

Специальное расширение пространства непрерывных функций и его применение к задаче Дирихле

Гущин А.К.

Математический институт им. В.А. Стеклова

20 июня 2024 года

Содержанием настоящего доклада являются различные определения решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения, относящиеся к ним результаты о разрешимости и их сравнение.

За два века, которые прошли с постановки К. Гауссом задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1828 г.), этому определению и различным её обобщениям посвящены исследования многих известных математиков. Ими получено большое количество интересных и важных, ставших уже классическими результатов. Тем не менее, целью данного сообщения является убедить слушателя в том, что в этой "основной" задаче математической физики далеко не все известно и что этому направлению исследований следует уделить особое внимание.

Ограничимся изложением результатов в простейшем случае – в случае линейного эллиптического уравнения вида

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -f(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

в ограниченной области $Q \subset \mathbf{R}_n$.

Здесь $(a_{ij}(x))$ – равномерно положительно определенная матрица с измеримыми и ограниченными элементами.

Дополнительные условия на коэффициенты $(a_{ij}(x))$ уравнения, правую часть f , область Q и заданную на её границе ∂Q функцию u_0 , входящую в граничное условие

$$u|_{\partial Q} = u_0, \quad (2)$$

зависят от рассматриваемого определения решения.

Большинство обсуждаемых результатов справедливы и в случае общего уравнения второго порядка, но рамки доклада вынуждают ограничиться только теми из них, которые тесно связаны с основной нитью изложения. Обзор остальных работ можно, например, найти **А.К. Гущин, Тр. МИАН, 289, 2015.** 

Классическое решение

Определение. u — классическое решение задачи (1), (2) $\Leftrightarrow$

$$u \in C^2(Q) \text{ и для всех } x \in Q \quad \mathcal{L}u(x) = -f(x),$$

$$u \in C(\bar{Q}) \text{ и для всех } x \in \partial Q \quad u(x) = u_0(x).$$

Необходимые условия (для формулировки задачи):

$$u_0 \in C(\partial Q), f \in C(\bar{Q}), a_{i,j} \in C(\bar{Q}).$$

Достаточные условия:

$$u_0 \in C(\partial Q), f \in C^\alpha(\bar{Q}), a_{i,j} \in C^\alpha(\bar{Q}), \alpha > 0.$$

Если f удовлетворяет условию Гёльдера, (а граница области достаточно гладкая и $u_0 = 0$) то, как доказано в 1909 году **А. Корном**, производные второго порядка решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона также *удовлетворяют условию Гёльдера*, причем с тем же показателем.

В 1907 году Лебег показал, что вообще отказаться от условия на границу нельзя. Первоначальный метод исследования (теория потенциалов) $\Rightarrow$ ляпуновская граница; решение Перрона – критерий Винера.

Уравнение Лапласа

Немного об истории вопроса.

Первый результат. **П. Дирихле** (1857 года, по словам Римана);
минимум интеграла Дирихле

$$\int_Q |\nabla v(x)|^2 dx.$$

На каком множестве? Обоснование достижимости минимума
этого функционала.

Единственность решения легко следует из теоремы о среднем.

Условие для f (для уравнения Пуассона) установлено в
1882 году **О. Гёльдером**. Условие Гёльдера близко к точному;
его можно немного ослабить, заменив условием непрерывности
по Дини. Но для непрерывной f утверждение неверно. Это
позволяет рассматривать однородное уравнение.

Решение существует для любой непрерывной граничной функции u_0 .

$n = 3$. Выпуклая область.

К. Нейман, 1870 г. Метод потенциалов. Ряд Нейман. Не гарантирует справедливость доказательства даже условие непрерывной дифференцируемости u_0 .

А. Ляпунов. 1898.

Невыпуклая область

Первый результат был получен в 1896 г. **А. Пуанкаре**. В доказательстве имелся пробел.

В 1899 году **А. Корн** ликвидировал этот пробел в случае звездной области D .

