

Об уравнениях изомонодромных деформаций дифференциальных систем, регулярных и иррегулярных.

Бабич М.В.

ПОМИ, СПбГУ

14 сентября 2024 г.

О цели доклада.

Цель исключительно методическая, речь о способе изложения теории уравнений Пенлеве.

Предлагается схема, позволяющая получить все шесть уравнений и их основные свойства на лекциях, скажем, за семестр.

Причём со всеми доказательствами утверждений, без ограничений на параметры и без заклинания: “Опуская вычисления, получим...”.

... Оставив, однако: “Прямой проверкой убеждаемся...”:)

Основные положения:

- “Из уравнений Пенлеве следует Изомонодромность”
– теория прозрачна и не громоздка.
- “Из Изомонодромности следуют уравнения Пенлеве”
– это верно лишь отчасти, в случае общего положения параметров. Теория и сложна и громоздка.

Причина возникновения трудностей.

Бывают формы деформации, например $\Omega =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2t}{1-t^2} & 0 \end{pmatrix} \frac{d(z+t)}{z+t} + \begin{pmatrix} 0 & -6t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{dz}{z} + \begin{pmatrix} 2 & 3+3t \\ \frac{1}{t+1} & -1 \end{pmatrix} \frac{d(z-1)}{z-1} + \\ + \begin{pmatrix} -3 & -3+3t \\ \frac{1}{t-1} & 2 \end{pmatrix} \frac{d(z+1)}{z+1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-2t}{1-t^2} & 0 \end{pmatrix} \frac{dt}{z+t}} = Adz + Bdt,$$

которые совершенно не затрагивает переход

“Пенлеве” $\longrightarrow$ “Изомонодромия”, хотя и рушат переход
“Изомонодромия” $\longrightarrow$ “Пенлеве”.

Это изомонодромная деформация той же дифференциальной системы, что соответствует PVI с параметрами $(9/2, 1/2, 25/2, 2)$, но деформация другая. Дело в том, что, в некоторых случаях, деформаций, не меняющих монодромию, больше чем в случае общего положения. Те деформации, что есть в случае общего положения (Пенлеве), для этой Adz тоже есть.

Предлагается:

При знакомстве с теорией уравнений Пенлеве – их получении-выводе, полностью отказаться от перехода “Изомонодромия” $\longrightarrow$ “Пенлеве”. Сообщив, не вдаваясь в детали, что в случае общего положения, возможен и обратный переход.

Обратную же задачу монодромии и метод задачи Римана излагать потом, отдельно – как наиболее мощный метод исследования уже имеющихся уравнений, к тому времени уже оснащённых и лаксовой парой и гамильтоновой теорией.

Это тем более логично, что, если встать на точку зрения “уравнения Пенлеве это нелинейные спецфункции”, то большинству учёных уравнения Пенлеве нужны как инструмент, а вовсе не как объект исследования.

Преимущества:

Простая логика – “односторонняя импликация”.

Можно убрать громоздкие вычисления и многие мутные спекуляции, заменив их, где хочется, трюком “Догадаемся-и-проверим”.

Я никогда этим не интересовался, поэтому сказать могу только по чьим статьям учился именно я, исторические ссылки есть там. Список будет в конце, чтобы не отвлекаться.

Структура доклада.

Сначала максимально подробно изложить фуксов случай (PVI) – это основа, фундамент.

Для нефуксова случая доказать, что для постоянства обобщённой монодромии достаточно рациональности формы деформации. Потом просто проверить окончательные формулы.

Ну и, “на пальцах”, объяснить как можно было до всего этого догадаться – какие формальные манипуляции дают ответ, который проверяется.

- Истинная монодромия. Группа монодромии. Форма деформации.
- Фуксов случай, система PVI:
 - 1 Анзац Шлезингера. Уравнения Шлезингера на $\prod_k \mathcal{O}^{(k)}$.
 - 2 Гамильтонова структура уравнений Шлезингера.
 - 3 Симплектическая редукция. Проекция уравнений $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} \xrightarrow{\pi} \prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
 - 4 Координатизация $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
 - 5 Уравнение PVI.
 - 6 Выбор сечения $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\pi^{-1}} \prod_k \mathcal{O}^{(k)}$ и симметрии PVI.

