

Вклад академика А.Н.Колмогорова в развитие современной теории вероятностей

А.В. Булинский

(профессор кафедры теории вероятностей мехмата
МГУ им. М.В.Ломоносова)

СПб семинар по истории математики
онлайн, 05 сентября 2024 года

ПЛАН

- 1 Теория вероятностей до А.Н.Колмогорова
- 2 Вклад А.Н.Колмогорова
- 3 Заключение

1. Будучи 19-летним студентом физико-математического факультета Московского университета, [А.Н.Колмогоров](#) построил пример почти всюду расходящегося ряда Фурье. Эта работа сразу принесла ему мировую славу.



Затем последовали фундаментальные труды практически во всех областях математики, а также в физике, механике, биологии.

Андрей Николаевич внес вклад в решение двух из общего списка 23 знаменитых проблем, составленного Д.Гильбертом в 1900 году.

В 6-й проблеме предлагалось “аксиоматизировать те физические науки, в которых важную роль играет математика”. К 20-му веку теорию вероятностей стали относить к физике.

В отличие от геометрии, возникшей более 4000 лет тому назад, теория вероятностей является молодой наукой. Вероятностные рассуждения (комбинаторного характера) появились лишь в эпоху Возрождения при рассмотрении азартных игр.

Одним из первых, кто стал анализировать шансы игроков был [Дж.Кардано](#) (G.Cardano, 1501-1576). Его рукопись “Книга об азартных играх” (“Liber de Ludo Aleae”) опубликована лишь в 1663 г. Считается, что начало “исчислению вероятностей” положила переписка [Б.Паскаля](#) и [П.Ферма](#), относящаяся к известной задаче кавалера [де Мере](#) (de Méré), как справедливо разделить ставку в прерванной игре. В 1657 г. появилась книга [Х.Гюйгенса](#) “О расчетах в азартных играх” (“De Ratiociniis in Ludo Aleae”), в которой, например, приводятся правила сложения и умножения вероятностей.



B.Pascal
(1623 - 1662)



P. de Fermat
(1601 - 1665)



C.Huygens
(1629 - 1695)



J.Bernoulli
(1655 - 1705)

Принципиальную роль сыграла книга Я.Бернулли
“Искусство предположений,” изданная в 1713 году.



Именно в этом труде впервые появился “закон больших чисел” (в слабой форме), заложивший подход к обоснованию наблюдаемой устойчивости частот определенных событий в опытах, производимых в одинаковых условиях так, что их результаты не влияют друг на друга.

Начиная с 18-го века, усилия многих исследователей были направлены на изучение **флуктуации сумм** $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, где X_k являются независимыми случайными величинами.

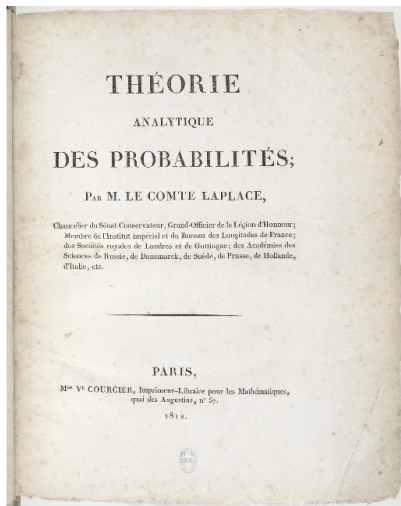
У нас нет времени подробно остановиться на глубоких исследованиях, которые проводились вплоть до начала 20-го века. Отметим лишь вклад следующих известных ученых:

Д.Бернулли, А. де Муавр, К.Гаусс, П.-С.Лаплас, Д.Пуассон, П.Л.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпунов, А.Пуанкаре, Л.Башелье, Э.Борель, М.Фреше, П.Леви, Я.Линдеберг, Ф.Лундберг, Н.Винер, С.Н.Бернштейн.

Например, **П.-С.Лаплас** доказал, что для последовательности независимых одинаково распределенных ограниченных невырожденных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ для любых $-\infty < u < v < \infty$ при $n \rightarrow \infty$

$$P\left(u \leq \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right) \rightarrow P(u \leq Z \leq v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^v e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $a = EX_1$ (математическое ожидание),
 $\sigma^2 = \text{var } X_1$ (дисперсия). Функция $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$,
 $-\infty < t < \infty$, – **плотность распределения**
стандартной нормальной величины $Z \sim N(0, 1)$.
Это распределение введено **К.Гауссом**.



Source: gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Ныне можно сказать, что **теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений**. Конечно, в этом высказывании имеются “подводные камни”. Что такое модель и что такое случайное явление? Обычно говорят, что результат случайного эксперимента невозможно предсказать до его проведения. Например, до подбрасывания монеты мы не знаем, какой стороной она упадет. Особенно трудным является вопрос о “природе случайности”.

Для многих привлекательной является точка зрения, что невозможность предсказания связана с неполнотой наших знаний.



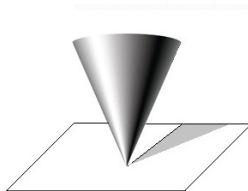
P.-S.Laplace (1749 - 1827)

В 1814 г. в “Эссе о вероятностях” П.-С.Лаплас писал: “Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех её составных частей, ”

А. Пуанкаре в книге “Calcul des Probabilités” (1912) писал, что непредсказуемость (случайность) связана с невозможностью точно контролировать начальные условия экспериментов, малейшее изменение которых приводит к существенным последствиям. В этой связи он рассматривал пример неустойчивого равновесия конуса, поставленного на вершину.

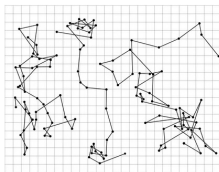


Н. Poincaré (1854 - 1912)



Концепция детерминизма пошатнулась с созданием в первой четверти 20-го века квантовой механики. В 1927 г. В.Гейзенберг (W.Heisenberg) сформулировал принцип неопределенности для микромира, согласно которому “невозможно одновременно точно определить координаты и скорость (импульс) частицы”. Согласно “правилу Борна”, волновая функция (решение уравнения Шредингера) назначает “амплитуду” каждому результату измерений, и вероятность получить такой результат равна квадрату амплитуды. Даже среди выдающихся физиков не было (и нет) единого мнения относительно случайности. Например, А.Эйнштейн считал, что “God does not play the dice.”