В 1901 году **С. Заремба** в работе доказал ослабленный вариант теоремы Пуанкаре.

Окончательное решение этой проблемы – строгое доказательство теоремы о существовании решения для любой непрерывной граничной функции было получено

В.А. Стекловым в начале 1900-х годов; он доказал и фундаментальную теорему Пуанкаре как следствие теоремы о разрешимости. См., в частности, книгу **В.А. Стеклов**

"Основные задачи математической физики второе издание под редакцией **В.С. Владимирова**, 1983 г.

Уравнения с переменными коэффициентами

Идея рассматривать уравнения с переменными коэффициентами как возмущения уравнений с постоянными коэффициентами принадлежит **А. Корну**, 1914.

Её реализация: доказательство существования и основные свойства решений задачи Дирихле были исследованы в 1929 - 1932 годах **Г. Жиро**.

Метод Шаудера. Основой метода Шаудера (1934, 1935 гг) являются равномерные априорные оценки решений в $C^{2+\alpha}(\bar{Q})$ и разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этом пространстве. Теорема об изоморфизме.

Ослабление требований на гладкость границы. Метод Перрона

Предложенный **О. Перроном** в 1923 году метод построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа отделяет задачу существования решения от изучения его граничного поведения. Он элементарен и опирается только на принцип максимума и разрешимость задачи Дирихле в шаре (Г. Шварц). Идея метода принадлежит **А. Пуанкаре** (méthode du balayage) 1889.

Рассмотрим множество всех непрерывных в замыкании области Q субгармонических функций v , удовлетворяющих на границе неравенству $v \leq u_0$. Доказывается, что функция

$$u(x) = \sup v(x)$$

гармонична в Q . Она называется *решением Перрона*.

Точка $x^0 \in \partial Q$ называется *регулярной*, если для любой $u_0 \in C(\partial Q)$ решение Перрона непрерывно в этой точке и принимает в ней значение, равное $u_0(x^0)$.

Необходимое и достаточное условие регулярности граничной точки было получено, в 1924 году Н. Винером. Оно дается в терминах емкости множества.

Критерий Н. Винера. Точка $x_0 \in \partial D$ регулярна тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{cap}\{x \in Q : |x - x^0| < \lambda^k\} \lambda^{-k(n-2)}.$$

$$\text{cap } \Omega = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx : v \in C_0^1(\mathbf{R}_n), v(x) = 1 \text{ на } \Omega \right\}.$$

О дальнейшем развитии этой тематики см. работу:

М.В. Келдыш, Успехи матем. наук, 1941.

Эквивалентность регулярности граничной точки относительно оператора $\mathcal{L}$ и ее регулярности относительно оператора Лапласа, **О.А. Олейник**, 1949.

Обобщенные решения

Истоки понятия обобщенного решения лежат еще в предложенном **П. Дирихле** вариационном подходе к задаче Дирихле (для уравнения Лапласа) и в использовании метода гильбертова пространства **Д. Гильберт** (1900) и **А. Лебег** (1907).

Введенные **С.Л. Соболевым** в 1936 – 1938 годах пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций и доказанные им теоремы вложения оказались мощным аппаратом исследования краевых задач для дифференциальных уравнений (прежде всего для гиперболических). При этом решаются многие проблемы, возникающие при работе с классическим решением эллиптических уравнений.

Здесь нам будет удобно рассматривать уравнение в виде

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = -f(x). \quad (1')$$

Определение. u — обобщенное решение $\Leftrightarrow$

$$u \in W_2^1(Q) \text{ и выполняется равенство } (1'),$$
$$\text{след } u \text{ на } \partial Q \text{ совпадает с функцией } u_0. \quad (2')$$

Необходимые условия. Они же являются и достаточными.

$$u_0 \in W_2^{1/2}(\partial Q), f \in W_2^{-1}(Q), a_{i,j} \in L_\infty(Q).$$

Любая область. Теорема об изоморфизме.

Решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$

Естественное и удобное для исследования понятие обобщенного решения имеет один недостаток. Оно не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе функция является следом функции из $W_2^1(Q)$. Это вызвано жестким требованием на выполнение граничного условия. Поэтому естественно расширить определение обобщенного решения.

Основная трудность - это определение принятия решением граничного условия. Естественным обобщением пространств $C(\partial Q)$ и $W_2^{1/2}(\partial Q)$ является пространство $L_2(\partial Q)$ (или $L_p(\partial Q)$ с $1 < p < 2(n-1)(n-2)^{-1}$).

Как было показано в 1960 году И. Нечасом оператор, ставящий в соответствие граничной функции u_0 решение u задачи Дирихле (для простоты ограничимся случаем однородного уравнения) и рассматриваемый как оператор из $L_2(\partial Q)$ в $L_2(Q)$ является ограниченным оператором. Для определения граничного условия

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_p(\partial Q)$$

естественно обратиться к классическим работам по граничному поведению аналитических и гармонических функций:

Riesz F. 1923; Littlewood J., Paley R. 1937; Привалов И.И. 1950.

Разрешимость для уравнения Лапласа (классическое решение уравнения).

Как и в теореме Рисса граничное значение на ∂Q можно понимать как предел в L_p по "параллельным границе" поверхностям. Среди многочисленных работ этого направления мы остановимся на результатах **В.П. Михайлова, 1976**. При некоторых условиях на данные задачи им доказана однозначная разрешимость. Более того, для общего уравнения второго порядка теорема о разрешимости имеет такой же вид, как и для задачи в $W_2^1(D)$: набор собственных значений с учетом кратности совпадает, совпадают и соответствующие им собственные подпространства.

Основные задачи этот подход решает. Но в такой постановке сразу в определении **необходима гладкость границы** (взаимно однозначное соответствие между точкой границы и точкой "параллельной границе" поверхности устанавливается с помощью нормали).

Пространство s -мерно непрерывных функций

Следующим этапом в изучении этого вопроса явилось введение пространства $(n - 1)$ -мерно непрерывных функций, являющихся, как мы сейчас увидим, естественным обобщением непрерывных функций. Эти функции имеют следы на любом замкнутом множестве положительной $(n - 1)$ -меры Хаусдорфа.

Наводящие соображения; обозначения. Рассмотрим множество неотрицательных (борелевских) мер в $\mathbf{R}_n$ с носителями в $\bar{Q}$; обозначим этот конус через $\mathcal{M}_0$.

Эквивалентное определение непрерывности.

Функция ν непрерывна (равномерно) в $\bar{Q} \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_0, \mu(\mathbf{R}_n) = 1, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}_0, \nu(\mathbf{R}_n) = 1,$$

$\forall \phi$ неотрицательной меры в $\mathbf{R}_{2n}$: $\forall$ борелевского $G \subset \mathbf{R}_n$

$$\phi(G \times \mathbf{R}_n) = \mu(G), \phi(\mathbf{R}_n \times G) = \nu(G), \quad \int \int_{\mathbf{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta,$$

справедлива оценка

$$\int \int_{\mathbf{R}_{2n}} |\nu(x) - \nu(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon^p,$$

Если взять меры μ и ν сосредоточенные в точках (x и, соответственно, y), то единственная $\phi = \mu \otimes \nu$; это означает, что расстояние между этими точками меньше δ , а последнее неравенство – что расстояние между значениями в них функции меньше ϵ .

Легко видеть и справедливость обратного утверждения. Отметим еще, что если в рассмотренном определении взять класс мер $\mathcal{M}_n$, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега, то есть $\forall \mu \in \mathcal{M}_n \iff$

$$\exists C = C(\mu) \forall B_r(x^0) \quad \mu(B_r(x^0)) \leq C r^n,$$

то получим определение пространства $L_p(Q)$; здесь и всюду далее

$$B_r(x^0) = \{y \in \mathbf{R}^n : |y - x^0| \leq r\}.$$

Нас будет интересовать шкала пространств, соединяющих $C(\bar{Q})$ и $L_p(Q)$. Уменьшение класса мер расширяет полученное пространство функций.