Содержание (продолжение):

■ Нефуксов случай. Системы $PV-PI$:

- 1 Кратные полюсы у дифференциальной системы и истинная монодромия.
- 2 Эффект Стокса, понятие “обобщённой монодромии”.
- 3 Постоянство обобщённой монодромии – следствие рациональности формы деформации.
- 4 Формы деформации для $PV-PI$, как можно до них догадаться – последовательное вырождение формы деформации PVI . Проверка.
- 5 Гамильтонова теория одной иррегулярной особой точки – урезанная группа петель и алгебра Такиффа.
- 6 Симплектическая редукция к (гамильтоновым) системам $PV-PI$.

Истинная монодромия. Форма деформации.

Рассмотрим уравнение $d_z \Psi = A dz \Psi$, где матрица $A = A(z)$ рациональна. Выбросим из $\overline{\mathbb{C}}_z$ систему разрезов l_k , соединяющих полюсы.

На разных берегах разреза $\Psi_-(z) = \Psi_+(z) M_{+-}^{(k)}$, $z \in l_k$, так как любые два решения отличаются постоянным правым множителем.

Введём параметр $t \in [0, 1]$. Разрезы превратятся в “плёнки” $l_k \times [0, 1]$, в окрестности каждой из которых есть два решения $\Psi_-(z, t)$ и $\Psi_+(z, t) M_{+-}^{(k)}(t)$.

Условие сшивки $d_t \Psi_- \Psi_-^{-1} = d_t \Psi_+ \Psi_+^{-1} =: B$ и есть условие постоянства монодромии $M_{+-}^{(k)}(t) = \text{const}_k$.

Мы получили 1-форму деформации, основной объект всей теории: $\Omega = A dz + B dt$.

Фуксов случай. Анзац Шлезингера.

Рассмотрим $d\Psi/dz = \sum_k A^{(k)} \frac{1}{z-z_k} \Psi$,

в окрестности $z \sim z_k$: $d_z \Psi = \left(\frac{A^{(k)} dz}{z-z_k} + O(1) \right) \Psi$.

Сингулярная часть зависит только от разности $z - z_k$,
попытаемся и решение искать с симметричной

(локально!!) зависимостью: $d\Psi = \left(A^{(k)} \frac{dz - dz_k}{z - z_k} + O(1) \right) \Psi$.

Просуммируем и волюнтаристски(!) выбросим $O(1)dz_k$:

$$d\Psi = \sum_k A^{(k)} \frac{dz - dz_k}{z - z_k} \Psi.$$

Условие совместности, то есть $d^2\Psi = 0$ даёт
динамическую систему на $A^{(k)}$, знаменитую систему
Шлезингера, систему уравнений на вычеты $A^{(k)}$.

Уравнения Шлезингера на $\mathcal{O}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{O}^{(4)} =: \prod_k \mathcal{O}^{(k)}$

$$dA^{(k)} + \left[A^{(k)}, \sum_{i \neq k} A^{(i)} \frac{dz_k - dz_i}{z_k - z_i} \right] = 0$$

Сразу видно, что сопряжённый класс $A^{(k)}$ сохраняется, так как $dA^{(k)} = [A^{(k)}, *]$, следовательно $A^{(k)}$ на орбите $\mathcal{O}^{(k)}$ (ко)присоединённого действия линейной группы, лежит в симплектическом пространстве.

Строим гамильтонову теорию.

Гамильтонова структура уравнений Шлезингера.

Проверка показывает, что гамильтониан динамики по “времени” z_k это

$$H_k = \text{tr } A^{(k)} \sum_{i \neq k} A^{(i)} \frac{1}{z_k - z_i}.$$

Симплектическая редукция. Проекция уравнений с $\prod_k \mathcal{O}^{(k)}$ на $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

Заметим, что гамильтониан не зависит от одновременного сопряжения всех $A^{(k)}$ одной матрицей, пусть и зависящей от z_k , то есть от диагонального действия $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Гамильтонову систему можно спроецировать на фактор-пространство $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} / \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
Отображение момента это $\sum_k A^{(k)}$ – полный вычет дифференциала $\mathrm{Ad}z$. Он (вычет) постоянен, равен нулю. Получаем систему с теми же гамильтонианами, но на другом симплектическом пространстве:

$$\mathcal{O}^{(1)} \times \dots \times \mathcal{O}^{(4)} \Big|_{\sum_k A^{(k)}=0} / \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) =: \prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

