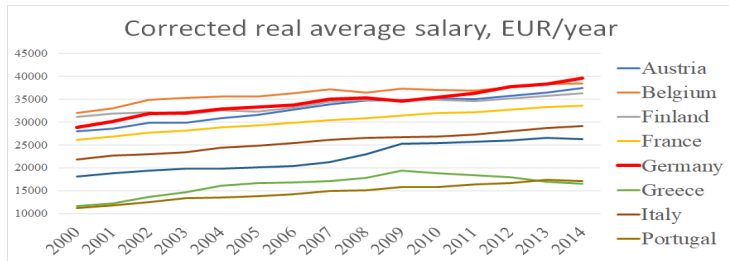
$$Q_t = \alpha(t) * \frac{S_t}{q_0(p_t)},$$

где S_t - номинальная средняя зарплата за год (euro) , $q_0(p_t)$ - Индекс потребительских цен Конюса-Дивизиа,

$$\alpha(t) = \frac{Cons_H(t) + Cons_G(t) + EXP(t) - IMP(t)}{Cons_H(t) + Cons_G(t)},$$

- поправочный коэффициент, учитывающий структуру потребления внутренних и импортных товаров конечными потребителями, где $Cons_H(t)$, $Cons_G(t)$ - суммарное конечное потребление домашних хозяйств и государства, а $EXP(t) - IMP(t)$ - сальдо экспорта и импорта в году t (<https://stats.oecd.org>). Заметим, что в случае положительного сальдо торгового баланса страны коэффициент $\alpha(t) > 1$, что увеличивает оценку показателя реальной заработной платы, а в случае отрицательного $\alpha(t) < 1$, что приводит к уменьшению этого показателя.

скорректированный показатель реальной среднегодовой заработной платы $Q(t)$, учитывающий структуру конечного потребления отечественной и импортной продукции

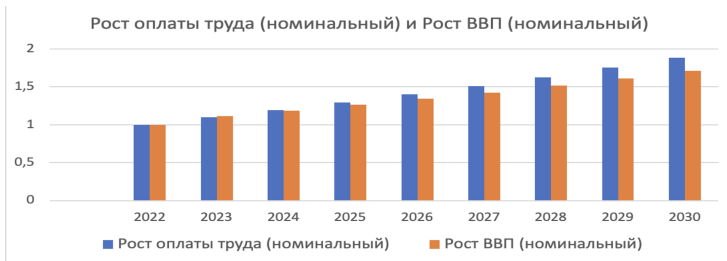


Результат: за первые 15 лет еврозоны наладились стабильные экономические связи между кластерами, но сохранилась неоднородность производственной системы : южный и северный блок стран.

Проблема: эффективность "ниши" определяется ценой/качеством первичных ресурсов

Рассогласованность прогноза Минэка 2023: зарплата, темп роста ВВП и занятость.

Прогноз 2023-2026 МинЭк 09.2023



Identification. The given official IO table Z for the base year Leontief technologies:

$$F_j(X^j, p^j) = \min \left(\frac{X_1^j}{a_{1j}}, \dots, \frac{X_m^j}{a_{mj}}, \frac{p_1^j}{b_{1j}}, \dots, \frac{p_n^j}{b_{nj}} \right), j = 1..m.$$

Scenario evaluations: fix Leontief technologies $F_j(X^j, p^j)$.

The Young transform of Leontief production function is the Leontief cost function

$$q_j(p, s) = \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} + \sum_{k=1}^n s_k b_{kj}, j = 1..m.$$

Given scenario condition s for the target year we have the Young dual problem explicit solution

$$p = (E - A^T)^{-1} B^T s$$

Denote $D(\hat{p}) = (d_i^j)_{i,j=1,\dots,m}$ the diagonal matrix, where $d_i^j = p_i > 0$.

Given scenario total consumption vector $\hat{Z}^0$ the final consumption vector in material flows (for a target year) equals to $W = (D(p))^{-1} \hat{Z}^0$ and the total output vector:

$$\hat{Y} = (E - A)^{-1} W = (E - A)^{-1} (D(p))^{-1} \hat{Z}^0$$

. The IO table for a target year (I and III quadrant) are evaluated as follows

$$I : D(p) A D(\hat{Y}) \quad III : D(s) B D(\hat{Y})$$

Cobb-Douglas technologies and utility. Solution of Inverse Problem of Identification.

Let production technologies and utility function be Cobb-Douglas (CD) functions, i.e.

$$F_j(X, l) = \alpha_j X_1^{a_{1j}} \dots X_m^{a_{mj}} l_1^{b_{1j}} \dots l_n^{b_{nj}}, \quad j = 1..m, \quad (20)$$

where $\alpha_j = \frac{A_j}{\prod_{i=1}^m (Z_i^j)^{a_{ij}} \prod_{k=1}^n (Z_{m+k}^j)^{b_{kj}}} > 0$.

