Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 2. Селективные и неселективные измерения. Унитарная динамика. Генератор ГКСЛ в случае общего положения

Теретёнков Александр Евгеньевич

17 сентября 2024 г.

В прошлой лекции...

С какой вероятностью мы получаем значения? Для этого необходимо разложить

$$X = \sum_x x \Pi_x$$

$$\Pi_x = \sum_{i: x_i = x} |i\rangle\langle i|$$

Вероятность получить значение x наблюдаемой равна

$$\mu_\rho(x) = \mathrm{Tr}\, \Pi_x \rho$$

В частности, если $[X, \rho] = 0$, то получим классический ответ

$$\mu_p(x) = \sum_{i: x_i = x} p_i$$

Наблюдаемые (инструменты)

Селективные измерения (Коллапс волновой функции):
Апостериорное состояние, если прибор показал x

$$\frac{\Pi_x \rho \Pi_x}{\operatorname{Tr} \Pi_x \rho \Pi_x}$$

по предыдущему это состояние возникнет с вероятностью $\operatorname{Tr} \Pi_x \rho \Pi_x$ — проекционный постулат Людерса-фон Неймана.
В случае диагональной матрицы плотности в собственном базисе наблюдаемой получим

$$\frac{p_i}{\sum_{j: x_j = x} p_j}, \qquad \forall i : x_i = x,$$

то есть также как и в классике.

Наблюдаемые (инструменты)

Неселективные измерения (если провели измерение, но не посмотрели на прибор):

$$\sum_x \operatorname{Tr} \Pi_x \rho \Pi_x \frac{\Pi_x \rho \Pi_x}{\operatorname{Tr} \Pi_x \rho \Pi_x} = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

Для диагональных (в базисе наблюдаемой) матриц плотности $\sum_x \Pi_x \rho \Pi_x = \rho$.

Наблюдаемые (инструменты)

В невырожденном случае ($\Pi_x = |i\rangle\langle i|$)

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{2n} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, процесс измерения связан с распадом (стремлением к нулю) когеретностей. Такой процесс называется *декогерентностью* (иногда дефазировкой). В классическом случае (если ρ диагонально) такое неселективное измерение не оказывает влияния. В результате, процесс (чёткого) измерения помимо чисто классического эффекта селекции (отбора) приводит к квантовому влиянию на систему (декогеренции). В вырожденном случае — блочно-диагональный вид.

Динамика

Как задаётся динамика чистых состояний?

Динамика

Уравнение Шрёдингера

$$\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\Psi\rangle$$

мы положим постоянную Планка $\hbar$ равной 1

$$\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = -iH|\Psi\rangle$$

Его решение

$$|\Psi\rangle = e^{-iHt}|\Psi_0\rangle$$

Можно ввести эволюционную матрицу $U_t = e^{-iHt}$. Такая матрица является унитарной. Если разложить $H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$, то $U_t = \sum_i e^{-i\varepsilon_i t}|i\rangle\langle i|$.

Динамика

Как задаётся динамика смешанных состояний?

Динамика

Уравнение фон Неймана

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho]$$

Его решение

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt}$$

Упражнение. Проверить.

Динамика

Динамика в собственном базисе $H = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$
(**Упражнение**. Проверить для матриц 2×2.)

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt} =$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_2)t} & \cdots & \rho_{1n}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_n)t} \\ \rho_{21}e^{-i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)t} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n}e^{-i(\varepsilon_2-\varepsilon_n)t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}e^{-i(\varepsilon_n-\varepsilon_1)t} & \rho_{n2}e^{-i(\varepsilon_n-\varepsilon_2)t} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Динамика

Селективное измерение: получили значение ε_1

$$\rho \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, унитарная динамика не способна описывать процесс селективного измерения энергии и декогеренцию. Кроме того, диагональные элементы матрицы плотности постоянны, поэтому невозможно описывать с помощью унитарной динамики и перенос населённостей. Отметим, также что процесс неселективного измерения являются необратимым.

Динамика

На самом деле верна **теорема Вигнера**: пусть Φ — взаимооднозначное аффинное отображение выпуклого множества матриц плотности, тогда $\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$ или $\Phi(\rho) = U\rho^T U^\dagger$.

Выпуклое множество: выпуклая комбинация $\sum_i p_i\rho_i$ — тоже матрица плотности. Аффинное отображение $\Phi(\sum_i p_i\rho_i) = \sum_i p_i\Phi(\rho_i)$.

Для чистых состояний

- E. P. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Friedr. Vieweg und Sohn Akt.-Ges., 1931 p. 251

Динамика

$$(U_t\rho^T U_t^\dagger)^T = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{i(\varepsilon_1-\varepsilon_2)t} & \dots & \rho_{1n}e^{i(\varepsilon_1-\varepsilon_n)t} \\ \rho_{21}e^{i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)t} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n}e^{i(\varepsilon_2-\varepsilon_n)t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_1)t} & \rho_{n2}e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_2)t} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix} = \\ = U_{-t}\rho U_{-t}^\dagger$$

— обращение времени.

Однако каков смысл действия именно на состояния $\rho(\hat{p}) = \rho(-i\frac{d}{dx})$. $\rho^T(\hat{p}) = \rho(-\hat{p})$ — квантовый аналог отображения Лошмидта $p \to -p$.

Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада

В форме Линдблада:

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \underbrace{\sum_j \left(C_j \rho_t C_j^\dagger - \frac{1}{2} C_j^\dagger C_j \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t C_j^\dagger C_j \right)}_{=\mathcal{D}(\rho_t) \text{ — Диссипатор}}$$

На самом деле можно показать, что достаточно суммировать по j от 1 до $n^2 - 1$.

- Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Math. Phys. – 1976. – Vol. 48, no. 2. – P. 119-130.

Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада

В форме Коссаковского:

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \sum_{i=1,k=1}^{n^2-1} a_{ik} \left([F_i, \rho_t F_k^\dagger] + [F_i \rho_t, F_k^\dagger] \right),$$

где матрица $a = a^\dagger \geqslant 0$.

- Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — P. 821–825.

Упражнение. Показать, что две эти формы эквивалентны.

Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада

Первые уравнения такого вида есть уже в:

- Landau, L. Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik. Z. Physik 45, 430–441 (1927)

Помогает ли нам уравнение ГКСЛ описать декогерентность и перенос?

Пусть $C_{ij} = \sqrt{\gamma_{ij}}|i\rangle\langle j|$, $\gamma_{ij} \geqslant 0$

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(|i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| - \frac{1}{2}|j\rangle\langle j|\rho - \frac{1}{2}\rho|j\rangle\langle j| \right)$$

$$H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$$

Такого вида генераторы ГКСЛ получаются в пределе слабой связи в случае общего положения.

- L. Accardi and S. Kozyrev, Lectures on quantum interacting particle systems, in Quantum Interacting Particle Systems (Trento, 2000), 1195, QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., Vol. 14 (World Scientific, 2002).

Помогает ли нам уравнение ГКСЛ описать декогерентность и перенос?

$$\langle k|[H,\rho]|m\rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle k|[|i\rangle\langle i|,\rho]|m\rangle =$$

$$= \sum_i \varepsilon_i (\delta_{ik}\rho_{im} - \delta_{im}\rho_{ki}) = (\varepsilon_k - \varepsilon_m)\rho_{km}$$

Помогает ли нам уравнение ГКСЛ описать декогерентность и перенос?

$$\langle k|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle = \sum_{ij}\gamma_{ij}\langle k|\left(|i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| - \frac{1}{2}|j\rangle\langle j|\rho - \frac{1}{2}\rho|j\rangle\langle j|\right)|m\rangle =$$

$$= \sum_{ij}\gamma_{ij}\left(\delta_{ik}\rho_{jj}\delta_{im} - \frac{1}{2}\delta_{kj}\rho_{jm} - \frac{1}{2}\rho_{kj}\delta_{jm}\right)$$

Помогает ли нам уравнение ГКСЛ описать декогерентность и перенос?

$$\langle k|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle = \sum_{ij} \gamma_{ij} \langle k| \left(|i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| - \frac{1}{2}|j\rangle\langle j|\rho - \frac{1}{2}\rho|j\rangle\langle j| \right) |m\rangle =$$

$$= \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(\delta_{ik}\rho_{jj}\delta_{im} - \frac{1}{2}\delta_{kj}\rho_{jm} - \frac{1}{2}\rho_{kj}\delta_{jm} \right)$$

$k \neq m$

$$\langle k|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i} \left(\gamma_{ik} + \gamma_{im}\right) \rho_{km}$$

Помогает ли нам уравнение ГКСЛ описать декогерентность и перенос?

$$\langle k|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle = \sum_{ij} \gamma_{ij} \langle k| \left(|i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| - \frac{1}{2}|j\rangle\langle j|\rho - \frac{1}{2}\rho|j\rangle\langle j| \right) |m\rangle =$$

$$= \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(\delta_{ik}\rho_{jj}\delta_{im} - \frac{1}{2}\delta_{kj}\rho_{jm} - \frac{1}{2}\rho_{kj}\delta_{jm} \right)$$

$k \neq m$

$$\langle k|\mathcal{D}(\rho)|m\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{i} \left(\gamma_{ik} + \gamma_{im}\right) \rho_{km}$$

$k = m$

$$\langle k|\mathcal{D}(\rho)|k\rangle = \sum_{j} \gamma_{kj}\rho_{jj} - \left(\sum_{i} \gamma_{ik}\right) \rho_{kk}$$

Помогает ли нам уравнение ГКСЛ описать декогерентность и перенос?

В результате получаем уравнение Паули для населённостей

$$\frac{d}{dt}\rho_{kk} = \sum_j \gamma_{kj}\rho_{jj} - \left(\sum_i \gamma_{ik}\right)\rho_{kk}$$

и динамику когерентностей

$$\frac{d}{dt}\rho_{km} = \left(-i(\varepsilon_k - \varepsilon_m) - \frac{1}{2}\sum_i (\gamma_{ik} + \gamma_{im})\right)\rho_{km}$$

Таким образом, мы получили возможность описывать как перенос, так и декогерентность.

Декогерентность и спектроскопия

$$\frac{d}{dt}\rho_{km} = \left(-i(\varepsilon_k - \varepsilon_m) - \frac{1}{2}\sum_i (\gamma_{ik} + \gamma_{im})\right)\rho_{km}$$

Обозначим, $\omega_{km} = \varepsilon_m - \varepsilon_k$, $\frac{1}{2}\sum_i (\gamma_{ik} + \gamma_{im}) = \Gamma_{km}$. Тогда решение имеет вид

$$\rho_{km}(t) = e^{-(\Gamma_{km} - i\omega_{km})t}\rho_{km}(0)$$

Декогерентность и спектроскопия

$$\frac{d}{dt}\rho_{km} = \left(-i(\varepsilon_k - \varepsilon_m) - \frac{1}{2}\sum_i (\gamma_{ik} + \gamma_{im})\right)\rho_{km}$$

Обозначим, $\omega_{km} = \varepsilon_k - \varepsilon_m$, $\frac{1}{2}\sum_i (\gamma_{ik} + \gamma_{im}) = \Gamma_{km}$. Тогда решение имеет вид

$$\rho_{km}(t) = e^{-(\Gamma_{km} - i\omega_{km})t}\rho_{km}(0)$$