Координатизация $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

В качестве координат можно взять функции (матричные элементы $A_{ij}^{(k)}$) с любого сечения расслоения

$$\prod_k \mathcal{O}^{(k)} \rightarrow \prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

Обычно берут один из $A^{(k)}$ диагональным, и неявно, уравнениями, фиксируют диагональный множитель. Это не оптимальный выбор! Много эффективнее:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

и, на выбор, фиксируем либо недиагональный элемент, либо собственное направление у $A^{(4)}$:

$$(A^{(4)})_{12} = -1, \text{ либо } (A^{(4)})_{11} - (A^{(4)})_{12} = (A^{(4)})_{22} - (A^{(4)})_{21}.$$

Координатизация $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ (продолжение).

Полученные упрощения:

- 1 Симплектическая форма на факторпространстве $\omega^{(1)} + \dots + \omega^{(4)} = \underline{\omega^{(1)}}$ – следим только за одной орбитой, канонические координаты на пространстве $\prod_k \mathcal{O}^{(k)} // \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ это канонические координаты на орбите $\mathcal{O}^{(1)}$.
- 2 Уравнение $\sum_k A^{(k)} = 0$ решается элементарно.

Явный вид сечения, если $A_{12}^{(4)} = -1$.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - pq & q \\ -p(pq - \Delta_1) & \lambda'_1 + pq \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 - q \\ 0 & \lambda'_2 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ a_{21}^{(3)} & \lambda'_3 \end{pmatrix}, A^{(4)} = \begin{pmatrix} -\Sigma_{11} & -1 \\ -\Sigma_{11}\Sigma_{22} + \lambda'_4\lambda_4 & -\Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

тут λ_k, λ'_k это собственные значения $A^{(k)}$, $\Delta_k = \lambda_k - \lambda'_k$ и Σ_{11}, Σ_{22} это суммы соответствующих матричных элементов

$$\Sigma_{11} := -pq + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \Sigma_{22} := pq + \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3,$$

$$a_{21}^{(3)} = p(pq - \lambda_1 + \lambda'_1) - (pq - \sum_j \lambda_j + \lambda_4)(pq + \sum_j \lambda'_j - \lambda'_4) - \lambda'_4\lambda_4.$$

Сечение, если собственное направление λ_4 у $A^{(4)}$ постоянно и равно $(1, -1)^T$.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + pq & p \\ -q(pq + \Delta_1) & -pq + \lambda'_1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & a_{12}^{(2)} \\ 0 & \lambda'_2 \end{pmatrix},$$
$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ a_{21}^{(3)} & \lambda'_3 \end{pmatrix}, \quad A^{(4)} = \begin{pmatrix} -pq - \lambda_\Sigma + \lambda_4 & -pq - \lambda_\Sigma \\ pq + \lambda_\Sigma - \Delta_4 & pq + \lambda_\Sigma + \lambda'_4 \end{pmatrix},$$

$$a_{12}^{(2)} = p(q - 1) + \lambda_\Sigma, \quad a_{21}^{(3)} = pq(q - 1) + \Delta_1 q - \lambda_\Sigma + \Delta_4,$$
$$\lambda_\Sigma := \sum_k \lambda_k, \quad \Delta_k := \lambda_k - \lambda'_k.$$

Гамильтонова система PVI.

Положим $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = t, z_4 = \infty$. Вычислим гамильтониан для сечения $A_{12}^{(4)} = -1$:

$$\begin{aligned} H &:= \frac{\operatorname{tr} A^{(3)} A^{(1)}}{t} + \frac{\operatorname{tr} A^{(3)} A^{(2)}}{t-1} = \frac{1}{t(t-1)} \operatorname{tr} A^{(3)} ((t-1)A^{(1)} + tA^{(2)}) = \\ &= \frac{q(q-1)(q-t)}{t(t-1)} \left(p^2 - p \left(\frac{\Delta_1}{q} + \frac{\Delta_2}{q-1} + \frac{\Delta_3}{q-t} \right) \right) + \\ &\quad + q \frac{\Delta_\Sigma (\Delta_\Sigma - 2\Delta_4)}{4t(t-1)} + *. \end{aligned}$$

Тут “*” не содержит координат p, q – не влияет на уравнения движения.

