Характеризация абсолютно непрерывных и соболевских кривых с помощью липшицевых пост-композиций

А. И. Тюленев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

e-mail: tyulenev-math@yandex.ru, tyulenev@mi-ras.ru

Основываясь на некоторых идеях работы Л. Амброзио [1], Ю. Г. Решетняк [2] ввел определение пространств Соболева $W_p^1(\Omega, \mathrm{Y})$ отображений (далее мы отождествляем борелевское отображение с его классом эквивалентности по модулю совпадения почти всюду) из ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в произвольное полное сепарабельное метрическое пространство Y. Более точно, при $p \in (1, \infty)$ отображение $u \in L_p(\Omega, \mathrm{Y})$ принадлежит пространству $W_p^1(\Omega, \mathrm{Y})$, если существует такая неотрицательная функция $G \in L_p(\Omega)$, что для любой липшицевой функции $h : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$, пост-композиция $h \circ u$ принадлежит классическому пространству Соболеву $W_p^1(\Omega, \mathbb{R})$, и при этом

$$|D(h \circ u)(t)| \leq \operatorname{lip} h(u(t))G(t) \quad \text{при } \mathcal{L}^n\text{-п.в. } x \in \Omega,$$

где $\mathcal{L}^n$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $D(h \circ u)$ – обобщенный по Соболеву дифференциал, а $\operatorname{lip} h$ – локальная константа Липшица функции h.

Оказывается, по крайней мере в одномерном случае, возможно убрать из этого определения требование наличия мажоранты G и получить более простую характеризацию. Более точно, в совместной работе автора и Р. Д. Олейника [3] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *– полное сепарабельное метрическое пространство. При* $p \in (1, \infty)$ *отображение* $\gamma : [a, b] \to \mathrm{X}$ *принадлежит классу* $W_p^1([a, b], \mathrm{X})$ *в том и только том случае, если* $h \circ \gamma$ *принадлежит пространству* $W_p^1([a, b], \mathbb{R})$ *для любой липшицевой на* X *функции* h.

Список литературы

[1] L. Ambrosio, «Metric space valued functions of bounded variation», Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 17 (1990), pp. 439–478.

[2] Yu. G. Reshetnyak, «Sobolev classes of functions with values in a metric space», Sibirsk. Mat. Zh., 38 (1997), pp. 657–675.

[3] R. D. Oleinik and A. I. Tyulenev, «Characterization of AC and Sobolev curves via Lipschitz post-compositions», arXiv:2408.08762v2 (2024).