[Р.Броун](#) в 1827 году обнаружил под микроскопом хаотическое движение цветочной пыльцы в воде.



Физическая природа этого знаменитого явления долгие годы оставалась неизвестной. Первая математическая модель хаотических флуктуаций такого рода была введена [Л.Башелье](#) в 1900 г. при изучении колебаний на бирже курсов ценных бумаг. В 1905 г. появилась статья [А.Эйнштейна](#) и в 1906 г. - [М.Смолуховского](#), в которых была заложена теория процессов диффузии, связанных с молекулярным строением вещества.

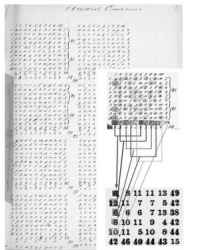
Математические модели броуновского движения были предложены [Н.Винером](#), [П.Леви](#), [П.Ланжевром](#) и другими учеными.

Мы не обсуждаем вероятностные модели, связанные с демографическими исследованиями, а также с обработкой данных астрономических наблюдений.

В 19 веке интенсивно развивалась **статистическая физика**, использовавшая случайные модели.

Достаточно упомянуть исследования [Р.Клаузиуса](#), [Л.Больцмана](#), [Дж.Максвелла](#), [Я.Ван-дер-Ваальса](#), [Дж.Гиббса](#), [Л.Онзагера](#). В 1902 году был опубликован фундаментальный труд [Дж.Гиббса](#) “Основы статистической механики”.

В 1906 году [А.А.Марков](#) ввел новый класс случайных величин, обладающих цепной зависимостью. Для этого он исследовал, с какой частотой появляются гласные и согласные буквы, а также как чередуются гласные и согласные в романе [А.С.Пушкина](#) “Евгений Онегин”.



Интересный пример марковской цепи рассмотрели в 1907 году физики **Т.Эренфест** и **П.Эренфест** для объяснения второго закона термодинамики.

Назрела необходимость разобраться с общими свойствами моделей, использующих понятие случайности. Ведь даже не было строгого определения случайной величины. Как же ученые занимались исследованиями до 20-го века? В большинстве случаев изучались простые дискретные модели. Сложные стохастические модели потребовали понимания, как следует рассматривать одновременное поведение бесконечного числа случайных величин. Первые попытки аксиоматизации теории вероятностей в начале 20-го века предприняли Э.Борель, а также С.Н.Бернштейн.

В 1929 году выдающийся математик и философ
Б.Рассел сказал:

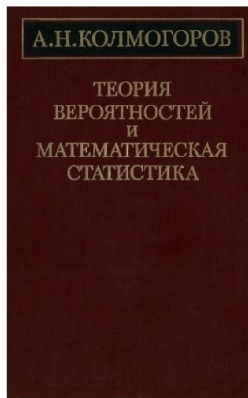


“Probability is the most important concept in modern science, especially as nobody has the slightest notion what it means”.

2. Именно **Андрей Николаевич Колмогоров** заложил прочный фундамент теории вероятностей в своей монографии “**Основные понятия теории вероятностей**” (первое издание в 1933 году).



После этого он на многие годы стал признанным лидером этой науки.



Книга ("Наука", 1986) содержит 53 статьи
А.Н.Колмогорова и комментарии к ним.

ВКЛАД А.Н.КОЛМОГОРОВА В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Создание фундамента теории вероятностей.
2. Решение ряда классических и новых проблем этой науки.
3. Развитие математической статистики.
4. Результаты в области случайных процессов.
5. Исследование стохастических моделей в физике, биологии, геологии и других науках.
6. Новый подход к определению случайности.

Фундаментальный подход **А.Н.Колмогорова** к построению теории вероятностей был основан на понятии вероятностного пространства, описывающего разнообразные случайные эксперименты.



$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство,
 Ω - пространство элементарных исходов
 $\mathcal{F}$ - σ -алгебра подмножеств Ω (т.е. событий),
 P - вероятностная мера.

До его книги отсутствовал даже ответ на вопрос, удастся ли построить бесконечное семейство независимых случайных величин с заданными распределениями. Тем более, было не ясно, как задать последовательность величин с цепной зависимостью, введенной **А.А.Марковым**.



А.А.Марков (1856 - 1922)

Фактически ранее математики изучали свойства объектов, существование которых не было строго доказано.

Определение

Мера μ на $(S, \mathcal{B})$ – это функция $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, являющаяся счетно аддитивной, т.е. для $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ таких, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ верно равенство

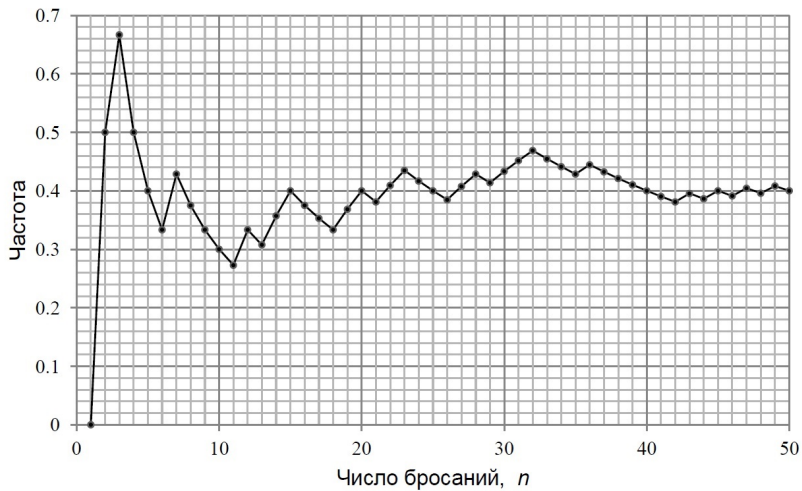
$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Определение

Вероятностью на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется мера P такая, что $P(\Omega) = 1$.

Для любого $A \subset \Omega$ при проведении n раз в одинаковых условиях (что является идеализацией) некоторого случайного эксперимента можно подсчитать относительную частоту наступления A . Свойства таких частот аналогичны свойствам вероятности. Это тоже дало определенную базу для глубоких обобщений.