Proposition. Given base year with the IO table Z the set

$$\{\hat{X}_i^0 = Z_i^0, \hat{X}_i^j = Z_i^j, \hat{l}_k^j = Z_{m+k}^j, i, j = 1..m, k = 1..n\}$$

is a solution of resource allocation problem with CD-technologies (20) for the given vector of primaries limitation $l = (l_1, \dots, l_n)$, where

$$l_k = \sum_{j=1}^m Z_{m+k}^j, \quad k = 1..n.$$

Thus the resource allocation problem explains the initial IO table Z of the base year. Recall that we consider two primary inputs: labor and import ($n = 2$).

Cobb-Douglas technologies and utility. Young dual problem solution. Equilibrium prices. Scenario evaluations

Young transforms of CD utility and technology are CD Consumer price index and Cost function

$$q_0(p) = \frac{1}{F_0(a^0)} p_1^{a_{10}} \dots p_m^{a_{m0}}, \quad q_j(p, s) = \frac{1}{F_j(a^j, b^j)} p_1^{a_{1j}} \dots p_m^{a_{mj}} s_1^{b_{1j}} \dots s_n^{b_{nj}}. \quad (21)$$

The Young dual problem to the resource allocation problem has an explicit solution

$$p_j = s_1^{c_{1j}} \dots s_n^{c_{nj}}, \quad j = 1..m, \quad (22)$$

where $C = \|c_{kj}\| = (E - A^T)^{-1} B^T$ - $n \times m$ -matrix, E is identity matrix .

The aggregate cost function can be written as $q_A(s) = s_1^{\gamma_1} \dots s_n^{\gamma_n}$, where $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T = C^T a^0$, $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = 1$.

Total Output vector $\hat{Y} = (E - A)^{-1} \hat{Z}^0$.

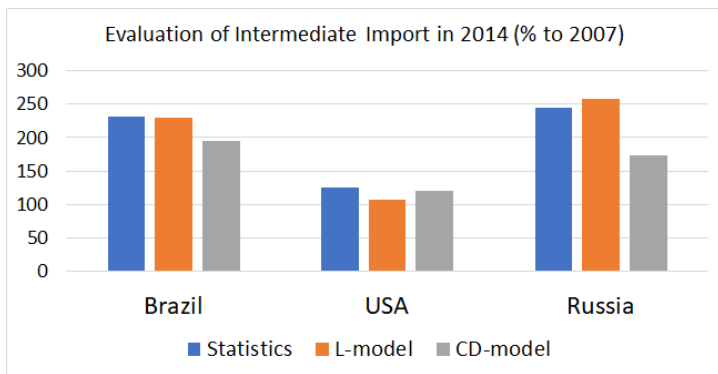
Quadrants I and III of IO Table evaluations for a target year

$$\hat{Z}_i^j = p_i X_i^j = a_{ij} \hat{Y}^j, \quad \hat{Z}_{m+t}^j = s_t X_{m+t}^j = b_{tj} \hat{Y}^j, \quad i, j = 1..m, \quad t = 1..n,$$

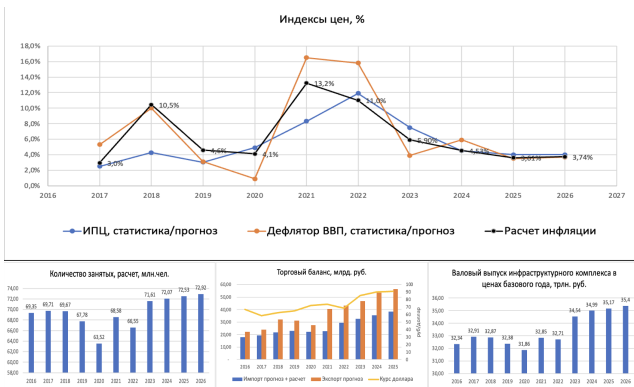
where p_i is the solution (22) of the Young dual problem, $n = 2$.

Example. Leontief and Cobb-Douglas technologies. Comparison of large economies on various stage of centralization.

Comparison of forecasts based on Leontief technologies (without factor substitution, L-model) and Cobb-Douglas technologies (CD model)

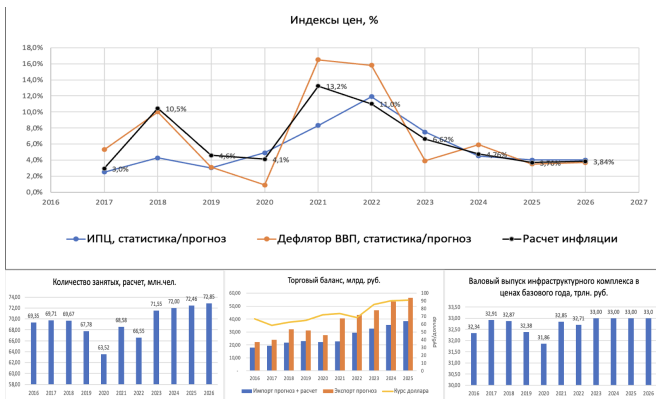


Сценарий 1: Б2023; Прогноз макроэкономических показателей и инфляции с помощью модели без учета ограничения мощностей инфраструктурного комплекса



