

Разностный аналог оператора Ламе

А.Е. Миронов
совместно с Г.С. Маулешовой

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

50 лет конечнозонному интегрированию
16–18 сентября 2024 г., МИАН им. В.А. Стеклова, г. Москва

"Похожие" операторы

$$L_4 = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_3 x,$$

$$\tilde{L}_4 = (T + (\alpha_3 n^3 + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)T^{-1})^2 + g(g+1)\alpha_3 n,$$

Оператор

$$\tilde{L}_2 = \left(T - \frac{\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}} \right)^2 - c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

где

$$F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

коммутирует с

$$\tilde{L}_3 = \tilde{L}_2(T + U_n) - \gamma_{n+2}T - (\sqrt{F_1(\gamma_n)} + U_n\gamma_n).$$

"Дискретизация" оператора Ламе

$$L_2 = -\partial_x^2 + g(g+1)\wp(x+\omega), \quad \Lambda = \{2\omega\mathbb{Z} + 2\omega'\mathbb{Z}\}$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \left(-2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon) \right) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon), \quad g=1.$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{2} \left(\zeta(\varepsilon) + \zeta(3\varepsilon) + \zeta(x-2\varepsilon) - \zeta(x+2\varepsilon) \right) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon), \quad g=2.$$

Можно ли "расширить" коммутирующие дифференциальные операторы

$$L_n = \partial_x^n + u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \dots + u_0(x), \quad L_m = \partial_x^m + v_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \dots + v_0(x)$$

до коммутирующих разностных операторов

$$\tilde{L}_n = \frac{T_\varepsilon^n}{\varepsilon^n} + \tilde{u}_{n-1}(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} + \dots + \tilde{u}_0(x, \varepsilon),$$

$$\tilde{L}_m = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + \tilde{v}_{m-1}(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + \tilde{v}_0(x, \varepsilon),$$

$T_\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon)$ с сохранением спектральной кривой, со свойством

$\mathcal{A}_q = \mathcal{A}(\varepsilon)$ и

$$\tilde{L}_n = L_n + O(\varepsilon), \quad \tilde{L}_m = L_m + O(\varepsilon)?$$

В случае операторов ранга 1 такое расширение возможно.

Спектральные данные Кричевера:

$$\tilde{S} = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1 + \dots + \gamma_g\}, \quad f(P) \rightarrow L_f$$

Спектральные данные для разностных операторов:

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1 + \dots + \gamma_g, p(x, \varepsilon)\}, \quad p(x, \varepsilon) \in \Gamma$$

Если $p(x, \varepsilon) \rightarrow q$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\tilde{L}_f = L_f + O(\varepsilon).$$

$$L_n = \partial_x^n + u_{n-1}(x)\partial_x^{n-1} + \dots + u_0(x), \quad L_m = \partial_x^m + v_{m-1}(x)\partial_x^{m-1} + \dots + v_0(x)$$

Лемма (Burchnall, Chaundy)

Если $L_n L_m = L_m L_n$, то существует полином $Q(z, w) \not\equiv 0$ такой, что $Q(L_n, L_m) = 0$.

Пример 1:

$$L_2 = \partial_x^2 - \frac{2}{x^2}, \quad L_3 = \partial_x^3 - \frac{3}{x^2}\partial_x + \frac{3}{x^3},$$

$$L_2^3 = L_3^2, \quad Q(z, w) = z^3 - w^2.$$

Спектральная кривая

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : Q(z, w) = 0\}.$$

Если $L_n\psi = z\psi$, $L_m\psi = w\psi$, то $(z, w) \in \Gamma$.

Ранг

$$l = \dim\{\psi : L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi\}.$$

Пример 2

$$L_4 = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + g(g+1)x, \quad L_{4g+2}$$

$$\Gamma : w^2 = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0.$$

Функция Бейкера–Ахиезера

Спектральные данные

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_g\}$$

Существует единственная функция $\psi(x, P)$, $P \in \Gamma$ свойствами

1. $\psi = e^{kx}(1 + \frac{\xi(x)}{k} + \dots)$
2. На $\Gamma \setminus \{q\}$ ψ имеет простые полюсы в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Пусть $f(P)$ — мероморфная функция на Γ с единственным полюсом в q порядка n .