При этом на практике с давних пор была замечена стабилизация поведения частот с ростом количества экспериментов n . Было желательно построить такую теорию, которая отразила бы указанное свойство в виде строгих результатов.



Нюанс заключается в том, что вероятность, вообще говоря, задается не на 2^Ω , а лишь на некоторой σ -алгебре подмножеств множества S (вероятность задают на различных пространствах, а не только на $(\Omega, \mathcal{F})$).

Например, если положить $\mu([a, b]) := b - a$, где $[a, b] \subset [0, 1]$, т.е. определить евклидову длину отрезка, то по теореме Каратеодори μ однозначно продолжается на σ -алгебру $\mathcal{B}([0, 1])$ борелевских подмножеств отрезка и возникает вероятностная мера Лебега. Однако эту меру нельзя продолжить на все подмножества $[0, 1]$, если потребовать, чтобы меры конгруэнтных множеств совпадали (что имеет место для μ на $\mathcal{B}([0, 1])$).

Для создания аксиоматического фундамента теории вероятностей требовалось глубокое понимание теории меры и интеграла Лебега, интенсивно развивавшихся в начале 20-го века.

Андрей Николаевич был необычайно эрудированным в области математики (он говорил, что до войны читал все без исключения советские и зарубежные математические журналы).

Даже в 70-е годы 20-го века на одном из заседаний Московского математического общества академик П.С.Александров сказал, что Андрей Николаевич – единственный, кто понимает всю современную математику.

Подчеркнем, что при построении фундамента теории вероятностей дело не сводилось только к искусственному применению готового математического аппарата. В своей монографии [А.Н.Колмогоров](#) ввел важнейшее [понятие условного математического ожидания \$E\(X|\mathcal{A}\)\$](#) , нашедшее широкое применение, в частности, в новом направлении теории вероятностей, получившем название [случайных процессов](#). Например, это понятие играет ключевую роль в теории мартингалов.

Следует также отметить теорему Колмогорова о построении случайного процесса, имеющего согласованные конечномерные распределения.

Интересно сопоставить подход [А.Н.Колмогорова](#) к аксиоматическому построению теории вероятностей с подходами, предложенными [Э.Борелем](#), [С.Н.Бернштейном](#) и [Р. фон Мизесом](#).



E.Borel (1871 - 1956)



С.Н.Бернштейн (1880 - 1968)



R. von Mises (1883 - 1953)

Это – отдельная тема. Отметим, в частности, недавнюю работу [Р.Зигмунд - Шюльце](#) (Reinhard Siegmund-Schultze) 2023 года, в которой говорится о встрече [А.Н.](#) и [RvM](#) в Германии в 1931 году и рассматривается 5 писем которыми обменялись эти ученые.



Maurice Fréchet (1878 - 1975)

М. Фреше в 1937 году в Женеве при открытии коллоквиума по теории вероятностей сказал следующее: “Недостаточно иметь все идеи и вспоминать их то тут, то там; необходимо четко свести их воедино, убедиться, что всего достаточно, и взять на себя ответственность за утверждение, что для построения теории больше ничего не требуется. Это то, что сделал Колмогоров”.



Как отмечено в монографии [А.Н.Колмогорова](#) 1933 года, интерпретация вероятности $P(E)$ события E , которое может произойти или не произойти в некотором эксперименте C , основана на следующих двух принципах.

А. Можно быть практически уверенным, что если C будет повторен большое число раз, относительная частота наступления события E будет очень мало отличаться от $P(E)$.

Б. Если $P(E)$ очень мало, можно быть практически уверенным, что при однократной реализации C событие E не произойдет.

Андрею Николаевичу принадлежит целый ряд классических результатов теории вероятностей.

Он получил необходимые и достаточные условия сходимости рядов из независимых случайных величин, установил критерий справедливости усиленного закона больших чисел для независимых одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \dots$, т.е.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow a \in \mathbb{R} \text{ почти наверное при } n \rightarrow \infty$$

тогда и только тогда, когда существует $EX_1 = a$.

Андрей Николаевич дал полное описание распределений безгранично делимых величин, имеющих конечную дисперсию. Величина X безгранично делима, если для любого n найдутся независимые одинаково распределенные величины $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ такие, что распределение X совпадает с распределением $X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$. Он доказал, что X , у которой $\text{var}X < \infty$, безгранично делима тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция представима в виде

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i\gamma t + \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} dG(x) \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где константа $\gamma \in \mathbb{R}$, G – неубывающая функция ограниченной вариации.

Это позволило в дальнейшем развить общую теорию безгранично делимых и устойчивых распределений. Напомним, в частности, что знаменитая формула **Леви - Хинчина** описывает характеристическую функцию $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, любой безгранично делимой величины (без предположения конечности дисперсии) в виде

$$\exp \left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \left(\frac{1+u^2}{u^2} \right) dG(u) \right\},$$

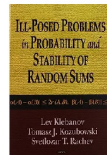
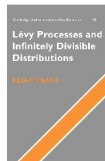
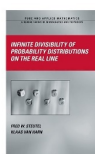
где $\gamma \in \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – неубывающая функция ограниченной вариации.

К безгранично делимым распределениям относятся законы **Коши**, **Пуассона**, **Гаусса**, гамма и др.

Известно, что если для каждого $n \in \mathbb{N}$ набор $\{X_{n,j}, j = 1, \dots, k_n\}$, где $k_n \in \mathbb{N}$, состоит из независимых (в должном смысле) “малых” величин, то множество всех возможных предельных (в смысле слабой сходимости) распределений сумм $\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j}$ совпадает с классом всех безгранично делимых распределений. В отличие от приведенной выше “схемы серий”, для последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ линейным образом нормированные частные суммы $\sum_{k=1}^n X_k$ в качестве слабых пределов имеют устойчивые законы.

Доказательство можно прочитать, например, в главе 4 книги В.В.Петрова “Суммы независимых случайных величин”, 2022.

Важное развитие упомянутой теории содержат также следующие книги:



Новая постановка задач в теории суммирования случайных величин была сформулирована **А.Н.Колмогоровым** в 1953 году.

Он предложил вместо аппроксимации последовательности распределений частных сумм индивидуальным распределением (как было ранее, гауссовским или пуассоновским) использовать целые семейства приближающих распределений.

