А. Н. ШИРЯЕВ*

Стохастические проблемы оптимальной остановки в теории управляемых случайных процессов

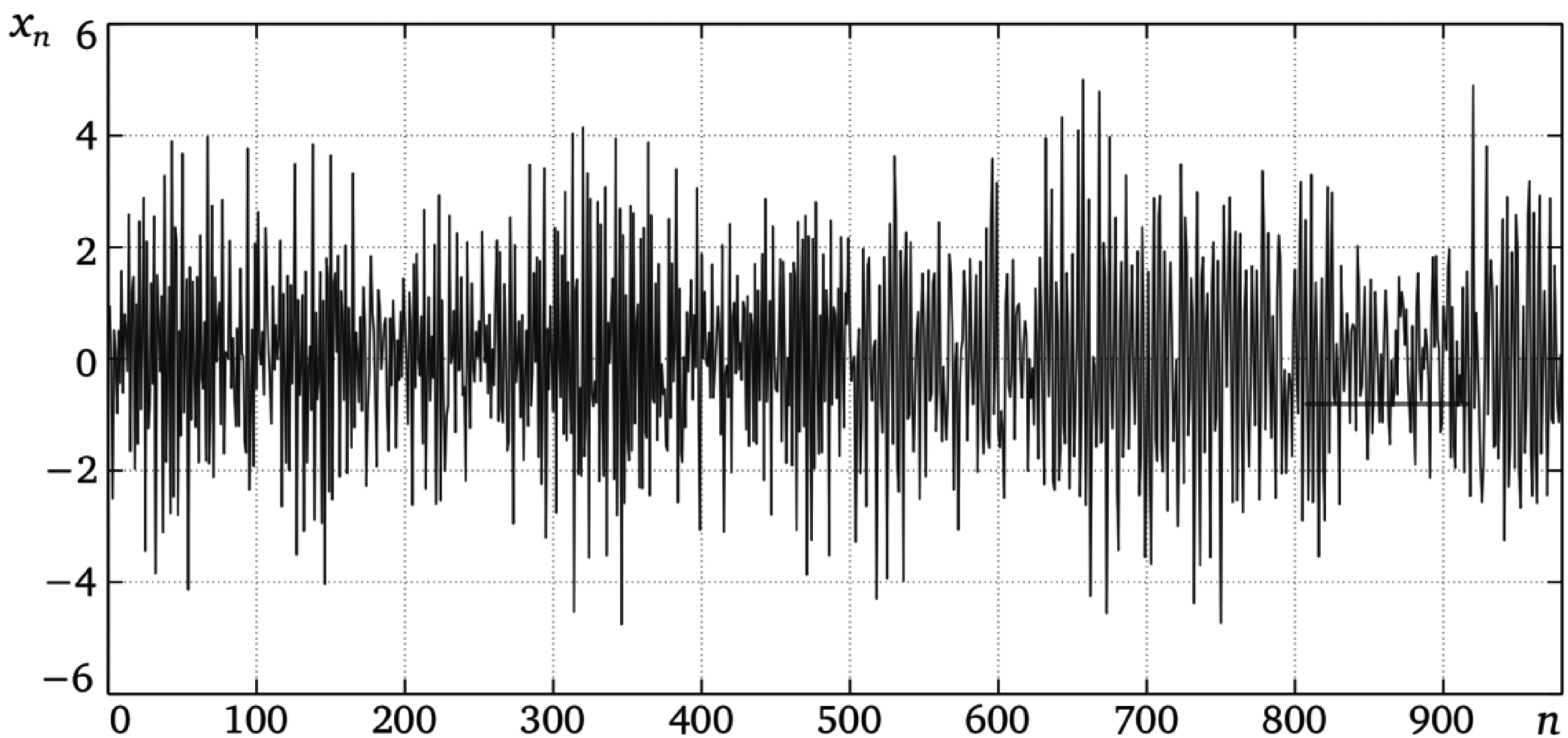
*Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук и МГУ имени М. В. Ломоносова, кафедра теории вероятностей

1. Наглядной проблемой оптимальной остановки является

задача НАИСКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ
момента изменения вероятностных характеристик
наблюдаемого процесса

ПРИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ
на класс моментов, в которые
допускается появление “разладки”.