$$f = k^n + c_{n-1}k^{n-1} + \dots + c_0 + \frac{c_{-1}}{k} + \dots$$

$$\partial_x^n \psi = k^n e^{kx} (O(1)),$$

$$\partial_x^n \psi - f\psi = k^{n-1} e^{kx} (u_{n-1}(x) + O(\frac{1}{k})),$$

$$\partial_x^n \psi + u_{n-1}(x) \partial_x^{n-1} \psi - f\psi = k^{n-2} e^{kx} (u_{n-2}(x) + O(\frac{1}{k})),$$

$$\partial_x^n \psi + u_{n-1}(x) \partial_x^{n-1} \psi + \dots + u_0(x) \psi = f\psi + e^{kx} (O(\frac{1}{k})).$$

Из единственности функции Бейкера–Ахиезера следует, что

$$L_n \psi(x, P) = f(P) \psi(x, P).$$

Пусть $g(P)$ — мероморфная функция на Γ с единственным полюсом в q порядка m , тогда

$$L_m \psi(x, P) = g(P) \psi(x, P).$$

Имеем

$$(L_n L_m - L_m L_n) \psi = 0 \Rightarrow L_n L_m = L_m L_n.$$

Пример 3

$$\Gamma = \mathbb{C}/\{2w\mathbb{Z} + 2w'\mathbb{Z}\}, \quad q = 0,$$

$$\psi = e^{-x\zeta(z)} \frac{\sigma(z+x)}{\sigma(x)\sigma(z)},$$

$$(\partial_x^2 - 2\wp(x))\psi(x, z) = \wp(z)\psi(x, z),$$

$$(\partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x))\psi(x, z) = \frac{1}{2}\wp'(z)\psi(x, z).$$

Коммутирующие дискретные операторы

$$L_k = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n) T^j, \quad L_m = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n) T^j,$$
$$Tf(n) = f(n+1), \quad f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Коммутативное кольцо дискретных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой с t полюсами. Такие операторы называются *t -точечными операторами*.

Спектральные данные для двухточечных операторов ранга 1 были найдены И. М. Кричевером и Д. Мамфордом. Собственные функции двухточечных операторов ранга 1 (функции Бейкера–Ахиезера) могут быть найдены явно через тэта–функцию спектральных кривых. Спектральные данные для одноточечных операторов ранга $l > 1$ были получены И. М. Кричевером и С. П. Новиковым.

Одноточечные операторы ранга один

Возьмем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_g, q, k^{-1}, p_n\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ , $q \in \Gamma$ — фиксированная точка, k^{-1} — локальный параметр около q , $p_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$ — набор точек в общем положении.

Теорема (Маулешова, М.)

Существует единственная функция (функция Бейкера–Ахиезера)

$\psi_n(P)$, $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \Gamma$, который имеет следующие свойства.

1. $\psi_0(P) = 1$.

2. Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + p_1 + \dots + p_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq, \quad n \geq 0,$$

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) - p_{-1} - \dots - p_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq, \quad n < 0.$$

3. В окрестности q функция ψ имеет вид

$$\psi = k^n + O(k^{n-1}).$$

Для мероморфной функции $g(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка m в q с разложением $g(P) = k^m + O(k^{m-1})$ существует единственный разностный оператор $\tilde{L}_m$ такой, что $\tilde{L}_m \psi = z\psi$.

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ , заданную уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0,$$

$g = \infty$. Пусть $\psi_n(P)$ — соответствующая функция Бейкера–Ахиезера. Тогда существуют коммутирующие операторы $\tilde{L}_2, \tilde{L}_{2g+1}$ такой, что

$$\tilde{L}_2\psi = ((T + U_n)^2 + W_n)\psi = z\psi, \quad \tilde{L}_{2g+1}\psi = w\psi.$$

Теорема (Маулешова, М.)

Имеет место равенство

$$\tilde{L}_2 - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi(n, P))(T - \chi(n, P)),$$

где

$$\chi = \frac{\psi(n+1, P)}{\psi(n, P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n},$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \dots + \delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции U_n, W_n, S_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + (z - U_n^2 - W_n)Q_n Q_{n+1}.$$

Следствие

Функция $S_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(U_n + U_{n+1})(S_n - S_{n+1}) - (z - U_n^2 - W_n)Q_n + (z - U_{n+1}^2 - W_{n+1})Q_{n+2} = 0.$$

Теорема (Маулешова, М.)