Введем **метрику Колмогорова** на классе функций распределений:

$$\rho(F, G) := \sup_{u \in \mathbb{R}} |F(u) - G(u)|.$$

В 1955 году [Ю.В.Прохоров](#) (ученик А.Н.Колмогорова, впоследствии ставший академиком АН СССР) доказал, что для каждой функции распределения G

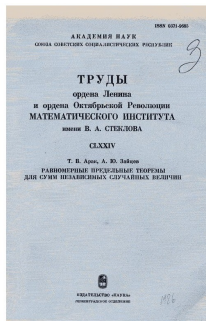
$$\rho(G^{*n}, \mathcal{D}) := \inf_{D \in \mathcal{D}} \rho(G^{*n}, D) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mathcal{D}$ – класс всех функций распределения безгранично делимых законов. [А.Н.Колмогоров](#) усилил этот результат, показав, что

$$\psi(n) := \sup_{G \in \mathcal{G}} \rho(G^{*n}, \mathcal{D}) \leq Cn^{-\frac{1}{5}},$$

где $\mathcal{G}$ – совокупность всех функций распределения, C – положительная константа.

Развитие теории в этом направлении отражено в монографии **Т.В.Арак, А.Ю.Зайцев. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин (1986)**



и недавних работах **А.Ю.Зайцева и Ф.Гетце 2021 и 2022** годов, посвященных исследованию сумм независимых случайных векторов.

В частности, было доказано, что точной по порядку степени n является оценка $\psi(n) \leq cn^{-\frac{2}{3}}$.

Кроме того, стало интенсивно развиваться направление **сильной аппроксимации сумм случайных величин**, когда добиваются должной близости траекторий процесса частных сумм изучаемых случайных величин и аппроксимирующего процесса (например, винеровского). В этой связи укажем на работы **А.В.Скорехода, В.Штрассена, Я.Комлоша, П.Майора, Г.Тушнади, М.Черге.**

В 1931 году была опубликована статья [А.Н.Колмогорова](#) “Аналитические методы в теории вероятностей,” посвященная общей теории марковских процессов. В ней были выявлены глубокие связи теории вероятностей и теории дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными).

Ограничимся лишь упоминанием прямых ([Фоккера - Планка - Колмогорова](#)) и обратных дифференциальных уравнений Колмогорова.

Напомним, что имеется ряд определений марковского процесса. Процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ со значениями при каждом $t \geq 0$ в пространстве E , снабженном σ -алгеброй $\mathcal{B}$, называется **марковским**, если для любых $0 \leq s < t$ и каждого $C \in \mathcal{B}$ верно соотношение

$$P(X_t \in C | X_u, 0 \leq u \leq s) = P(X_t \in C | X_s).$$

Положим

$$P(X_t \in C | X_s) := P(s, X_s, t, C).$$

Удобно считать, что при всех значениях аргументов **переходной функции** $P(s, x, t, C)$ верно **уравнение Колмогорова - Чепмена**:

$$P(s, x, t, C) = \int_E P(s, x, u, dy) P(u, y, t, C),$$

где $s \leq u \leq t$, $C \in \mathcal{B}$. Для $E = \mathbb{R}$ были введены локальные характеристики (“коэффициент сноса” и “коэффициент диффузии”)

$$A(t, x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} (y - x) P(t, x, t + \delta, dy),$$

$$B^2(t, x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} (y - x)^2 P(t, x, t + \delta, dy).$$

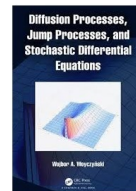
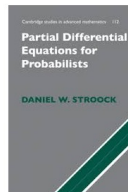
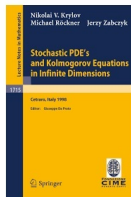
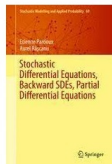
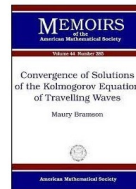
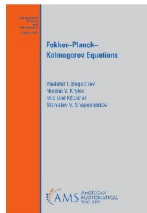
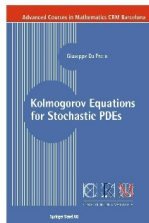
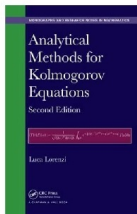
Налагалось также условие на третий момент.

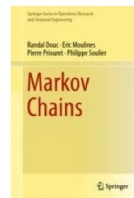
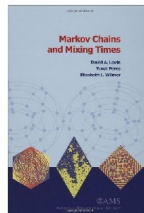
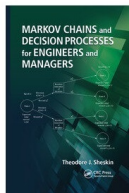
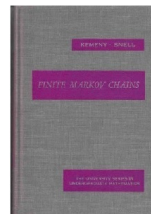
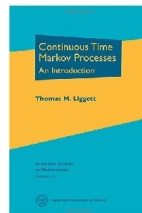
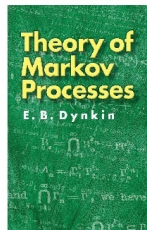
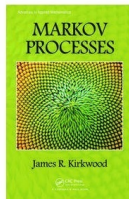
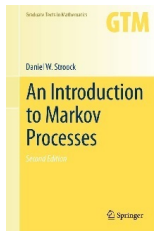
В предположении, что мера $P(s, x, t, \cdot)$ имеет достаточно гладкую плотность $f(s, x, t, y)$, А.Н.Колмогоров доказал справедливость “прямого” и “обратного” уравнений:

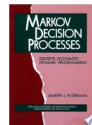
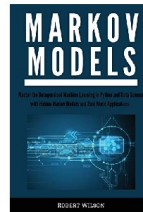
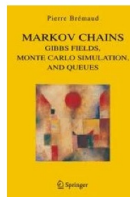
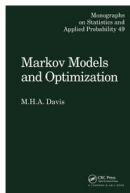
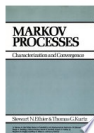
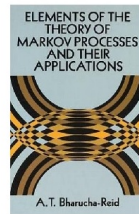
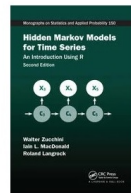
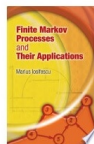
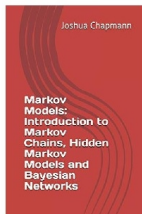
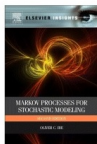
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(A(t, y)f)}{\partial y} + \frac{\partial^2(B^2(t, y)f)}{\partial^2 y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A(s, x)\frac{\partial f}{\partial x} - B^2(s, x)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}.$$

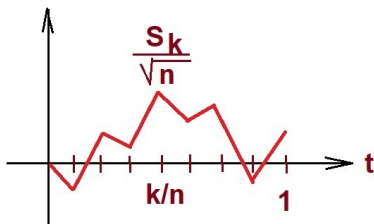
Специальные формы прямых уравнений появлялись ранее в работах [A.D.Fokker](#) (1914) и [M.Plank](#) (1917).







