Data-Driven Control (DDC): современный подход в теории управления

Квинто Я.И.
к.т.н., с.н.с. лаб.7

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

01.10.2024

Disclaimer

DDC = Data-Driven Control =
= Управление на основе данных

– сам подход в целом и для указания принадлежности конкретных методов и алгоритмов к этому подходу

Структура доклада

1. Актуальность новой парадигмы
2. Определение Data-Driven Control
3. Зарождение и развитие управления на основе данных
4. Специфика DDC, данные
5. Классификация методов DDC
6. Примеры методов:
   6.1. Безмодельное управление (Model-Free Control): iPID
   6.2. Подпространственный подход (Фундаментальная лемма)
7. Выводы и перспективы
8. Список литературы

Традиционный взгляд на управление

Управление на основе моделей (MBC – Model-Based Control)

- система в пространстве состояний
- передаточная функция
- и т.д.

На практике

Модель системы неизвестна $\Rightarrow$ построение / идентификация на основе измеренных данных.

Итог

Двухэтапная процедура управления:

1. построение/идентификация системы;
2. синтез управления.

Идентификация и/или построение модели **не всегда возможны!**

Сложности при двухэтапной процедуре управления:

- ограниченность знаний о системе, неполнота информации;
- большие размерности;
- существенные нелинейности и немоделируемая динамика;
- невозможность декомпозиции, редукции размерностей ...

- сложные промышленные процессы;
- транспортные и коммуникационные сети;
- электрические сети, энергетические системы;
- аэронавтика и космонавтика;
- нейробиология и нейрофизиологические исследования;
- социальные сети и т.д.

Варианты решения

- синтез регуляторов высокого порядка и с существенной нелинейностью $\to$ *невозможно, сложно, дорого*;
- редукция порядка и упрощение структуры модели/регулятора $\to$ *снижение эффективности, ограниченность линейными моделями*;
- **синтез регуляторов непосредственно на основе данных $\to$ методы *Data-Driven Control*.**

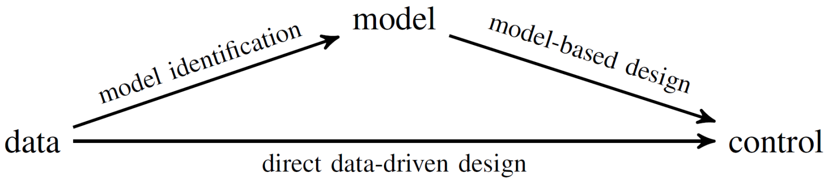


Рис. 1. Косвенный и прямой подходы к управлению

Наиболее общее определение DDC
(Обзор Hou, Wang, 2013)

«Управление на основе данных включает в себя все теории и методы управления, в которых регулятор синтезируется путем непосредственного использования онлайновых или автономных данных входа–выхода управляемой системы или знаний, полученных в результате обработки данных, но без явной информации о математической модели процесса, и в которых устойчивость, сходимость и робастность могут быть гарантированы строгим математическим анализом при определенных разумных предположениях.»

Ключевые моменты

- прямое использование данных измерений входа/состояний/выхода;
- важно само управление на основе данных, а не построение/идентификация моделей;
- результаты гарантируются теоретическим анализом.

Учёт неопределённостей в теории управления

- «Счастливые времена детерминизма» (Я.З. Цыпкин, 1968 г.)

$$\downarrow$$

Возрастает интерес к учёту неточностей и неопределённостей в системах

$$\downarrow$$

- Стохастическое управление
- Адаптивное управление
- Робастное управление
- «Мягкие вычисления» и искусственный интеллект: нейронные сети, стохастическая оптимизация, нечёткая логика, машинное обучение и т.д. (1990–2000-е гг.)

Неопределённость в DDC –
все предыдущие + **отсутствие модели системы!**

Первые вестники:

- ZIEGLER J.G., NICHOLS N.B. *Optimum Settings for Automatic Controllers* // Trans. of the ASME. – **1942**. – Vol. 64. – P. 759–768.
- UCHIYAMA M. *Formulation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial* // Control Engineering. – **1978**. – Vol. 14, No. 6. – P. 706–712.
- WILLEMS J.C. *From Time Series to Linear System. Parts I–III* // Automatica. – **1986-1987**.
- ÅSTRÖM K.J., WITTENMARK B. *Adaptive Control*. – Addison-Wesley, **1989**.
- BRADTKE S.J. *Reinforcement Learning Applied to Linear Quadratic Regulation* // In: Advances in Neural Information Processing Systems. – **1993**. – P. 295–302.
- HJALMARSSON H., GUNNARSSON S., GEVERS M. *A Convergent Iterative Restricted Complexity Control Design Scheme* // Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control. – **1994**. – Vol. 2. – P. 1735–1740.
- SAFONOV M.G., TSAO T. *The Unfalsified Control Concept and Learning* // IEEE Trans. on Automatic Control. – **1997**. – Vol. 42, No. 6. – P. 843–847.
- HJALMARSSON H., GEVERS M., GUNNARSSON S., LEQUIN O. *Iterative Feedback Tuning: Theory and Applications* // IEEE Control Systems Magazine. – **1998**. – Vol. 18, No. 4. – P. 26–41.