В случае эллиптической спектральной кривой Γ , заданной уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

оператор $\tilde{L}_2$ вида

$$\tilde{L}_2 = (T + U_n)^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -\frac{\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

γ_n — произвольный функциональный параметр, коммутирует с некоторым оператором

$$\tilde{L}_3 = \tilde{L}_2(T + U_n) - \gamma_{n+2}T - (\sqrt{F_1(\gamma_n)} + U_n\gamma_n).$$

Примеры:

1. $L_2^{\sharp} = (T + r_1 \cos(n))^2 + \frac{r_1^2 \sin(g) \sin(g+1)}{2 \cos^2(g+\frac{1}{2})} \cos(2n), \quad r_1 \neq 0.$

2. $L_2^{\checkmark} = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_0)^2 - g(g+1) \alpha_2^2 n^2, \quad \alpha_2 \neq 0.$

3. $L_2 = (T + \beta_1 a^n)^2 + \frac{a^{2g} + a^{2g+2} - a^{4g+2} - 1}{(a^{2g+1} + 1)^2} \beta_1^2 a^{2n}, \quad \beta_1 \neq 0, \quad a \neq 0.$

Возьмем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, p(x, \varepsilon)\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ , $q \in \Gamma$ — фиксированная точка, $p(x, \varepsilon) \in \Gamma$ — гладкое семейство точек такое, что $p(x, 0) = q$. Предположим, что координата точки $p(x, \varepsilon)$ имеет вид

$$k^{-1}(p) = \varepsilon + \varepsilon^2 p_2(x) + \dots$$

Теорема

Существует единственная мероморфная функция $\chi(x, \varepsilon, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.

1. Дивизор нулей и полюсов χ имеет вид

$$(\chi) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) + p(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon) - q,$$

$$\gamma(x, \varepsilon) = \gamma_1(x, \varepsilon) + \dots + \gamma_g(x, \varepsilon), \text{ причем } \gamma(0, \varepsilon) = \gamma.$$

2. В окрестности q функция χ имеет разложение

$$\chi = k + O(1).$$

3. $\chi = \frac{1}{\varepsilon} + O(1)$.

Пусть $f(P)$ — мероморфная функция на Γ с единственным полюсом порядка m в q . Тогда существует единственный разностный оператор

$$\tilde{L}(f) = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + \tilde{u}_{m-1}(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + \tilde{u}_0(x, \varepsilon)$$

такой, что

$$\tilde{L}(f) - f(P) = L^*(f) \left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, \varepsilon, P) \right),$$

где $L^*(f)$ — некоторый разностный оператор порядка $m-1$, коэффициенты которого — функции от x и P . Для другой мероморфной функции $g(P)$ с единственным полюсом в q операторы $L(f)$ и $\tilde{L}(g)$ коммутируют. Причем

$$L(f) = u_m(x) \partial_x^m + u_{m-1}(x) \partial_x^{m-1} + \dots + u_0(x) + O(\varepsilon).$$

Пример 4

Пусть $\Gamma = \mathbb{C}/\Lambda$ — эллиптическая кривая, $\Lambda = \{2n\omega + 2m\omega', n, m \in \mathbb{Z}\}$.

$$\chi(x, z) = \zeta(z) - \zeta(z - \gamma(x, \varepsilon)) - \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) + \zeta(p(x, \varepsilon)),$$

где $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса, $p(x, \varepsilon) = \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon)$. Тогда

$$\tilde{L}_2\psi = \left(\left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} + U(x, \varepsilon) \right)^2 + W(x, \varepsilon) \right) \psi = \wp(z)\psi,$$

где

$$U(x, \varepsilon) = \zeta(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) - \zeta(\gamma(x, \varepsilon)) - \zeta(p(x, \varepsilon)),$$

$$W(x, \varepsilon) = -\wp(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) - \wp(\gamma(x, \varepsilon)),$$

$\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Предположим, что функция $\gamma(x, \varepsilon)$ имеет разложение

$$\gamma(x, \varepsilon) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)\varepsilon + \alpha_2(x)\varepsilon^2 + \dots,$$

тогда

$$p(x, \varepsilon) = \alpha'_0(x)\varepsilon + (\alpha'_1(x) + \frac{\alpha''_0(x)}{2})\varepsilon^2 + \dots$$

Положим для простоты $\alpha_0(x) = x, \alpha_1(x) = \text{const}$. Тогда

$$U(x, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad W(x, \varepsilon) = -2\wp(x) + O(\varepsilon),$$

$$\tilde{L}_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Таким образом оператор $\tilde{L}_2$ переходит в оператор Ламе при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть a_j, b_j , $j = 1, \dots, g$ — базис циклов на Γ с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис нормированных абелевых дифференциалов $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$.