- Существенный рост выпуска в инфраструктурном комплексе - превышение уровня 2016-2020
→ **необходимость учета ограничения на мощность в модели**
- Сохранение баланса на рынке труда и на рынке валюты
- Инфляция в сценарном расчете по модели соответствует факту/прогнозу Минэкономразвития

Сценарий 2: Б2023; Прогноз макроэкономических показателей и инфляции с помощью модели с учетом ограничения мощностей инфраструктурного комплекса



- Выполнение всех ресурсных ограничений (труд, валютный рынок, мощность инфраструктуры)
- Учет ограничения на мощность инфраструктурного комплекса → **рост инфляции** на 0.6-0.8 п.п.
- мотивировка реализации проектов для расширения мощностей

Применение модели. Прогноз занятости. Оплата труда.

Расчет по модели занятости в отраслях ВЭД - соответствие прогнозу МинЭка.

ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ ЗАНЯТЫХ ПО ВИДАМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, тыс. чел.										Отклонение в 2025	Отклонение в 2030
	2022 (факт)	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030		
Сельское, лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство	4 466	4 265	4 262	4 259	4 258	4 238	4 217	4 197	4 176	0,38%	-0,48%
Добыча полезных ископаемых	1 195	1 198	1 196	1 188	1 180	1 166	1 145	1 118	1 088	0,14%	-7,16%
Обрабатывающие производства	10 003	10 346	10 578	10 601	10 636	10 694	10 757	10 816	10 874	0,08%	1,00%
Обеспечение электрической энергией, газом и паром; кондиционирование воздуха	1 560	1 566	1 571	1 571	1 571	1 558	1 542	1 528	1 514	0,79%	1,24%
Водоснабжение, водоотведение, организация сбора и утилизация отходов, деятельность по ликвидации загрязнений	706	702	702	702	701	700	698	696	695	0,38%	-0,26%
Строительство	6 552	6 733	6 775	6 828	6 867	6 810	6 760	6 710	6 662	-0,48%	-1,12%
Торговля оптовая и розничная; ремонт автотранспортных средств и мотоциклов	13 251	13 344	13 440	13 494	13 536	13 481	13 424	13 358	13 286	0,38%	1,17%
Транспортировка и хранение	5 751	5 821	5 889	5 995	6 089	6 126	6 166	6 207	6 248	-0,21%	1,60%
Деятельность гостиниц и предприятий общественного питания	1 862	1 953	1 987	2 021	2 056	2 078	2 105	2 126	2 141	-1,09%	-2,19%
Деятельность в области информации и связи	1 619	1 657	1 666	1 680	1 692	1 694	1 698	1 701	1 705	-1,80%	-6,15%
Деятельность финансовая и страховая	1 303	1 311	1 312	1 306	1 299	1 284	1 270	1 257	1 245	4,17%	6,12%
Деятельность по операциям с недвижимым имуществом	1 856	1 904	1 944	1 971	2 000	2 019	2 038	2 059	2 083	9,76%	16,74%
Деятельность профессиональная, научная и техническая	2 800	2 840	2 871	2 901	2 927	2 942	2 961	2 982	3 002	-0,31%	-2,91%
Деятельность административная и сопутствующие дополнительные услуги	2 082	2 102	2 118	2 122	2 126	2 123	2 119	2 116	2 114	0,65%	-1,72%
Государственное управление и обеспечение военной безопасности, социальное обеспечение	3 595	3 606	3 599	3 596	3 581	3 568	3 556	3 544	3 532	0,30%	-0,49%
Образование	5 272	5 279	5 275	5 277	5 271	5 264	5 256	5 249	5 241	-0,02%	-0,61%
Деятельность в области здравоохранения и социальных услуг	4 443	4 430	4 468	4 511	4 548	4 580	4 616	4 652	4 688	-0,33%	-1,90%
Деятельность в области культуры, спорта, организации досуга и развлечений	1 162	1 185	1 199	1 214	1 227	1 239	1 252	1 266	1 279	-0,07%	-2,00%
Предоставление прочих видов услуг	1 679	1 816	1 865	1 919	1 971	1 981	1 997	2 024	2 065	-0,78%	-1,63%
Итого	71 156	72 058	72 716	73 155	73 539	73 545	73 576	73 607	73 637	0,28%	0,11%

Темп роста среднемесячной номинальной заработной платы по экономике, год к году								
2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	
10,2%	7,1%	5,1%	5,5%	4,7%	4,8%	4,8%	4,9%	

Рассогласованность прогноза Минэка 2023: зарплата, темпа ВВП и занятость.