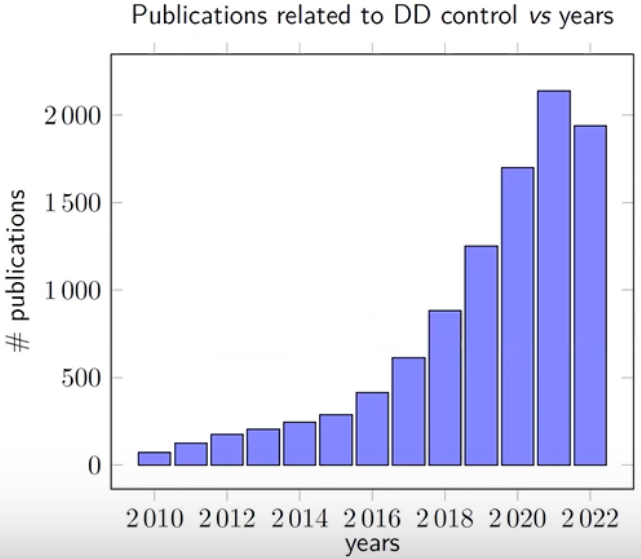
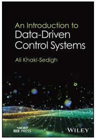
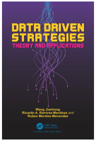


Рис. 2. Количество публикаций DDC по годам (Formentin S. Data-Driven Predictive Control of Stochastic Systems. – 19.01.2023. Канал YouTube CT Identification SAGIP)

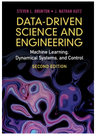
Книги по DDC



Khaki-Sedigh A. *An Introduction to Data-Driven Control Systems.* John Wiley & Sons, Inc., 2024.

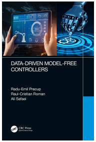


Wang Jianhong, Ramirez-Mendoza R.A., Morales-Menendez R. *Data Driven Strategies: Theory and Applications.* CRC Press, 2023.

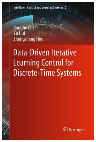


Brunton S.L., Kutz J.N. *Data-Driven Science and Engineering. Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. 2nd ed.* – Cambridge University Press, 2022. + *канал YouTube Steve Brunton*

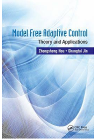
Книги по DDC



Precup R.-E., Roman R.-C., Safaei A. *Data-Driven Model-Free Controllers.* CRC Press, 2022.

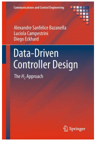


Ronghu Chi, Yu Hui, Zhongsheng Hou *Data-Driven Iterative Learning Control for Discrete-Time Systems.* – Springer, 2022.

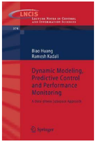


Zhongsheng Hou, Shangtai Jin *Model Free Adaptive Control. Theory and Applications.* – CRC Press, 2014.

Книги и конференции по DDC



Bazanella A.S., Campestrini L., Eckhard D. *Data-Driven Controller Design: The H2 Approach*. – Springer, 2012.



Huang B., Kadali R. *Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monitoring. A Data-driven Subspace Approach* – Springer-Verlag London Ltd., 2008.

Основные особенности DDC-подхода

• По входо-выходным данным невозможно судить о характеристиках системы. **Идеальный метод DDC универсален.**

• Априорная информация о динамике/структуре системы не требуется либо минимальна.

• Вопросы устойчивости, робастности и учёта инженерных требований в синтезированной системе должны решаться полностью на основе данных.

• В DDC важно **достижение цели управления**, а не стремление к точности моделирования самой системы.

• **Теория DDC максимально ориентирована на практическое применение.**

Особенности использования данных в DDC

- «Сырые» данные, без предварительной обработки, в том числе неточные.
- Дискретное время (продиктовано практикой: дискретные измерения, использование цифровых устройств).
- В некоторых методах используются тестовые сигналы.

Типы данных

Онлайн-данные – данные входа–выхода системы в течение скользящего временного окна конечной длины.

Достоинства: отражают текущее состояние и динамику переходных процессов.
Недостатки: используется только локальная информация; критичны потеря данных и искажение измерений.

Автономные (офлайн) данные – измеренные в течение конечного временного окна.

Достоинства: возможно хранение и использование больших объемов автономных данных $\Rightarrow$ в них более полная информация о системе, чем в онлайн-данных.
Недостатки: из-за больших объемов данных могут возникать вычислительные трудности.

Какими по «качеству» и объему должны быть данные?

• **Условие неисчезающего возбуждения входного сигнала**:
– возможна идентификация системы;
– возможен синтез регулятора в рамках DDC (Фундаментальная лемма Виллемса и др., 2005).

• **Условие информативности данных** (van Waarde H.J. et al, 2019):
– данных еще недостаточно для идентификации,
– но уже возможны анализ и синтез системы управления DDC.

• Объем оговаривается отдельно в каждом методе.

Классификация методов DDC (Hou, Wang, 2013)

Методы на основе автономных данных

- Метод ПИД-регулирования (**Ziegler & Nichols, 1942** (!!!)).
- Approximate Dynamic Programming (ADP, Werebos, 1991)
- Iterative Feedback Tuning (IFT, Hjalmarsson, 1994)
- Subspace Predictive Control (SPC, Favoreel et al, 1999, etc.)
- Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT, Guardabassi & Savaresi, 2000)
- Correlation based Tuning (CbT, Karimi et al., 2002)
- Non-Iterative Data-Driven Model Reference Control (Van Heusden et al, 2007)
- Model-Free Control (Fliess & Join, 2009)

Методы на основе онлайн-данных

• Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA, Spall, 1994).
• Model-Free Adaptive Control (MFAC, Hou, 1994).
• Adaptive online Iterative Feedback Tuning (McDaid et al., 2012).
• Data-Enabled Predictive Control (DeePC, Coulson et al., 2019)

Гибридные методы DDC на основе онлайн- и оффлайн-данных

• Unfalsified Control (UC, Safonov, 1995).
• Iterative Learning Control (ILC, Uchiyama, 1978 (jap), Arimoto et al., 1984).
• Lazy Learning (LL, Schaal & Atkeson, 1994).

Принципы действия методов DDC

- **Методы с фиксированной структурой регулятора:**
Настройка регулятора/идентификация параметров регулятора
– оценивание градиента критерия качества по входо-выходным измерениям (Virtual Reference Feedback Tuning, PID, Iterative Feedback Tuning, Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, Unfalsified Control, ...)

- **Методы с произвольной структурой регулятора:**
– *Непосредственное вычисление управляющего воздействия по измеренным данным* (Direct Adaptive Control, Subspace Predictive Control, Iterative Learning Control, ...)
– *Динамическая линеаризация* (Model-Free Control, Model-Free Adaptive Control, Lazy Learning, ...)
– *Получение информации о динамике системы из данных* – машинное обучение, нейронные сети, ...