Уравнение PVI.

Уравнение PVI это уравнение Эйлера-Лагранжа для только что выписанной гамильтоновой системы PVI. Выписав его, убеждаемся, что оно зависит от следующих комбинаций $\Delta_k := \lambda_k - \lambda'_k$ собственных значений $A^{(k)}$:

$$\text{PVI} \left(\frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2} \right).$$

Продemonстрируем, что образующие группы симметрий PVI легко получаются. /На правах рекламы:)/

Преобразование Шлезингера.

Умножение Ψ слева на диагональную матрицу вида

$\begin{pmatrix} \frac{z-z_2}{z-z_3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сохраняет фуксовость системы, поскольку там, где мог бы образоваться полюс 2-го порядка, вычеты в z_2 и z_3 имеют нули:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda'_2 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ * & \lambda'_3 \end{pmatrix},$$

в остальных же точках преобразование регулярно.

Такое действие меняет $\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 + 1$ и $\lambda'_3 \rightarrow \lambda'_3 - 1$. Таким образом мы можем добавлять любые целые числа к Δ_k , с условием, что сумма добавленного чётная.

Преобразование Окамото.

Сосчитаем гамильтониан для второго выбора координатного сечения — когда одно собственное направление у $A^{(4)}$ постоянно:

$$\frac{q(q-1)(q-t)}{t(t-1)} \left(p^2 - p \left(\frac{\Delta_4 - \frac{\Delta_\Sigma}{2}}{q} + \frac{\Delta_2 - \frac{\Delta_\Sigma}{2}}{q-1} + \frac{\Delta_3 - \frac{\Delta_\Sigma}{2}}{q-t} \right) \right) + q \frac{\Delta_\Sigma \Delta_1}{2t(t-1)},$$

тут $\{z_1, z_3, z_4, z_2\} = \{0, 1, \infty, t\}$.

Мы получили то же уравнение, только

$$\Delta_k \rightarrow \Delta_k - \frac{\Delta_\Sigma}{2}$$

— это знаменитое преобразование Окамото.

Перестановка $0 \leftrightarrow \infty$.

В первой нормировке не зависящее от z преобразование $\Psi \rightarrow \text{diag}(1/q, -1)\Psi$ меняет местами $A^{(1)}$ и $A^{(4)}$:

$$\left\{ \frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2} \right\}.$$

Это приводит к преобразованию $q_{\text{new}} = 1/q$.

Перестановка $0 \leftrightarrow 1$.

Преобразование направления первой координатной оси от собственного направления $A^{(2)}$ к собственному направлению $A^{(1)}$ меняет местами $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, а так же преобразует $q_{\text{new}} = 1 - q$,

$$\left\{ \frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2}, \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2} \right\}.$$

Перестановка $1 \leftrightarrow t$.

Тут геометрическая картина туманна. Однако сразу видно, что каноническое на слое $t = \text{const}$ преобразование

$$t = 1/t_{\text{new}}, \quad q = tq_{\text{new}}, \quad p = p_{\text{new}}/t$$

сохраняет вид квадратичной по-“ p ” части дифференциала Hdt :

$$p^2 q(q-1)(q-t) d \log \frac{t}{t-1},$$

но меняют местами корни $q = 1$ и $q = t$:

$$q = 1 \longleftrightarrow 1/t = t_{\text{new}}.$$

Проверка, что и остальные слагаемые, линейные по-“ p ”, в формуле $dH \wedge dt$ тоже сохраняют свою форму элементарна.

Перестановка $1 \leftrightarrow t$ (продолжение).