Пространство s -мерно непрерывных функций $C_{s,p}(\bar{Q})$ было введено в работе **А.К. Гущин, Матем. сб., 1988, 137(179):1(9).**

Сейчас мы будем рассматривать эквивалентное определение этого понятия содержится в статье **А. К. Гущин, Матем. сб., 2020, том 211, 11.**

Обозначим символом $\mathcal{M}_s$, где $0 \leq s \leq n$, – множество борелевских неотрицательных мер с носителями в $\bar{Q}$, удовлетворяющих оценке

$$\exists C > 0 \forall r > 0 \forall x^0 \in \bar{Q} \quad \mu(B_{x^0}(r)) \leq Cr^s; \quad (3)$$

Точную нижнюю грань постоянных C , с которыми выполнено неравенство (3), будем называть нормой меры μ в $\mathcal{M}_s$ и обозначать $\|\mu\|_s$. Это норма в пространстве зарядов.

Возьмем меры μ и ν из $\mathcal{M}_s : \mu(\bar{Q}) = \nu(\bar{Q}) = 1$. Соединяющей (или сплетающей) их мерой ϕ будем называть неотрицательную (борелевскую) меру ϕ в $\mathbf{R}_{2n}$, проекция которой на первые n переменных равна μ , а на вторые равна ν .

Определение. Функция $v : \bar{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ называется *s-мерно непрерывной со значениями в L_p* и обозначается $v \in C_{s,p}(\bar{Q})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любых единичных мер μ и ν из $\mathcal{M}_s$ и для любой соединяющей их меры ϕ , удовлетворяющей условию

$$\int \int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta, \quad (4)$$

справедлива оценка

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int \int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon^p. \quad (5)$$

Естественно рассматривать функцию из $C_{s,p}(\bar{Q})$ как отображение, ставящее в соответствие каждой мере μ из класса $\mathcal{M}_s$ элемент пространства $L_p(\mu)$.

Соотношение (4) можно интерпретировать как близость мер, а (5) — как близость значений (следов) функции $u(x)$ на мерах μ и ν (вдоль соединяющей их меры ϕ).

На пространстве $C_{s,p}(\bar{Q})$ вводится норма

$$\|u\|_{C_s(\bar{Q})}^p = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_s} \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} |u|^p d\mu(x). \quad (6)$$

Пространство $C_{s,p}(\bar{Q})$ с такой нормой является банаховым.

Пространство непрерывных функций $C(\bar{Q}) = C_{0,p}(\bar{Q})$ плотно в нем; $C_{n,p}(\bar{Q}) = L_p(Q)$. В частности, эквивалентным определением обсуждаемого понятия является пополнение непрерывных функций с нормой (6).

Шкала пространств $C_{s,p}(\bar{Q})$ обладает свойством монотонного возрастания по параметру s с соответствующей оценкой норм.

Множества всех следов функции из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ на гладкой поверхности Γ совпадает с пространством $L_p(\Gamma)$.

Отметим еще одно свойство рассматриваемых пространств.

Следует ли из принадлежности функции пространству

$C_{s,p}(\bar{Q})$, $0 < s < n$, ее принадлежность $L_q(Q)$ с $q > p$? Можно привести пример, показывающий, что для гладкой внутри круга $\{|x| < 1\}$ функции, норма которой в $L_p(\{|x| = r\}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$, это свойство не выполняется. Тем не менее для s -мерно непрерывных функций оно верно. При некотором условии на границу (достаточно $\partial Q \in C^1$) справедлива.