И еще методы... (Precup, Roman, Safaei, 2022)

- Reinforcement Learning (RL, Sutton et al., 1992).
- Pulse Response-Based Control (Benninghof et al., 1993).
- LQ-управление на основе данных (Favoreel et al., 1999).
- Frequency-Domain Tuning – FdT, Kammer et al, 1999–2000).
- Extremum Seeking Control (Krstić, 2000).
- Markov Data-Based LQG Control (Shi & Skelton, 2000).
- Iterative Regression Tuning (IRT, Halmevaara & Hyötyniemi, 2004).
- Active Disturbance Rejection Control (ADRC, Gao, 2006).
- Data-Driven Inversion-Based Control (D^2-IBC, Novara et al., 2015).
- ...

Задачи и системы, уже имеющие DDC

- стабилизация и слежение
- оптимальное управление, линейно-квадратичное управление, ...
- робастное управление
- адаптивное управление
- прогнозирующее управление
- управление со скользящим режимом и т.д.

Системы:

- линейные / нелинейные
- SISO / MIMO
- непрерывные / дискретные
- стационарные / с переменными параметрами/структурой
- детерминированные / стохастические
- дескрипторные
- с запаздыванием
- с неопределённостями и внешними возмущениями
- мультиагентные и т.д.

Теории управления
на основе моделей (MBC) и на основе данных (DDC)
ВЗАИМНО ДОПОЛНЯЮТ
друг друга

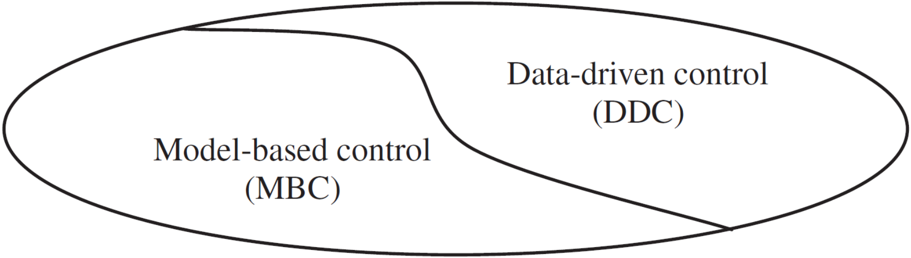


Рис. 3.

Примеры методов DDC

1. MFC – Model Free Control: iPID-регуляторы
2. Подпространственный подход (параметризация с помощью Фундаментальной леммы Виллемса и др.)

Model-Free Control – безмодельное управление:

«Интеллектуальные» iPID-регуляторы

Общая характеристика MFC

Метод на основе динамической линеаризации (Fliess & Join, 2009)

- Математическая модель динамической системы (процесса) неизвестна.
- Число входов равно числу выходов.
- Доступны измерения входного и выходного сигналов и задан эталонный сигнал.
- Линейная аппроксимация процесса **онлайн**, но параметры регулятора настраиваются офлайн.
- Известные типы регуляторов: **«интеллектуальные» iP, iPI и iPID**.

Цель: получение управляющего сигнала, в режиме онлайн минимизирующего рассогласование между входным и эталонным сигналами на заданном горизонте.

Model-Free Control: iPID-регуляторы

Ультра-локальная модель для систем MIMO с непрерывным временем:

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

- $\mathbf{u}$ – измеряемый входной сигнал (управление), $\mathbf{y}$ – измеряемый выход;
- $\mathbf{y}^{(n)}$ – производная порядка $n = 1, 2$ (выбирается разработчиком исходя из требований задачи);
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – нефизический постоянный параметр, априори не определён; подбирается методом проб и ошибок или дополнительными методами;
- $\mathbf{F}$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на каждом шаге, постоянно обновляется и включает в себя малоизвестные части объекта, нелинейности, а также различные возможные неопределённости, помехи и возмущения (Fliess, 2013).

Model-Free Control: iPID-регуляторы

Ультра-локальная модель:

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{1}$$

Управляющий сигнал:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{B}}^{-1}(\mathbf{y}^{(n)} - \hat{\mathbf{F}} + \mathbf{v}), \tag{2}$$

$\mathbf{v}$ определяет тип регулятора:

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_P\mathbf{e} + \mathbf{K}_I\int_0^t \mathbf{e}\,d\tau + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}}; \tag{3}$$

$\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}$ – рассогласование; $\mathbf{y}_d$ – эталонный сигнал.

Минимизируем рассогласование на заданном горизонте:

$$J = \int_0^T \|\mathbf{e}\|^2 dt \to \min. \tag{4}$$

Дискретный iPID 1-го порядка

Ультра-локальная модель:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k),\ \ k = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

- $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ – измеряемые вход (управление) и выход системы, $\mathbf{y}_d$ – эталонный сигнал; $\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}$ – рассогласование;
- $\mathbf{B} = diag(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – постоянная матрица параметров;
- $\mathbf{F}(k) \in \mathbb{R}^n$ обновляется в каждый момент времени k (кусочно-постоянна на каждом шаге).

Критерий:

$$J = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \|e(k)\|^2 \to min. \tag{6}$$

Регулятор:

$$\mathbf{u}(k) = \hat{\mathbf{B}}^{-1}(-\hat{\mathbf{F}}(k) + \mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_d(k) - \tag{7}$$

$$-\mathbf{K}_P\mathbf{e}(k) - \mathbf{K}_I\mathbf{e}(k-1) - \mathbf{K}_D\mathbf{e}(k-2)),$$

$\mathbf{K}_P = diag(K_{P1}, ..., K_{Pn}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{K}_I = diag(K_{I1}, ..., K_{In}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{K}_D = diag(K_{D1}, ..., K_{Dn}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – постоянные матрицы параметров.

Оценка $\hat{\mathbf{F}}(k) \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{\mathbf{F}}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{y}(k-1) - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-1). \tag{8}$$

Вектор ошибки оценки $\delta \in \mathbb{R}^n$:

$$\delta(k) = \mathbf{F}(k) - \hat{\mathbf{F}}(k) \tag{9}$$

– помеха, которой можно пренебречь (ограничена и мала по норме).