В 40-х годах 20-го века (и даже ранее) **Андрей Николаевич** инициировал новое направление в теории случайных процессов, получившее название **функциональных предельных теорем**. Дальнейшие результаты в этой области связаны с деятельностью **М.Донскера**, **Ю.В.Прохорова**, **Д.Дуба**, **П.Биллингсли**, **А.Н.Ширяева**, **Ж.Жакода** и других ученых.



Неулучшаемые условия справедливости закона повторного логарифма для последовательности независимых ограниченных случайных величин были найдены А.Н.Колмогоровым.

Теорема (Колмогоров)

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые случайные величины такие, что $|X_n| \leq M_n$ п.н., где $M_n = o((B_n/(\log \log B_n))^{1/2})$ и $B_n^2 := \text{var} S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ ($S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \log \log B_n}} = 1, \quad \text{п.н..}$$

Широко известен критерий Колмогорова - Петровского - Эрдеша - Феллера, описывающий верхние и нижние функции для броуновского движения W и для сумм независимых случайных величин.

Теорема (Колмогоров - Петровский)

Пусть неубывающая функция $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Тогда $P(W(t) > \varphi(t)\sqrt{t} \text{ б.ч.}) = 0$ или 1 , если и только если соответственно

$$I(\varphi) := \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} e^{-\frac{\varphi(t)^2}{2}} dt < \infty \text{ или } = \infty.$$

Позднее появился закон повторного логарифма **Хартмана - Винтнера** для последовательности независимых одинаково распределенных величин с конечной дисперсией.

Новый виток обобщений был сделан **В.Штрассеном** в 1964 г., когда он доказал **функциональный закон повторного логарифма** как для броуновского движения W , так и для сумм независимых слагаемых.

В пространстве $C[0, 1]$ определим шар Штрассена

$$K := \left\{ x \in C[0, 1] : x(t) = \int_0^t f(s) ds, \int_0^1 f^2(s) ds \leq 1 \right\}.$$

Теорема (Штрассен)

Множество предельных точек в $C[0, 1]$ процессов

$$W_n(t) := \frac{W(nt)}{\sqrt{2n \log \log n}}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 3, 4, \dots,$$

п.н. совпадает с шаром K .

В условиях теоремы Донскера аналогичное утверждение справедливо для случайных ломаных $U_n(t)$, $t \in [0, 1]$, где берутся узлы интерполяции $(k/n, S_k/\sqrt{2n \log \log n})$, $k = 0, \dots, n$, $n = 3, 4, \dots$

В.Штрассеном была поставлена задача установления взаимосвязи между функциональным законом повторного логарифма и интегральным критерием КПЭФ для верхних и нижних функций. Для ее решения рассмотрим

$$f_n(t) := \frac{W(nt)}{\varphi(n)\sqrt{n}}, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

где неубывающая функция $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. В нашей статье 1978 г., которую А.Н.Колмогоров представил в Доклады АН СССР, введен функционал

$$I(\varphi, r) := \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} e^{-\frac{r\varphi(t)^2}{2}} dt, \quad r > 0.$$

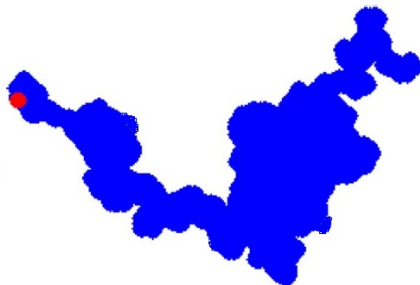
Определим $R^2(\varphi) := \inf\{r > 0 : I(\varphi, r) < \infty\}$.

Теорема (Булинский)

Множество предельных точек семейства $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $C[0, 1]$ п.н. совпадает с шаром $K_{R(\varphi)}$, где K_0 состоит из функции, равной нулю, $K_{R(\varphi)} = R(\varphi)K$ при $0 < R(\varphi) < \infty$ и $K_\infty = C[0, 1]$.

Аналогичный результат установлен нами для случайных ломаных g_n . В статьях [K.Grill](#) и [M.Talagrand](#) была найдена неулучшаемая скорость сходимости случайных функций B_n и U_n к шару Штрассена. В работах [А.В.Булинского](#) и [М.А.Лифшица](#) получено обобщение этих результатов на сходимость f_n и g_n к шару $K_{R(\varphi)}$. Оказалось, что скорость существенно зависит от φ .

В 1933 году [А.Н.Колмогоров](#) и [М.А.Леонтович](#) (физик, академик АН СССР) написали статью “К вычислению средней броуновской площади”, посвященную решению задачи, поставленной им Президентом АН СССР [С.И.Вавиловым](#). Речь шла о вычислении среднего значения площади $F(t, \sigma)$, которую за время t “заметает” двигающаяся по плоскости броуновская частица радиуса σ .



Они доказали, что

$$E|F(t, \sigma)| \sim \frac{4\pi Dt}{\log(1, 26Dt/\sigma^2)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

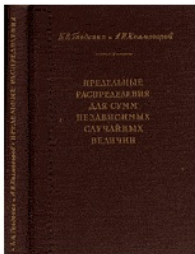
где D – коэффициент диффузии частицы, $|\cdot|$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Интересно, что физическая часть статьи написана [А.Н. Колмогоровым](#), а математическая – [М.А. Леонтовичем](#).

Позднее аналогичная задача в многомерном случае рассматривалась многими авторами ([F.Spitzer](#), [J.-F. Le Gall](#), [M. van den Berg](#), [E.Bolthausen](#), [A.-S.Sznitman](#) и др.).