Многообразие Якоби

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g\}, \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ji} = \int_{b_i} \omega_j.$$

Тэта-функция

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n^t \Omega n + 2\pi i n^t z).$$

$$\theta(z + n) = \theta(z), \quad n \in \mathbb{Z}^g,$$

$$\theta(z + \Omega m) = \exp(-\pi i m^t \Omega m - 2\pi i m^t z) \theta(z), \quad m \in \mathbb{Z}^g.$$

Двухточечные операторы ранга один ($p_n = p$)

$$w^2 = z^{2g+2} + c_{2g+1}z^{2g+1} + \dots + c_0, \quad p = +\infty, \quad q = -\infty.$$

Теорема (И.М. Кричевер)

Функции $\psi_k(P)$ имеют вид

$$\psi_k(P) = a_k \exp \left(k \int_{P_0}^P \Omega \right) \frac{\theta(A(P) + kU + \zeta)}{\theta(A(P) + \zeta)}, \quad a_k = \text{const},$$

и удовлетворяют разностному уравнению

$$c_{k+1}\psi_{k+1} + v_k\psi_k + c_k\psi_{k-1} = z\psi_k,$$

где

$$v_k = \frac{d}{dk} \log \frac{\theta((k-1)U + \zeta)}{\theta(kU + \zeta)},$$
$$c_k = \frac{\theta((k+1)U + \zeta)\theta((k-1)U + \zeta)}{\theta^2(kU + \zeta)}.$$

Пример 5

Если в примере 4 положит $\gamma(x, \varepsilon) = x - \varepsilon$, тогда

$$\chi(x, z) = \zeta(z) - \zeta(z - x + \varepsilon) - \zeta(x) + \zeta(\varepsilon),$$

$$L_2 = \left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon^2} + U(x, \varepsilon) \right)^2 + W(x, \varepsilon),$$

где

$$U(x, \varepsilon) = -\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x),$$

$$W(x, \varepsilon) = -\wp(x) - \wp(x - \varepsilon),$$

$\zeta(z)$, $\wp(z)$ — функции Вейерштрасса.

$$\tilde{L}_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим функцию $A_g(x, \varepsilon)$, определенную следующим образом.
Положим

$$A_1 = -2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon)$$

и

$$A_2 = -\frac{3}{2}(\zeta(\varepsilon) + \zeta(3\varepsilon) + \zeta(x - 2\varepsilon) - \zeta(x + 2\varepsilon)).$$

Далее, для нечетных $g = 2g_1 + 1$, положим

$$A_g = A_1 \prod_{k=1}^{g_1} \left(1 + \frac{\zeta(x - (2k+1)\varepsilon) - \zeta(x + (2k+1)\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k+1)\varepsilon)} \right),$$

и для четных $g = 2g_1$, положим

$$A_g = A_2 \prod_{k=2}^{g_1} \left(1 + \frac{\zeta(x - 2k\varepsilon) - \zeta(x + 2k\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k-1)\varepsilon)} \right).$$

Теорема (Маулешова, М.)

Оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A_g(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon)$$

коммутирует с L_{2g+1} . Более того,

$$L_2 = \partial_x^2 - g(g+1)\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Пусть ω_{pq} — мероморфная 1-форма такой, что

$$\operatorname{Res}_p \omega_{pq} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \operatorname{Res}_q \omega_{pq} = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \int_{a_i} \omega_{pq} = 0, \quad p = p(x, \varepsilon).$$

Отображение Абеля $A : \Gamma \rightarrow J(\Gamma)$

$$A(P) = \left(\int_q^P \omega_1, \dots, \int_q^P \omega_g \right).$$

Пусть $\zeta = A(\gamma) + \mathcal{K} = A(\gamma_1) + \dots + A(\gamma_g) + \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — вектор римановых констант. Пусть $V(x, \varepsilon)$ — решение разностного уравнения

$$\frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_b \omega_{pq} = V(x + \varepsilon, \varepsilon) - V(x, \varepsilon), \quad V(0, \varepsilon) = 0,$$