Сравнивая линейные по-“ p ” члены, убеждаемся:

$$dp \wedge dq - dH(p, q, t; \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \wedge dt = \\ dp_{\text{new}} \wedge dq_{\text{new}} - dH(p_{\text{new}}, q_{\text{new}}, t_{\text{new}}; \Delta_1, \Delta_3 + 1, \Delta_2 - 1, \Delta_4) \wedge dt_{\text{new}}.$$

Это преобразование

$$\left\{ \frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2} \right\} \rightarrow \left\{ \frac{\Delta_4^2}{2}, \frac{\Delta_1^2}{2}, \frac{(\Delta_3 + 1)^2}{2}, \frac{\Delta_2^2}{2} \right\},$$

Замечание. Сдвиги ± 1 в параметрах Δ это следствие явной зависимости от времени преобразования

$$dp \wedge dq = dp_{\text{new}} \wedge dq_{\text{new}} - d(pq) \wedge dt/t.$$

Это, так же, объясняет присутствие “+1” в определении параметра Пенлеве в подвижном полюсе — переставляется с Δ_k^2 , $k = 1, 2, 4$ именно

$$\delta := (\Delta_3 + 1)^2.$$

Нефуксов случай.

Пусть в линейной дифференциальной системе

$$d_z \Psi = A(z) dz \Psi$$

у дифференциала $A(z)dz$ кратные полюсы.

Как деформировать такое уравнение с сохранением монодромии?

Кратные полюсы у дифференциальной системы и истинная монодромия.

Понятие монодромии сохраняется, в частности её постоянство, как и прежде, эквивалентно существованию плоской формы деформации

$$\Omega = Adz + Bdt.$$

Но понятие становится скудным, например изомонодромна вообще любая(!) деформация системы с единственным полюсом – фундаментальная группа тривиальна и, стало быть, постоянна. Аналитически:

$$\partial\Psi(z, t)/\partial z = (A_1(t) + A_2(t)z + \dots + A_n(t)z^{n-1}) \Psi(z, t).$$

$\Psi(z, t) \in GL(N, \mathbb{C})$ – целая функция z , так что положив $B := \Psi_t \Psi^{-1}$, получим и форму деформации:

$$d\Psi = (Adz + Bdt)\Psi.$$

Сведения из Теории Дифф.Уравнений.

Эффект Стокса: $e^z + e^{-z} \sim \begin{cases} e^z, & \Re z > 0 \\ e^{-z}, & \Re z < 0 \end{cases}$ при $z \rightarrow \infty$

— аналитическая в выколотой окрестности функция может иметь разные асимптотики в этой точке.

Такого не бывает у рациональных функций.

Рассмотрим $d\Psi = \left(\frac{A_n}{z^n} + \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} + \dots \right) \frac{dz}{z} \Psi, z \sim 0,$

где собственные значения у A_n разные.

Из Теории Дифф.Уравнений следует, что общее решение имеет асимптотику

$\Psi(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i \exp\{\Lambda(z)\} C_s$, если

$\arg z \in]\theta_0 - \delta + \frac{\pi}{n}s, \theta_0 + \frac{\pi}{n}(s+1)[, s = 0, 1, \dots, 2n.$

Тут $\Lambda(z) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j \frac{z^{-j}}{-j} + \Lambda_0 \ln z$, где все Λ_j диагональны, и все g_i, Λ_j определяются уравнением — от s не зависят.

Множители $C_s C_{s+1}^{-1}$ и являются обобщением матриц монодромии. Они называются множителями Стокса.

Постоянство обобщённой монодромии и рациональность формы деформации.

Пусть $d\Psi = \Omega\Psi$, $\Omega = A dz + B dt$ — форма деформации.

Сравним асимптотики Ψ_t и $B\Psi$:

$$\Psi_t \sim \left(\sum_{i=0}^{\infty} \dot{g}_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i \dot{\Lambda}(z) \right) e^{\Lambda(z)} C_s + \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i e^{\Lambda(z)} \dot{C}_s$$

$$B\Psi \sim B(z) \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i e^{\Lambda(z)} C_s.$$

Ряд в скобках обозначим $\sum \hat{g}_i z^i$. В секторе номер s

$$B(z) \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i \sim \sum_{i=-n}^{\infty} \hat{g}_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^i e^{\Lambda(z)} (\dot{C}_s C^{-1}) e^{-\Lambda(z)}.$$

Если $B(z)$ рационально, то в левой части зависимости от s нет, и слагаемое с $e^{\pm\Lambda(z)}$, экспоненциально растущее при некоторых $z \rightarrow 0$, это ноль: $\dot{C}_s = 0 \forall s$!

Обобщённая монодромия постоянна.