Уравнение динамики замкнутой системы управления с iPID-регулятором первого порядка:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + \mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_d(k) - \\ -\mathbf{K}_P\mathbf{e}(k) - \mathbf{K}_I\mathbf{e}(k-1) - \mathbf{K}_D\mathbf{e}(k-2) + \delta(k). \quad (10)$$

Динамика ошибок управления:

$$\mathbf{e}(k+1) - (\mathbf{I} + \mathbf{K}_P)\mathbf{e}(k) - \mathbf{K}_I\mathbf{e}(k-1) - \mathbf{K}_D\mathbf{e}(k-2) = \delta(k). \quad (11)$$

Хорошая аппроксимация: $\delta(k) = \mathbf{F}(k) - \hat{\mathbf{F}}(k) \simeq 0.$

iPID-регулятор первого порядка (7) гарантирует устойчивость системы управления, если все корни характеристического многочлена (11) находятся внутри единичного круга (Fliess & Join, 2013; Roman et al., 2017-18.)

Этапы проектирования дискретного iPID

Дано:

$\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), ..., \ \mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), ..., \ \mathbf{y}_d(0), \mathbf{y}_d(1), \mathbf{y}_d(2), ...$

Алгоритм

1. Выбор $\hat{\mathbf{B}} = diag(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\Delta\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)$ и $\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k)$ имеют одинаковый порядок величины. Значение $\hat{\mathbf{B}}$ остается постоянным.
2. Настройка значений параметров в $\mathbf{K}_P = diag(K_{P1}, ..., K_{Pn}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}_I = diag(K_{I1}, ..., K_{In}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}_D = diag(K_{D1}, ..., K_{Dn}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: минимизируется рассогласование, выполняются инженерные требования и условия устойчивости, связанные с динамикой ошибок. Значения $\mathbf{K}_P$, $\mathbf{K}_I$, $\mathbf{K}_D$ остаются постоянными.
3. Оценка $\hat{\mathbf{F}}(k)$, вычисление и подача на вход $\mathbf{u}(k)$.
4. Получаем $\mathbf{y}(k+1)$ и возвращаемся к предыдущему шагу.

Дискретный iPID 1-го порядка

ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Пример 1. Модель башенного крана

Оси и измерение трёх управляемых выходных сигналов:

y_1 – положение тележки (м);

y_2 – угловое положение стрелы (рад);

y_3 – положение груза (м).

См. (Precup R.-E., Roman R.-C., Safaei A., 2022) для подробного описания системы, её модели и параметров.

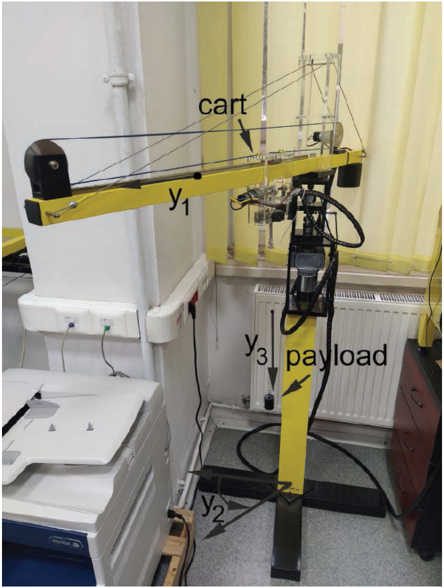


Рис. 4

Пример 1. Башенный кран

Шаг выборки $T_s = 0{,}01$ с, временной горизонт $T = 70$ с
$\Rightarrow$ длина выборки $N = 70/0{,}01 = 7000$.

Параметры дискретного iPID-регулятора 1-го порядка (MIMO-система, 3 параметра PID для каждого выхода):

$$\chi = [K_{P1}, K_{I1}, K_{D1}, K_{P2}, K_{I2}, K_{D2}, K_{P3}, K_{I3}, K_{D3}]^\top.$$

Критерий:

$$J(\chi) = \frac{1}{2} E\left\{ \sum_{k=1}^{7000} \|e(k,\chi)\|^2 \right\},$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^\top = [y_{d1} - y_1,\ y_{d2} - y_2,\ y_{d2} - y_2]^\top,$$

где e_1, e_2, e_3 – ошибки управления; y_1, y_2, y_3 – управляемые выходные данные; y_{d1}, y_{d2}, y_{d3} – эталонные входные данные (заданные кусочно-постоянные) для положения тележки, углового положения стрелы и положения груза соответственно.

Пример 1. Башенный кран

Шаг 1: Выбрана

$$\hat{B} = diag(0{,}0015;\ 0{,}0015;\ 0{,}0015).$$

Шаг 2: Установлены параметры K_{P1}, K_{I1}, K_{D1}, K_{P2}, K_{I2}, K_{D2}, K_{P3}, K_{I3}, K_{D3} для обеспечения условия устойчивости динамики ошибок (11):

$$\chi = [-0{,}77;\ 0{,}14;\ 0{,}41;\ -0{,}75;\ 0{,}4;\ -0{,}1;\ -0{,}1;\ -0{,}1;\ -0{,}3]^\top.$$

Пример 1. Башенный кран – Графики

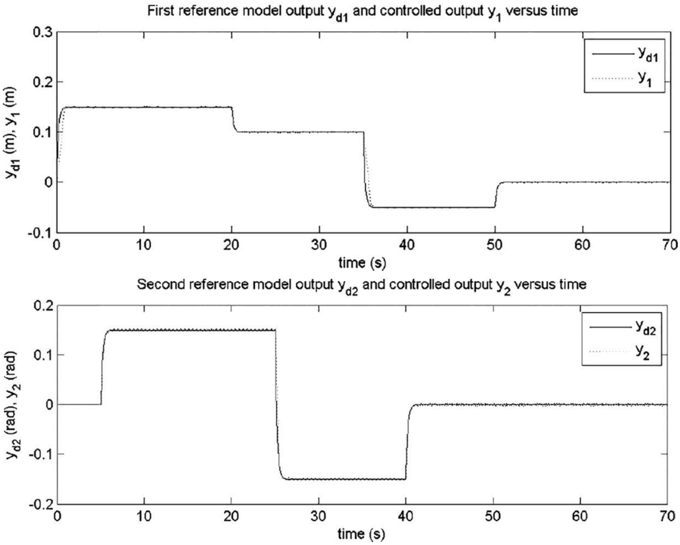


Рис. 5. Положение тележки (сверху) и угловое положение стрелы (снизу): выходной и эталонный сигналы