Теорема 1. А.К. Гущин, Матем. сборник, 2020. При $p' \leq p \frac{s'}{s}$ справедливо вложение

$$C_{s,p}(\bar{Q}) \subset C_{s',p'}(\bar{Q}).$$

При $p \leq r \frac{n-1}{n-r}$, $r < n$ справедливо вложение

$$W_r^1(Q) \subset C_{n-1,p}(\bar{Q}).$$

Показатели суммируемости в этих неравенствах точные.

Задача Дирихле в $C_{n-1,p}(\bar{Q})$

Рассмотрим сначала **однородное уравнение**

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in Q. \quad (1_0)$$

Определение. Функция $u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q) \cap C_{s,p}(\bar{Q})$ называется *решением задачи Дирихле* (1_0) , (2) из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$, если она удовлетворяет уравнению в смысле обобщенных функций и ее след на границе равен заданной функции u_0 .
Напомним, что из непрерывности функции внутри области и существования её "предела в L_p " на границе не следует принадлежность её пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q})$.

Обозначим через $\mathcal{S}(x')$ интеграл площадей Лузина функции $v(x) = |u(x)|^{p/2}$:

$$\mathcal{S}(x') = \mathcal{S}(x'; \alpha) = \left[\int_{\Gamma(x'; \alpha)} y_n^{2-n} |\nabla v(y)|^2 dy \right]^{1/2}$$

Обозначим через $\Gamma(x^0) = \Gamma(x^0; \alpha)$ лежащий в области Q открытый усеченный конус фиксированной высоты h_0 с вершиной в $x^0 \in \partial Q$, ось которого направлена по внутренней нормали $\nu(x^0)$; в местной системе координат (начало координат находится в точке x^0 , а ось x_n направлена по нормали $\nu(x_0)$) этот конус описывается неравенствами $0 < x_n < h_0$, $|x'| < \alpha x_n$. Высоту $h_0 = h_0(\alpha, Q)$ (она одинакова для всех $x^0 \in \partial Q$) выберем достаточно малой; в частности, будем считать, что границы конуса и области пересекаются только по вершине x^0 .

Пусть $M(x^0) = M(x^0; u, \alpha) = \sup\{|u(x)| : x \in \Gamma(x^0; \alpha)\}$, $x^0 \in \partial Q$ — некасательная максимальная функция для решения u .

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения непрерывны по Дини на границе. Будем также считать, что граница области принадлежит классу C^1 и нормаль к ней непрерывна по Дини.

Теорема 2. А.К. Гущин, Матем. сб., 2018, том 209, № 6.

Для любой $u_0 \in L_p(\partial Q)$ существует решение из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ задачи Дирихле (1_0) , (2) . Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS &\leq \text{const} \|u\|_{C_{n-1,p}^0(\bar{Q})}^p \leq \text{const} \int_{\partial Q} M^p(x) dS \leq \\ &\text{const} \int_{\partial Q} S^2(x) dS + \text{const} \int_Q |u|^p dx \leq \text{const} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \quad (7) \end{aligned}$$

где постоянные не зависят от u_0 .

Кратко остановимся на неоднородном уравнении (1).

Рассмотрим случай $p = 2$. Будем предполагать, что правая часть $f = g - (\nabla G)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \int_Q r^3(x) \ln^{3/2}(r(x)) |g(x)|^2 dx &< \infty, \\ \int_Q r(x) \ln^{3/2}(r(x)) |G(x)|^2 dx &< \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

где $r(x)$ – расстояние от точки x до границы ∂Q . Граничную функцию $u_0 \in L_2(Q)$.

Теорема 3. А.К. Гущин, В.П. Михайлов, Матем. сб., 1991. Для любого $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и $f = g - (\nabla G)$, удовлетворяющей (8), существует решение u задачи Дирихле для уравнения (1) с граничным значением u_0 . Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u|^2 dx \leq \\ \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_D r^3(x) \ln^{3/2}(r(x)) |g(x)|^2 dx + \\ \int_D r(x) \ln^{3/2}(r(x)) |G(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Более трудным является случай $p \neq 2$.