Получение иррегулярных изомонодромных форм деформации вырождением формы Шлезингера.

Имеются предельные переходы формы деформации Шлезингера, дающие конечные рациональные пределы с кратными полюсами. Например при $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\sum_k A^{(k)} \frac{dz - dz_k}{z - z_k} + (-A_1/\epsilon + A_0) \frac{dz - dz_0}{z - z_0} + \frac{1}{\epsilon} A_1 \frac{dz - d(z_0 + \epsilon t)}{z - (z_0 + \epsilon t)} =$$
$$= \sum_k A^{(k)} \frac{dz - dz_k}{z - z_k} + \left(\frac{t A_1}{(z - z_0)^2} + \frac{A_0}{z - z_0} \right) (dz - dz_0) - \frac{A_1}{z - z_0} dt + o(1)$$

Аналогично, полагая

$$z_1 = z_0 + \epsilon t_1, z_2 = z_0 + \epsilon t_1 + \epsilon^2 t_2, z_3 = z_0 + \epsilon t_1 + \epsilon^2 t_2 + \epsilon^3 t_3 \dots$$

и, подбирая соответствующие матричные вычеты

зависящие от параметров t_k и $\epsilon \rightarrow 0$, можно получить

деформационную форму с полюсами любой кратности.

Изомонодромные системы Пенлеве $PV-PI$ можно получить вырождением формы деформации Шлезингера.

Уравнения $PV - PI$ соответствуют изомонодромным деформациям систем с кратными полюсами. Системы эти получаются при различных слияниях нескольких полюсов фуксовой системы PVI .

Предельные переходы дают рациональные формы деформации, соответствующие уравнениям $PV - PI$.

“Результат”, то есть то, что та или иная форма деформации приводит именно к уравнению Пенлеве, можно просто проверить. Поскольку формы деформации рациональны, то эти деформации изомонодромны.

Гамильтонова теория иррегулярной особой точки – урезанная группа петель и её алгебра Ли, алгебра Такиффа.

Фуксовы системы естественно связаны с группой $GL(N, \mathbb{C})$ и её коприсоединённым действием.

Рассмотрим обобщение, группу G_n , элементы которой это матричные полиномы степени не выше n :

$g_0 + g_1 z + \dots + g_n z^n \in G_n$, $\det g_0 \neq 0$, групповая операция – произведение полиномов с отбрасыванием степеней выше n .

Её алгебра Ли (алгебра Такиффа):

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n \in \mathfrak{g}_n$, $\alpha_k \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$. Коалгебра:

$A = (A_n \frac{1}{z^n} + \dots + A_1 \frac{1}{z} + A_0) \frac{dz}{z} \in \mathfrak{g}_n^*$, $A_k \in \mathfrak{gl}^*(N, \mathbb{C})$.

Группа G_n коприсоединённо действует на дифференциалах с кратными полюсами. Спаривание $\langle A, \alpha \rangle = \text{Res } \alpha A$.

Симплектическая редукция к (гамильтоновым) системам PV - PI .

Как и в фуксовом случае, исходное симплектическое пространство это декартово произведение орбит, соответствующих каждой особой точке.

Та же гамильтонова редукция по диагональному действию $GL(2, \mathbb{C})$ на нулевом уровне отображения момента, равном общему вычету, даёт приведённое фазовое пространство.

С ростом порядка полюса соответствующая орбита становится всё сложнее. Сложнее становится и выбор сечения, удобного для канонической параметризации пространства.

Всё менее оправданы трудности для получения и так известного ответа.

По каким работам я всё это изучал, если кому интересно:

Прежде всего японская школа и серия статей М. Jimbo, Т. Miwa, К. Ueno, книга К. Iwasaki, Н. Kimura, S. Shimomura, М. Yoshida, “From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions”, А.В. Китаев и Д.А. Короткин “On solutions of the Schlesinger Equations in Terms of Θ -functions” так же Б.А. Дубровин и М. Mazzocco, “Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations” , работы нашей школы, особенно книга А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, “Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана”, А.А. Болибрух, “Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений”

Разобраться с иррегулярным случаем помогли работы Ph. Boalch и, особенно(!), В.Н. Рубцова и И.Ю. Гаюра.

Thank you!

The End = Конец :)