Пример 1. Башенный кран – Графики

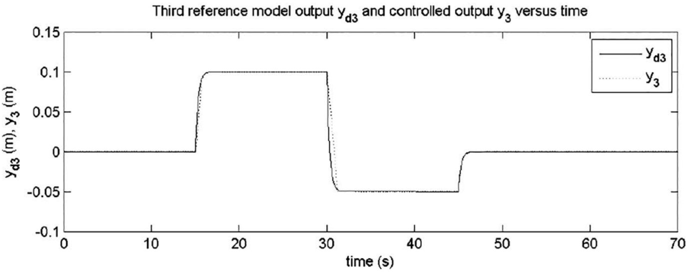


Рис. 6. Положение груза: выходной и эталонный сигналы

Достоинства MFC iPID:

- простота и доступность реализации метода;
- использование известных типов регуляторов – iPID;
- применимость к широкому кругу систем;
- робастность относительно немоделируемой динамики и неопределённостей в системе;
- можно комбинировать с другими методами (VRFT, LQR...);
- практическая реализуемость.

Недостатки:

- фактическая декомпозиция многомерной системы на одномерные (диагональные матрицы параметров);
- количество выходов системы должно быть равно количеству входов;
- неприменимость к неминимально-фазовым системам.

Подпространственный подход

(на основе Behavioral Systems Theory
и
Фундаментальной леммы
Виллемса и др.)

Истоки подпространственного подхода

• Willems J.C., Polderman J.W. Introduction to Mathematical Systems Theory: **A Behavioral Approach** (1997):

- Динамическая система – это набор траекторий, т.е. её поведение, а не модель.
- Траектория описывается конечным вектором измерений входа–выхода [входа/состояния/выхода] системы.
- **Линейная стационарная система** – это линейное конечномерное подпространство (траекторий), инвариантное относительно операции сдвига.

Фундаментальная лемма (Виллемса и др., 2005)

Все возможные траектории линейной стационарной системы могут быть получены из единственной известной траектории, входной компонент которой является неисчезающе возбуждающим.

Идентификация матриц системы не нужна!

Подпространственный подход

- Входной сигнал является неисчезающе возбуждающим.
- Вся информация о динамике линейной стационарной системы содержится в единственной траектории конечной длины.

$\Rightarrow$ возможность непараметрического представления линейной стационарной системы через «сырые» автономные экспериментальные данные.

Инструменты: линейная алгебра и LMI.

Представление данных

Линейная стационарная дискретная система

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \tag{12}$$

$$y(k) = x(k), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Матрицы A и B неизвестны, но система управляема (van Waarde et al., 2023 – Data-Driven Hautus Test), m и n известны.

Входо-выходные данные разомкнутой системы:
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ доступны для измерения (1 серия).

Векторы измерений (интервал $T \geq 1$):

$$U := [\mathbf{u}(0) \quad \mathbf{u}(1) \quad \dots \quad \mathbf{u}(T-1)], \quad (m \times T);$$

$$X := [\mathbf{x}(0) \quad \mathbf{x}(1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(T-1) \quad \mathbf{x}(T)], \quad (n \times (T+1)).$$

Предыдущие состояния:

$$X_- := [\mathbf{x}(0) \quad \mathbf{x}(1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(T-1)], \quad (n \times T);$$

Последующие состояния (сдвиг предыдущих на 1 вперед):

$$X_+ := [\mathbf{x}(1) \quad \mathbf{x}(2) \quad \dots \quad \mathbf{x}(T)] = \sigma X_-, \quad (n \times T);$$

где σ – оператор единичного сдвига: $\sigma \mathbf{x}(k) := \mathbf{x}(k+1)$.

Траектория длины T – это матрица $(m+n) \times T$:

$$\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(T-1) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{x}(1) & \dots & \mathbf{x}(T-1) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Исходная система:

$$X_+ = [B \quad A] \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Фундаментальная лемма

$\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix}$ – траектория системы, U – вход, X_- – выход (состояния).

Фундаментальная лемма (Виллемса и др., ФЛВ, 2005)

Если $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(T-1) \end{pmatrix}$ является неисчезающе возбуждающим [порядка $n+1$], то:

1. Матрица вход-выходных данных имеет полный строчный ранг:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = m + n. \tag{15}$$

2. Любая траектория системы представима в виде линейной комбинации измеренных данных: $\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} g \quad \forall g \in \mathbb{R}^T$.

Количество измерений для выполнения (15):

$$T \geq m + n$$

Стабилизация обратной связью по состоянию

Model-Based Control

Дано: Система

$$\sigma \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},\ \mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n,\ (A, B) \text{ управляема.}$$

Найти: обратную связь по состоянию $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ ($K \in \mathbb{R}^{m \times n}$): $A + BK$ устойчива по Шуру.

Data-Driven Control

Дано: Измеренные значения входа и состояния разомкнутой системы на некотором (не обязательно начальном!) интервале:

$$U := [\mathbf{u}(0) \quad \mathbf{u}(1) \quad \dots \quad \mathbf{u}(T-1)],\ X := [\mathbf{x}(0) \quad \mathbf{x}(1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(T)].$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = m + n \text{ и система управляема.}$$

Найти: $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$: замкнутая система устойчива.