В 35 лет в 1939 г. А.Н.Колмогоров был избран академиком (действительным членом) АН СССР. Андрей Николаевич имел очень высокий авторитет не только у математиков, но и у физиков. В 1939 он был избран академиком-секретарем физико-математического отделения АН СССР.

Перед войной в 1941 году А.Н.Колмогоров и А.Я.Хинчин были удостоены Сталинской премии за исследования в области предельных теорем теории вероятностей.

Широкую известность получила монографию Б.В.Гнеденко и А.Н.Колмогорова “Предельные распределения сумм независимых случайных величин” (1949), отмеченная премией имени П.Л.Чебышева.



Ранее не было описания того, какими могут быть предельные законы распределения для сумм независимых случайных величин в схеме серий, когда слагаемые, в определенном смысле, малы.

До 20 века усилия ученых были, в основном, направлены на доказательство различных вариантов **центральной предельной теоремы (ЦПТ)**. Так по предложению **Д.Пойа** с 1920 года стали называть группу теорем о сходимости нормированных сумм случайных величин к гауссовскому предельному закону.

Во второй половине 20-го века профессор **В.М.Золотарев**, ученик **А.Н.Колмогорова**, нашел **необходимые и достаточные условия ЦПТ без предположения малости случайных слагаемых.**

Далее **В.И.Ротарь**, ученик **Ю.В.Прохорова** в своей докторской диссертации установил следующий более простой критерий справедливости ЦПТ.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ даны независимые величины $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ такие, что $EX_{n,j} = 0$, $\sigma_{n,j}^2 := \text{var} X_{n,j} > 0$, $j = 1, \dots, k_n$, и $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 = 1$. Положим $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $S_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} |x| (F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j}(x)) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $F_{n,j}$ и $\Phi_{n,j}$ — соответственно функции распределения $X_{n,j}$ и $Z_{n,j} \sim N(0, \sigma_{n,j}^2)$, $j = 1, \dots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$.

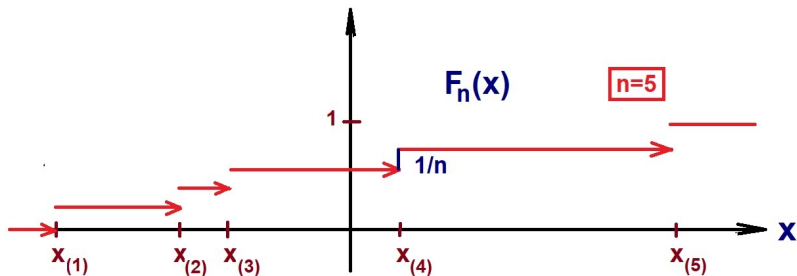
Таким образом (как еще на качественном уровне предвидел [П.Леви](#)) выполнение ЦПТ в схеме серий для независимых величин с конечной дисперсией означает, что если величины $X_{n,j}$ не являются “асимптотически малыми” (в должном смысле), то они сами “близки” гауссовским величинам.

Интересно отметить, что асимптотическая нормальность может возникать в пределе и для сумм независимых величин, не обладающих конечной дисперсией (см., например, теорему 4.17 в учебнике [O.Kallenberg](#) “Foundations on Modern Probability”)

Андрей Николаевич обогатил результатами и математическую статистику, которая решает задачи, в определенном смысле, обратные задачам теории вероятностей. Требуется по данным наблюдений выяснить, какая вероятностная модель адекватно описывает изучаемое явление.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка объема n , где $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные величины, имеющие функцию распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Эмпирическая функция распределения

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}\{X_k \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



$x_1, \dots, x_5$ — значения случайных величин $X_1, \dots, X_5$

$$x_{(1)} = \min_{k=1, \dots, n} x_k, \dots, x_{(n)} = \max_{k=1, \dots, n} x_k$$

Знаменитая теорема Гливенко - Кантелли утверждает, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0 \text{ п.н.}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Однако эта теорема не позволяет строить доверительные коридоры для функции F .

Согласно классическому критерию согласия Колмогорова (1933), если функция F непрерывна, то равномерно по u при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$P(\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq u) \rightarrow K(u),$$

где функция Колмогорова

$$K(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 u^2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

В современном понимании критерий согласия Колмогорова имеет прозрачный смысл. Если $X_1, X_2, \dots$ – независимые величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ (общий случай сводится к этому), то **эмпирический процесс** $\{U_n(t) := \sqrt{n}(F_n(t) - t), t \in [0, 1]\}$ слабо сходится в **пространстве Скорохода** $D[0, 1]$ к **броуновскому мосту** при $n \rightarrow \infty$, т.е. процессу вида $W_0(t) := W(t) - tW(1)$, где W – броуновское движение, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\sup_{t \in [0, 1]} |U_n(t)| \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0, 1]} |W_0(t)|,$$

а функция распределения верхней грани модуля броуновского моста есть $K(u)$, $u \in \mathbb{R}$.

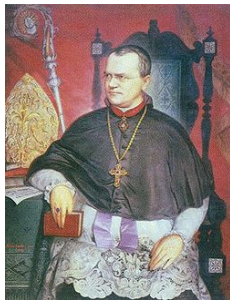
В 1940 году в Докладах АН СССР была напечатана статья А.Н.Колмогорова “Об одном новом подтверждении законов Менделя”, в которой он статистическими методами проанализировал выводы сотрудников академика АН СССР Т.Д.Лысенко (президента ВАСХНИЛ), полученных ими при анализе опытов по скрещиванию гороха для опровержения теории Менделя. Т.Д.Лысенко остался несогласен с математическими выводами А.Н.Колмогорова и, более того, заявил, что тот не понимает биологии. На это Андрей Николаевич ответил, что готов сдать экзамен по биологии, если Т.Д.Лысенко согласится сдать экзамен по математике. Т.Д.Лысенко отказался.

При этом Андрей Николаевич уважительно отзывался о Трофиме Денисовиче и, в частности, вспоминал, что в годы войны важную роль сыграла идея Лысенко сажать картофель, разрезая клубни на части, содержащие глазки.

Для объективности надо отметить следующее. Долгие годы механизм наследственности не был известен. Открытие ДНК было сделано Ф.Криком и Д.Уотсоном лишь в 1953 году.



Оказалось, что некоторые законы Менделя не действуют. В частности, основоположник теории наследственности не мог знать тогда, что существуют сцепленные гены.