Сложность заключается в том, что без дополнительных условий на коэффициенты уравнения нельзя утверждать принадлежность решения пространству $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$.

В случае $p > 2$ такое решение может не существовать, а для $p \in (1, 2)$ не справедливо утверждение о единственности. Не помогает и условие гладкости коэффициентов на границе.

Подробнее по этому поводу см. **А. К. Гущин, Матем. сб., 2015, том 206, номер 10.**

Многие из приведенных результатов распространяются и на уравнения с младшими членами, см. **Dumanyan V.Zh., J. Contemp. Math. Anal., 50:4 (2015); Думанян В.Ж., Матем. сб., 202:7 (2011); Думанян В. Ж., ТМФ, 180:2 (2014).**

Сравнение условий разрешимости

Классическое решение $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ является $(n - 1)$ -мерно непрерывным решением.

Условия разрешимости. Граничная функция $u_0 \in C(\partial Q)$. Коэффициенты уравнения a_{ij} удовлетворяют условию Гельдера. Правая часть уравнения f удовлетворяет условию Гельдера. Граница области должна удовлетворять критерию Н.Винера.

Обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ является $(n - 1)$ -мерно непрерывным решением.

Условия разрешимости. Граничная функция $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial Q)$. Коэффициенты измеримы и ограничены. Правая часть $f \in W_2^{1/2}(Q)$. Любая область.

$(n - 1)$ -мерно непрерывное решение

$$u \in W_{2,\text{loc}}^1(Q) \cap C_{n-1,2}(\bar{Q}).$$

Условия разрешимости. Граничная функция $u_0 \in L_2(\partial Q)$.

Коэффициенты уравнения a_{ij} измеримы, ограничены и непрерывны по Дини на границе. (Отказаться от него нельзя).

Правая часть f принадлежит весовому $W_2^{-1/2}(Q)$ – удовлетворяет условию (8). Нормаль к границе непрерывна по Дини. По-видимому, это условие может быть существенно ослаблено. Но для этого нужны новые идеи; по-видимому, необходим аналог метода Пуанкаре - Перрона.

Свойство внутренней непрерывности решения

Можно ли расширить класс мер?

Теорема 1 остается справедливой, если потребовать, чтобы рассматриваемые меры были мерами Карлесона:

$$\exists C > 0 \forall r > 0 \forall x^0 \in \partial Q \quad \mu(B_{x^0}(r)) \leq Cr^s; \quad (3')$$

Тогда $u \in C(Q)$. Но больше расширить класс конечных мер нельзя.

Теорема 4. А.К. Гущин, ТМФ, 2013. Оценка

$$\int_{\bar{Q}} |u(x)|^p d\mu(x) \leq \text{const} \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS$$

справедлива для всех $u_0 \in L_p(\partial Q)$ тогда и только тогда, когда мера μ является мерой Карлесона.

Для аналитических функции с граничным значением u_0 эта теорема была доказана в работе **L. Carleson, 1962**. Для гармонических функций этот результат был установлен в работе **L. Hormander, 1967**.

Обобщение свойства непрерывности по Гёльдеру

Следующее направление исследований было порождено изящными работами Э. Де Джорджи и Дж. Нэша о внутренней гёльдеровой непрерывности решений уравнения (1₀), **De Giorgi E., 1957; Nash J., 1958.**

Какими промежуточными свойствами между принадлежностью $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и $C_{\text{loc}}^\alpha(Q)$ обладает решение уравнения (1₀)? Есть ли среди них те, которые не вытекают из крайних?

Есть. И они получаются в терминах интеграла из (5):

$$\int \int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} |v(x) - v(y)|^p d\Phi(x, y),$$

но с неограниченной мерой Φ . По этому поводу см.

А.К. Гуцин, Сиб. матем. журнал, 46:5 (2005); ТМФ, 157:3 (2008).