Стабилизация обратной связью по состоянию (MBC)

Решение на основе квадратичной функции Ляпунова

Найти $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}, K \in \mathbb{R}^{m\times n} : (A+BK)P(A+BK)^\top - P \prec 0.$

$\to$ Замена переменных: $Y = KP \to$

Задача полуопределённого программирования (MBC)

$$\begin{pmatrix} P & AP+BY \\ P^\top A^\top + Y^\top B^\top & P \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succ 0. \tag{16}$$

Тогда регулятор: $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$.

Стабилизация обратной связью по состоянию (DDC)

Прямой способ DDC (De Persis, Tesi, 2019).

Из рангового условия (ФЛ):
$\forall K \in \mathbb{R}^{m\times n}\ \exists G \in \mathbb{R}^{T\times n}$ (не единственная!):

$$\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G. \tag{17}$$

Параметризация матрицы замкнутого контура:

$$A + BK = [B\ \ A]\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = [B\ \ A]\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G = X_+ G, \tag{18}$$

и регулятор

$$\hat{K} = UG. \tag{19}$$

$\Rightarrow$ Надо найти подходящую матрицу G!

Перепишем

$$(A+BK)P(A+BK)^\top - P \prec 0$$

с учётом $A+BK = X_+G$, получаем **задачу в рамках DDC в виде линейно-матричных неравенств:**

Найти $P \in \mathbb{S}^n \succ 0, G, K$ при условиях

$$(X_+G)P(X_+G)^\top - P \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} G.$$

Замена переменных: $Q = GP \rightarrow$

Задача полуопределённого программирования (DDC!)

Найти $Q \in \mathbb{R}^{T\times n}$ при условиях

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = m+n, \quad \begin{pmatrix} X_-Q & X_+Q \\ * & X_-Q \end{pmatrix} \succ 0. \tag{20}$$

Тогда регулятор: $\hat{K} = U\hat{Q}(X_-\hat{Q})^{-1}$.

Если нет условия неисчезающего возбуждения, но есть условие информативности данных для стабилизации обратной связью по состоянию:

Задача полуопределённого программирования

Найти $Q \in \mathbb{R}^{T\times n}$ при условиях

$$\begin{pmatrix} X_-Q & X_+Q \\ * & X_-Q \end{pmatrix} \succ 0 \quad \text{и} \quad X_-Q = (X_-Q)^\top. \tag{21}$$

Тогда регулятор: $\hat{K} = U\hat{Q}(X_-\hat{Q})^{-1}$.

ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Пример 2. Постановка задачи (Khaki-Sedigh A., 2024)

Дискретизированная модель системы реактора периодического действия (шаг дискретизации $0{,}1$ с):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1{,}178 & 0{,}001 & 0{,}511 & -0{,}403 \\ -0{,}051 & 0{,}661 & -0{,}011 & 0{,}061 \\ 0{,}076 & 0{,}335 & 0{,}560 & 0{,}382 \\ 0 & 0{,}355 & 0{,}089 & 0{,}849 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} 0{,}004 & -0{,}087 \\ 0{,}467 & 0{,}001 \\ 0{,}213 & -0{,}235 \\ 0{,}213 & -0{,}016 \end{pmatrix} \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k;$$

$\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_4]^\top$, $\mathbf{u} = [u_1 \ \ u_2]^\top$, разомкнутая система неустойчива.

Матрицы A, B неизвестны, а значения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{x}$ можно измерять, задав произвольные входные воздействия.

Цель:
Построить стабилизирующую обратную связь $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ по имеющимся входо-выходным данным.

Пример 2. Решение

Случайные начальные условия
$\mathbf{x}(0) = [0{,}0638\ \ -0{,}2356\ 0{,}6035\ 0{,}3417]^\top$ $\rightarrow$ одна серия измерений состояний $X_+ = [\mathbf{x}(1)\ \ldots\ \mathbf{x}(T)]$ при $T = 15$.

Вход системы – случайная последовательность
$U = [\mathbf{u}(0) \quad \mathbf{u}(1) \quad \ldots \quad \mathbf{u}(T-1)] \in \mathbb{R}^T$:

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}9657 & 0{,}1525 & \ldots & 0{,}8114 & 0{,}2995 \\ 0{,}8736 & -0{,}8396 & \ldots & -0{,}3897 & -0{,}4224 \end{pmatrix};$$

$\rightarrow$ состояния на интервале $[0, T]$:

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}0638 & 0{,}1735 & 0{,}2979 & \ldots & 11{,}7946 & 14{,}7214 \\ -0{,}2356 & 0{,}3071 & 0{,}2877 & \ldots & -0{,}4994 & -0{,}7453 \\ 0{,}6035 & 0{,}3948 & 0{,}7396 & \ldots & 2{,}5080 & 2{,}7627 \\ 0{,}3417 & 0{,}4519 & 0{,}5737 & \ldots & 1{,}2199 & 1{,}1522 \end{pmatrix}.$$

Входные данные (2×15):

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}9657 & 0{,}1525 & \ldots & 0{,}8114 & 0{,}2995 \\ 0{,}8736 & -0{,}8396 & \ldots & -0{,}3897 & -0{,}4224 \end{pmatrix};$$

Выходные данные (4×15):

$$X_- = \begin{pmatrix} 0{,}0638 & 0{,}1735 & \ldots & 11{,}7946 \\ -0{,}2356 & 0{,}3071 & \ldots & -0{,}4994 \\ 0{,}6035 & 0{,}3948 & \ldots & 2{,}5080 \\ 0{,}3417 & 0{,}4519 & \ldots & 1{,}2199 \end{pmatrix},$$

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0{,}1735 & 0{,}2979 & \ldots & 11{,}7946 & 14{,}7214 \\ 0{,}3071 & 0{,}2877 & \ldots & -0{,}4994 & -0{,}7453 \\ 0{,}3948 & 0{,}7396 & \ldots & 2{,}5080 & 2{,}7627 \\ 0{,}4519 & 0{,}5737 & \ldots & 1{,}2199 & 1{,}1522 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} U \\ X_- \end{bmatrix} = m + n = 6.$$