Сам **Г.Мендель** в конце жизни разочаровался в своей научной работе и сосредоточился на религиозной деятельности, являясь аббатом Старобрненского монастыря.

[Л.Н.Большев](#) (ученик А.Н.Колмогорова, ставший член.-корр. АН СССР) предложил поправки к статистике $D_n := \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$ для применений критерия согласия при небольших n (см. Таблицы [Л.Н.Большева](#) и [Н.В.Смирнова \(1983\)](#)).

В статье [J.Vrbik \(2020\)](#) при малых n предлагается использовать следующую аппроксимацию:

$$P(D_n \leq u) \approx 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp \left\{ -2 \left(u + \frac{1}{6\sqrt{n}} + \frac{u-1}{n} \right)^2 k^2 \right\}.$$

Важное продолжение критерий согласия получил в работах профессора [Ю.Н.Тюрина](#), являвшегося учеником [А.Н.Колмогорова](#). Если неизвестная функция распределения F принадлежит параметрическому семейству, зависящему от некоторого набора параметров (например, классу нормальных законов), то возникает желание оценить по выборке $X_1, \dots, X_n$ эти параметры, подставить в F найденные статистические оценки параметров, а затем воспользоваться критерием Колмогорова, сравнивая F_n с этой функцией. Оказывается критерий Колмогорова перестает действовать при такой процедуре. Требуется глубокий анализ возникающего предельного распределения.

В частности, если F – гауссовское распределение, у которого оба параметра неизвестны, то

$$P(D_n > u) \sim 2\sqrt{\frac{2\pi}{\pi-2}} \exp\left\{-\frac{2\pi}{\pi-2}u^2\right\}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Отметим также статью [D.S.Dimitrova](#),
[V.K.Kaishev](#), [S.Tan](#). Computing the Kolmogorov -
Smirnov Distribution When the Underlying CDF is
Purely Discrete, Mixed, or Continuous. J. of
Statistical Software, 2020, v. 95, issue 10, p. 1 - 42.

Отдельного внимания заслуживает рассмотрение работ **А.Н.Колмогорова** в области **теории стационарных процессов**. Им было введено понятие регулярного и сингулярного процесса. Решены задачи прогноза и интерполяции процессов. Внесен важный вклад в изучение спектральных плотностей стационарных процессов.

В этой области существенную роль играет аппарат гильбертовых пространств и теория аналитических функций.

Теперь студенты знают, что центрированный стационарный процесс $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ является регулярным тогда и только тогда, когда его спектральная плотность задается формулой

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda} \right|^2,$$

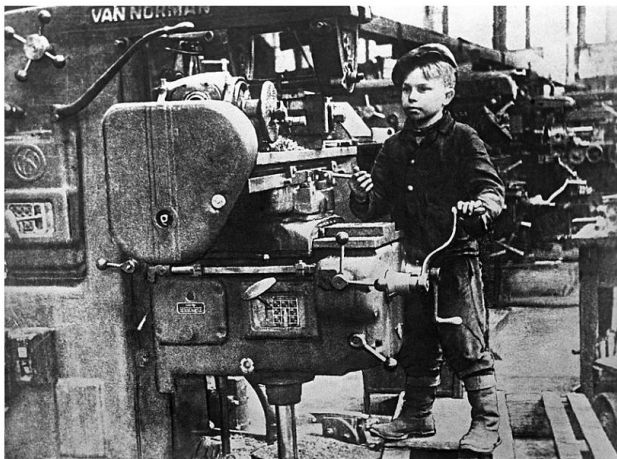
где $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+} \in l^2$. Исчерпывающее описание таких плотностей получил [А.Н.](#)

Теорема (Колмогоров)

Рассматриваемый процесс является регулярным тогда и только тогда, когда

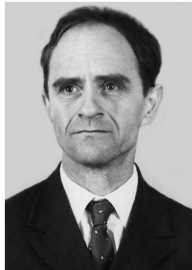
$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

В годы Великой Отечественной войны **Андрей Николаевич** с группой сотрудников по заданию Главного артиллерийского управления РККА выполнил важные работы, относящиеся к теории рассеивания снарядов при стрельбе. Кроме того, он разработал основы статистического контроля качества выпускаемой продукции.



12-летний фрезеровщик Валя Кусакин, 1943

В совместной статье [А.Н.Колмогорова](#) и его ученика [Н.А.Дмитриева](#) в 1947 году было **введено понятие ветвящегося процесса**. Вскоре [Н.А.Дмитриев](#) принял участие в работах по созданию атомного оружия, стал **лауреатом Сталинской и Государственной премий**. Считается, что за теорию неполного атомного взрыва он был бы достоин Нобелевской премии.



Н.А.Дмитриев

Выдающийся вклад **А.Н.Колмогоров** внес в изучение турбулентности. Рассказывают, что в Москве профессор **Ж.Адамар** (Франция), отвечая на вопрос, какая проблема не будет решена с помощью математики, взял графин с водой, встряхнул его и сказал, что не удастся описать такое движение воды.



Рисунок Леонардо да Винчи

Однако Андрей Николаевич сумел продвинуться и в этом направлении! Ему принадлежат глубокие исследования в области локально-изотропной турбулентности. При этом он ввел важное понятие “масштаба турбулентности”. Оказалось, что в определенных масштабах (и при некоторых предположениях) среднее квадратичное разности скоростей потока $v(x)$ и $v(y)$ в точках x и y , т.е. структурная функция второго порядка $D_v(x, y) := \langle (v(x) - v(y))^2 \rangle$ приобретает вид

$$D_v(x, y) = C(\varepsilon r)^{2/3},$$

где r – расстояние между точками x и y ,
 ε – некоторый параметр, характеризующий физическую систему, C – константа Колмогорова.

Это закон двух третей Колмогорова.

Рассказывают, что Нобелевский лауреат И.Р.Пригожин номинировал А.Н.Колмогорова на Нобелевскую премию за работы в области турбулентности. Исследования в этом направлении получили дальнейшее развитие в трудах учеников Андрея Николаевича М.Д.Миллионщикова, ставшего академиком АН СССР, вице-президентом АН СССР, А.М.Обухова (впоследствии академика АН СССР), А.С.Монина (впоследствии академика РАН), А.М.Яглома (ставшего профессором), Г.И.Баренблатта (ставшего профессором).