$\int_b \omega_{pq}$ — вектор b -периодов, составленный из $\int_{b_j} \omega_{pq}$. Тогда

$$\chi = \exp \left(\varepsilon \int_{P_0}^P \omega_{pq} \right) \frac{\theta(A(P) + V(x + \varepsilon) + \zeta) \theta(V(x) + \zeta)}{\theta(A(P) + V(x) + \zeta) \theta(V(x + \varepsilon) + \zeta) \xi},$$

где $\xi = \xi(x, \varepsilon)$ — нормировочный коэффициент.

Теорема (Маулешова, М.)

Имеют место разложения

$$U(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad W(x, \varepsilon) = -2\partial_x^2 \log(\theta(Bx + \zeta)) + c$$

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\partial_x^2 \log(\theta(Bx + \zeta)) + c + O(\varepsilon)$$

Выберем следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, q, k^{-1}, K_n, \xi_0(n), \gamma, \alpha\},$$

где Γ Риманова поверхность рода g , $q \in \Gamma$ — фиксированная точка, k^{-1} — локальный параметр около q , $K_n \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}$ — набор точек общего положения, $\xi_0(n) = (\xi_0^1(n), \dots, \xi_0^{l-1}(n), 1)$, при $n > 0$, $\xi_0(n) = (1, \xi_0^2(n), \dots, \xi_0^l(n))$, при $n < 0$, $\xi_0^j(n)$ — функции от n , для простоты предположим, что $\xi_0^j(n) \neq 0$, $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{lg}$ — дивизор ($\gamma_j \in \Gamma$ находятся в общем положении), α — набор векторов

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{lg}, \quad \alpha_j = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,l-1}).$$

Пара (γ, α) называется *параметры Тюринга*, (γ, α) определяет полустабильное голоморфное расслоение над Γ с голоморфными сечениями $\eta_1, \dots, \eta_l$. Точки $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$ — являются точками линейной зависимости сечений, при этом

$$\eta_l(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_{j,i} \eta_j(\gamma_k), \quad k = 1, \dots, lg.$$

Теорема (Маулешова, М.)

Существует единственная векторная функция

$\psi(n, P) = (\psi_1(n, P), \dots, \psi_l(n, P))$, которая удовлетворяет следующим свойствам.

1. В окрестности точки q функция $\psi(n, P)$ имеет вид

$$\psi(n, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\xi_s(n)}{k^s} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^n,$$

$$\xi_s(n) = (\xi_s^1(n), \dots, \xi_s^l(n)).$$

2. Вектор-функция $\psi(n, P)$ имеет gl простых полюсов в $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$ такой, что

$$\text{Res}_{\gamma_i} \psi_j = \alpha_{i,j} \text{Res}_{\gamma_i} \psi_l.$$

3. Пусть $n > 0$ и пусть $n = lm + s$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < s \leq l$, ψ имеет простой ноль в $K_1, \dots, K_m$

$$\psi(K_p) = 0, \quad 1 \leq p \leq m,$$

дополнительно $\psi_1, \dots, \psi_s$ имеют простые нули в K_{m+1}

Пример 6

Оператор

$$L_4 = T^4 + 2n^2T^3 + \frac{3}{2}(n-1)n(n^2-n-2)T^2 + \frac{1}{2}(n-2)n^2(n^3-4n^2-n+10)T + \\ \frac{1}{16}(n-3)(n-2)(n-1)n(n(n-3)-4)((n-3)n-6)$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^6 + (3n^2 + 6n + 8)T^5 + \frac{1}{4}(n(n+1)(32 + 15n(n+1)) - 6)T^4 + \\ \frac{1}{2}n^2(n^2-2)(5n^2+7)T^3 + \frac{1}{16}(n-2)(n-1)n(n+1)((n-1)n(15(n-1)n-38)-36)T^2 + \\ \frac{1}{16}(n-2)^2n^2(12 + (n-2)n((n-2)n-5)(3(n-2)n-11))T + \\ \frac{1}{64}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)((n-3)n-6)((n-4)(n-3)n(n+1)-6).$$

Спектральная кривая пары L_4, L_6 задается уравнением

$$w^2 = \frac{1}{4}z^2(32z-3)^2.$$