Задача полуопределенного программирования (20) для измерений входа и выхода при $T = 15$:

$$\begin{pmatrix} X_-Q & X_+Q \\ * & X_-Q \end{pmatrix} \succ 0.$$

Тогда регулятор

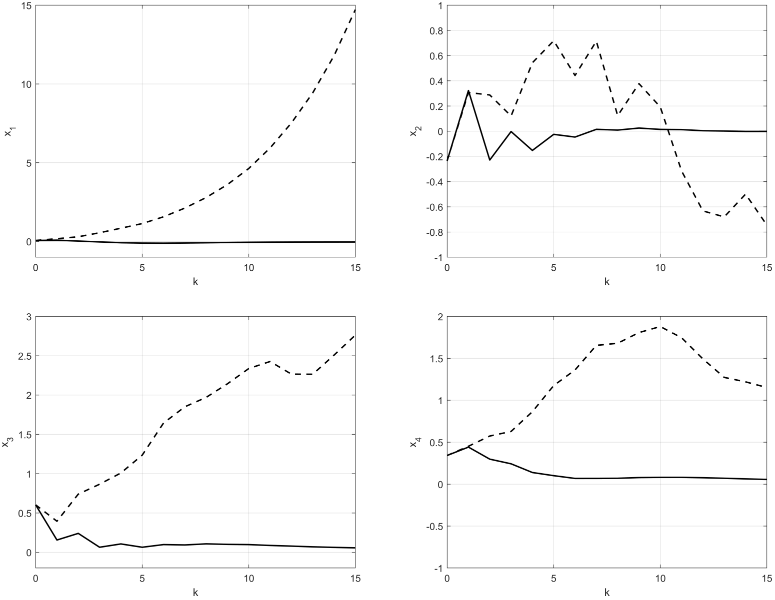
$$\hat{K} = U\hat{Q}(X_-\hat{Q})^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5850 & -1{,}5395 & 2{,}1036 & -1{,}9692 \\ 3{,}2446 & -1{,}4337 & 3{,}0842 & -1{,}4285 \end{pmatrix}$$

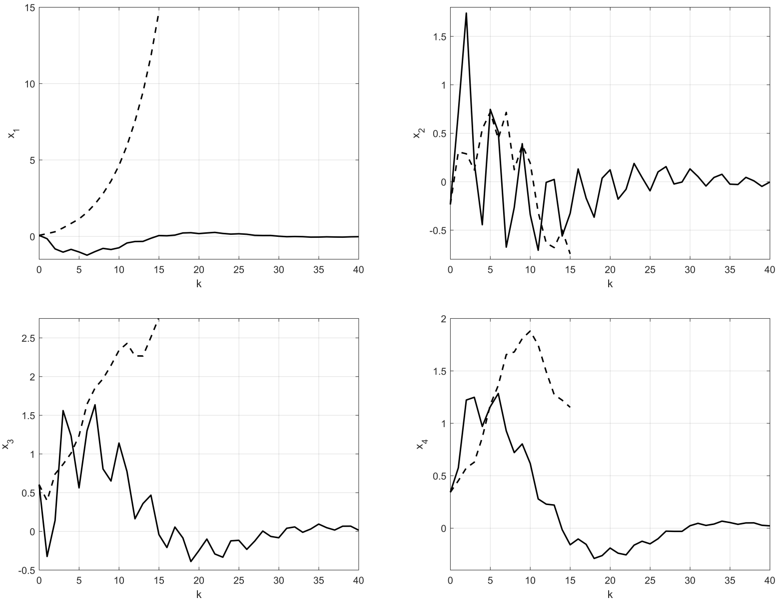
стабилизирует исходную систему: собственные значения $A + BK$ $(-0{,}5994; 0{,}9235; 0{,}6251 \pm 0{,}3829i)$ лежат внутри единичного круга.

Проверка СЗ по данным: $A + BK = X_+\hat{Q}(X_-\hat{Q})^{-1}$.

Выходы замкнутой системы, $T = 15$



Выходы замкнутой системы, $T = 5$



Достижения теории на основе ФЛ

System Class	Comments	References
linear		Willems et al. (2005), De Persis & Tesi (2019)
	data segmentation	van Waarde et al. (2020)
	affine structure	Martinelli et al. (2022)
	uncontrollable	Yu et al. (2021)
	descriptor	Schmitz et al. (2022b) & Section 7
	stochastic	Pan et al. (2022b) & Section 5
	stochastic, descriptor	Section 7
	linear parameter-varying	Verhoek et al. (2021)
	linear time-varying	Nortmann & Mylvaganam (2021)
	time delay	Rueda-Escobedo et al. (2022)
non-linear	bi-linear	Yuan & Cortés (2022)
	differentially flat	Alsalti et al. (2021)
	approximate trajectories via kernel regression	Huang et al. (2022); Lian & Jones (2021)
	Wiener-Hammerstein	Berberich & Allgöwer (2020)
	Volterra systems	Rueda-Escobedo & Schiffer (2020)
	polynomial nonlinearities	Markovsky (2021)

- оптимальное управление, линейно-квадратичное управление;
- робастное управление;
- прогнозирующее управление и т.д.

Достоинства и недостатки методов на основе Фундаментальной леммы

Достоинства

• Автономные данные, сравнительно небольшой объем (1 серия $\geq m+n$ измерений).
• Информативность данных – более мягкое условие на данные, чем условие неисчезающего возбуждения.
• Можно модифицировать в DDC известные методы МВС (управление на основе квадратичной функции Ляпунова, LQR, MPC$\rightarrow$ DeePC, ...).
• Есть варианты робастные, стохастические и др., а также для нелинейных систем.

Недостатки

• Зависимость вычислительной сложности от размерности системы и объема данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Почему стоит заниматься Data-Driven Control?

• Современный продвинутый взгляд на управление.