Следует упомянуть статью [А.Н.Колмогорова](#) 1937 года “[К статистической теории кристаллизации металлов](#)”, в которой при общих предположениях дается решение задачи о скорости течения процесса кристаллизации, а также статью 1941 года “[О логарифмически нормальном законе распределении частиц при дроблении](#)”. Отметим еще работу 1940 года “[Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования](#)”. Эта задача возникла при статистическом изучении мощности слоев в геологических отложениях.

Отдельного доклада заслуживают исследования [А.Н.Колмогорова](#) в области теории информации, инициированной работами [К.Шеннона](#).

[А.Н.](#) считал, что понятие **взаимной информации** $I(X, Y)$ случайных объектов X и Y играет более важную роль, чем понятие энтропии. Так он пришел к определению ε -энтропии на основе взаимной информации, которое появлялось у К.Шеннона как “скорость создания сообщений.” Другое важное понятие (абсолютной) ε -энтропии было развито в работах [А.Н.Колмогорова](#) и [В.М.Тихомирова](#), ученика [А.Н.](#), для описания массивности подмножеств метрического пространства.

В 60-е годы 20-го века [А.Н.Колмогоров](#) предложил алгоритмический подход к определению случайности. Очень привлекательной является идея [А.Н. и Р.Соломонова](#) (R.Solomonoff) считать случайным тот объект, который сложно описать. На этом пути получены важные результаты. Однако, к сожалению, вообще говоря, не существует единственной “минимальной” программы описания. Для изучения “сложности по Колмогорову” или “алгоритмической теории информации” мы рекомендуем обратиться к специальной литературе, см., например, книгу [Н.К.Верещагин, В.А.Успенский, А.Шень \(2013\)](#) и недавнюю работу [Н.К.Верещагин, А.Л.Семенов, А.Шень \(2023\)](#).

Чем важен такой подход? Если взять последовательность, состоящую из n нулей, полученных в схеме Бернулли с $p = 1/2$, то она в рамках классической теории вероятностей имеет вероятность 2^{-n} , как и всякая другая последовательность такой длины. Однако трудно согласиться, что (при большом n) исход из одних нулей отвечает представлению о случайности. Заметим, что такую последовательность легко описать, сказав “все нули”. И это говорит в пользу того, что она не является случайной. При этом подчеркнем, что возможности классической аксиоматики Колмогорова не исчерпаны.

Андрей Николаевич являлся гением, поэтому считал, что слушатели понимают материал столь же быстро и хорошо, как он сам. Это давало повод шутить, что его лекции для студентов понимают аспиранты, для аспирантов - профессора, а для профессоров - академики. Ученик Андрея Николаевича Б.В.Гнеденко (ставший впоследствии академиком АН УССР) в молодости пожаловался член-корр. АН СССР А.Я.Хинчину, что понимает только половину содержания научных докладов А.Н.Колмогорова. "Половину?!", - воскликнул А.Я.Хинчин, - "Так это замечательно! Я не понимаю и трети!"

А.Н.Колмогоров создал в нашей стране уникальную научную школу, которую можно назвать школой школ, поскольку 13 учеников стали академиками АН СССР и РАН, 2 - членами-корреспондентами АН СССР, они сами сформировали выдающиеся научные школы. Среди его учеников есть известные зарубежные ученые: М.Арато (M.Arato), П.Ягерс (P.Jagers), П.Мартин-Лёф (P.Martin -Löf). Благодаря А.Н. крупные научные школы возникли в Сибири (в Новосибирске работает его ученик академик АН СССР А.А.Боровков, создавший вероятностную школу, там же работал его ученик академик АН СССР А.И.Мальцев, основоположник сибирской школы алгебры и логики).

Ученики А.Н.Колмогорова в области теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, избранные в Академии наук



Л.Н.Большев
член-корр. АН СССР



А.А.Боровков
академик АН СССР



В.С.Михалевич
академик АН СССР



Ю.В.Прохоров
академик АН СССР



Б.А.Севастьянов
член-корр. АН СССР



Я.Г.Синай
академик РАН



А.Н.Ширяев
академик РАН



Б.В.Гнеденко
академик АН УССР



С.Х.Сираждинов
академик АН УзССР



В.А.Статулявичус
академик АН ЛитССР

В чем секрет педагогической деятельности А.Н.Колмогорова, сумевшего воспитать многих известных математиков? По-видимому, главную роль играл личный пример. Ученики видели человека, увлеченного наукой, получающего принципиально важные результаты, им хотелось приобщиться к этой деятельности. Андрей Николаевич давал советы, что следует изучить, обсуждал с учениками прочитанный материал. Говорил, что, на его взгляд, интересно. Ученикам А.Н.Колмогорова всегда хотелось продвинуться в научной работе и рассказать об этом своему Учителю.

Общение с Андреем Николаевичем производило неизгладимое впечатление. Он не ограничивался только беседами о науке, с учениками он катался на лыжах, совершал длительные прогулки по Подмосковию, говорил о литературе, о событиях культурной жизни. Большой честью было приглашение приехать к нему на дачу в Комаровку, которой Андрей Николаевич владел вместе со своим другом академиком АН СССР П.С.Александровым. Обычно там были не только беседы о математике, но гостей также угощали вкусным обедом и предлагали вместе послушать классическую музыку.

3. Андрей Николаевич Колмогоров был связан с Московским университетом 67 лет своей жизни.

Он прошел путь от студента до профессора, последовательно заведовал тремя кафедрами (в 1935 году основал и возглавил кафедру теории вероятностей, в 1976 - кафедру математической статистики, с 1980 заведовал кафедрой математической логики), был деканом механико-математического факультета (1954-1958), занимал другие руководящие посты.

А.Н.Колмогоров прожил яркую жизнь, целью которой (по собственному выражению) был поиск истины. Его вклад в науку поражает разносторонностью и глубиной, результаты стали классическими.

Благодаря усилиям ректора МГУ академика РАН **В.А.Садовниченко** на университетской территории появилась улица академика Колмогорова, у подъезда корпуса “Л” Главного здания МГУ установлена бронзовая мемориальная доска.



Мы гордимся тем, что великий ученый прославил нашу Родину!