• Бурно развивается, но пока находится в зачаточном состоянии $\rightarrow$ **Большой простор для научного творчества!**

• Разнообразие уже известных методов и алгоритмов в рамках подхода DDC $\rightarrow$ **Можно найти на свой вкус!**

• Решает задачи, с которыми не справляется традиционное управление на основе моделей $\rightarrow$ **Расширение возможностей и взгляд на управление под другим углом!**

• Широкий охват задач и приложений, **максимальная нацеленность на практику**.

Перспективы

- Разработка теоретической основы для методов DDC.

- Разработка методов анализа устойчивости систем по данным.

- Исследование робастности в рамках DDC.

- Развитие методов оптимизации на основе данных для применения в DDC.

- Интеграция методов обработки данных с теорией управления (data-mining, распознавание образов, машинное обучение, статистический анализ и т.п.).

- Внедрение подхода DDC в реальные системы и процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Обзоры и статьи

• ZHONG-SHENG HOU, ZHUO WANG *From Model-Based Control to Data-Driven Control: Survey, Classification and Perspective* // Information Sciences. – 2013. – Vol. 235. – P. 3–35.
• XU JIAN-XIN, HOU ZHONG-SHENG *Notes on Data-driven System Approaches* // ACTA AUTOMATICA SINICA. – June, 2009. – Vol. 35, No. 6. – P. 668-675.
• FLIESS M., JOIN C. *Model-Free Control and Intelligent PID Controllers: Towards a Possible Trivialization of Nonlinear Control* // European Sympisium on Martensitic Transformations. – 2009. – P. 1531–1550. – arXiv: 0904.0322v1.
• FLIESS M., JOIN C. *Model-Free Control* // International Journal of Control. – 2013. – Vol. 86, No. 12. – P. 2228–2252.
• ROMAN R.-C., RADAC M.-B., PRECUP R.-E., PETRIU E.M. *Virtual Reference Feedback Tuning of Model-Free Control Algorithms for Servo Systems* // Machines. – 2017. – Vol. 5(4), No. 25.
• ROUIS N., N'DOYE I., LALEG-KIRATI T.-M. *Model-Free LQR Based PID Controller for Trajectory Tracking of 2-DoF Helicopter: Comparison and Experimental Results* // arXiv: 2103.10988v1.

• WILLEMS J.C., RAPISARDA P., MARKOVSKY I., DE MOOR B. *A Note on Persistency of Excitation* // Control Letters. – 2005. – Vol. 54, No. 4. – P. 325–329.
• VAN WAARDE H.J., EISING J., TRENTELMAN H.L., CAMLIBEL M.K. *Data Informativity: A New Perspective on Data-Driven Analysis and Control* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2020. – Vol. 65, Iss. 11. – P. 4753–4768. – arXiv: 1908.00468.
• DE PERSIS C.,TESI P. *Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality, and Robustness* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2020. – Vol. 65, No. 3. – P. 909–924.
• MARKOVSKY I., DÖRFLER F. *Behavioral Systems Theory in Data-Driven Analysis, Signal Processing, and Control* // Annual Reviews in Control. – 2021. – Vol. 52. P. 42–64.
• DÖRFLER F., TESI P., DE PERSIS C. *On the Certainty-Equivalence Approach to Direct Data-Driven LQR Design* // arXiv: 2109.06643.
• MARKOVSKY I., LINBIN HUANG, DÖRFLER F. *Data-Driven Control Based on the Behavioral Approach: From Theory to Applications in Power Systems* // IEEE Control Systems. – June 2022.

Книги

• BIAO HUANG, KADALI R. *Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monutoring. A Data-driven Subspace Approach.* – Springer-Verlag London Ltd., 2008.

• BAZANELLA A.S., CAMPESTRINI L., ECKHARD D. *Data-Driven Controller Design: The H2 Approach*. – Springer, 2012.

• ZHONGSHENG HOU, SHANGTAI JIN *Model Free Adaptive Control. Theory and Applications.* – CRC Press, 2014.

• BRUNTON S.L., KUTZ J.N. *Data-Driven Science and Engineering. Machine Learning, Dynamical Systems, and Control.* – Cambridge University Press, 2021.

• PRECUP R.-E., ROMAN R.-C., SAFAEI A. *Data-Driven Model-Free Controllers.* – CRC Press, 2022.

• RONGHU CHI, YU HUI, ZHONGSHENG HOU *Data-Driven Iterative Learning Control for Discrete-Time Systems.* – Springer, 2022.

• RONGHU CHI, NA LIN, HUIMIN ZHANG, RUIKUN ZHANG *Discrete-Time Adaptive Iterative Learning Control: From Model-Based to Data-Driven.* – Springer, 2022.

• WANG JIANHONG, RAMIREZ-MENDOZA R.A., MORALES-MENENDEZ R. *Data Driven Strategies: Theory and Applications*. – CRC Press, 2023.

• KHAKI-SEDIGH A. *An Introduction to Data-Driven Control Systems.* – John Wiley & Sons, Inc., 2024.

Русскоязычные публикации

- ЕМЕЛЬЯНОВА Ю.П., ПАКШИН П.В. *Управление с итеративным обучением* // В кн.: «Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие» / Под ред. Д.А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – С. 178–202.
- ПАКШИН П.В., ЕМЕЛЬЯНОВА Ю.П. *Синтез управления с итеративным обучением для систем с переключениями* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №8. – С. 119–135.
- КОПОСОВ А.С., ПАКШИН П.В. *Управление с итеративным обучением стохастическими мультиагентными системами с изменяемой желаемой траекторией и топологией* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №6. – С. 79–99.
- ДМИТРУК Н.М., МАНЖУЛИНА Е.А. *Оптимальное управление линейными стационарными дискретными системами без предварительной параметрической идентификации* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №2. – С. 3–21.
- КОГАН М.М., СТЕПАНОВ А.В. *Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных* // Автоматика и телемеханика.– 2023. – №8. – С. 24–42.
- КОГАН М.М., СТЕПАНОВ А.В. *Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных* // Автоматика и телемеханика.– 2024. – №6. – С. 115–139.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!