Конкретный пример наблюдаемых данных (в дискретном времени $n = 0, 1, \dots, 1000$):



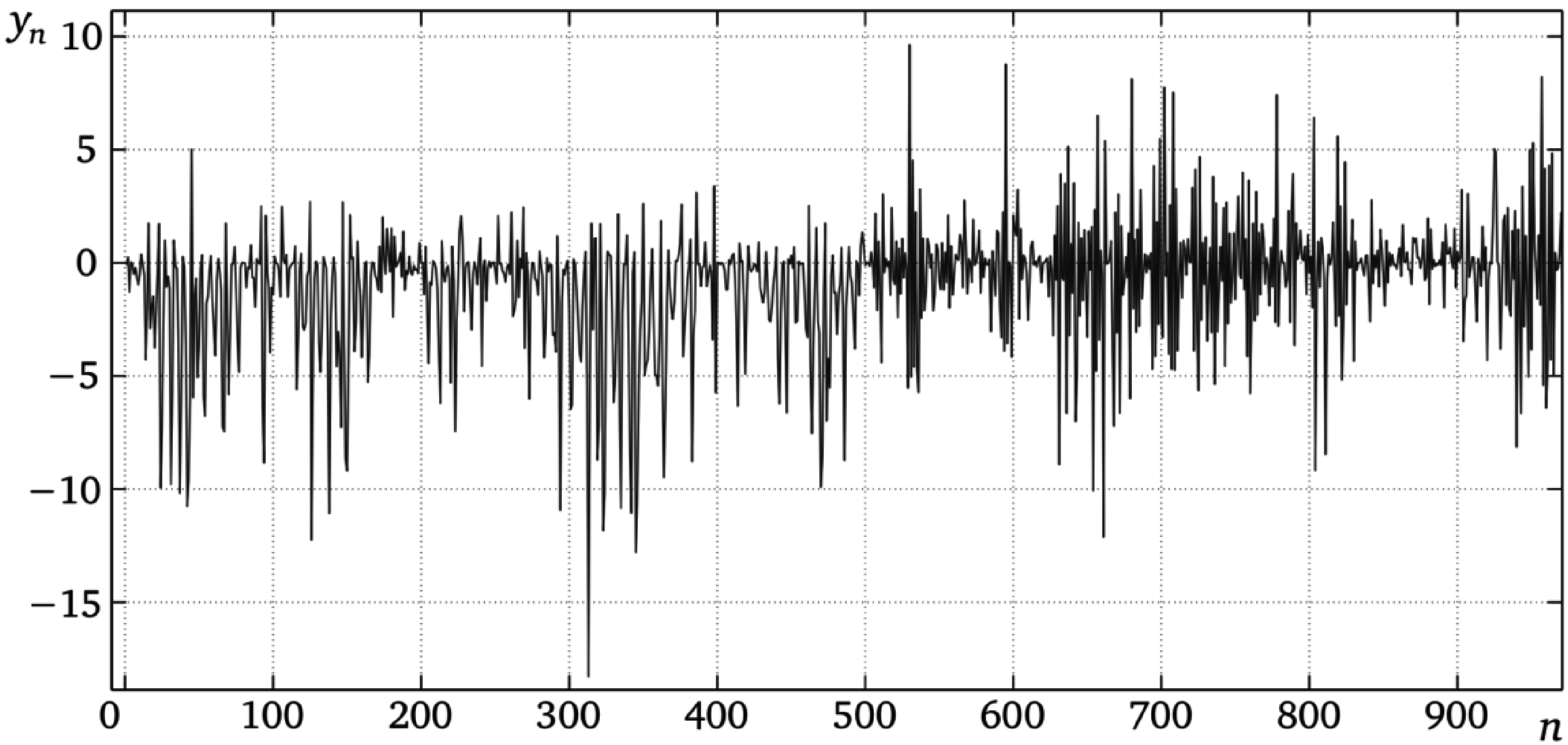
Простейший статистический анализ показывает, что, по всей видимости,

среднее значение и **дисперсия**
“почти” **не меняются** со временем.

Тогда естественно возникает гипотеза:

возможно, **меняется**
КОРРЕЛЯЦИЯ наблюдаемых данных?

Если принять эту гипотезу, то следует обратиться к величинам $\boxed{y_n = x_n x_{n-1}}$. Их вид для указанных выше конкретных данных приведен на следующем рисунке.



Из этого рисунка более четко видно, что в характере наблюдаемых данных есть изменение, или **“РАЗЛАДКА”**.

Данные на двух предыдущих рисунках на самом деле таковы, что до момента $n = 500$ они генерировались по правилу

$$x_n = \sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i} + \varepsilon_n, \qquad p = 10,$$

где $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, а коэффициенты a_i имеют специальный вид: $a_1 = -0.2110, \ldots, a_{10} = -0.0963$. После же момента $n = 500$ значения x_n подчиняются уравнению

$$x_n = \sum_{i=1}^{p'} a'_i x_{n-i} + \varepsilon_n, \qquad p' = 14,$$

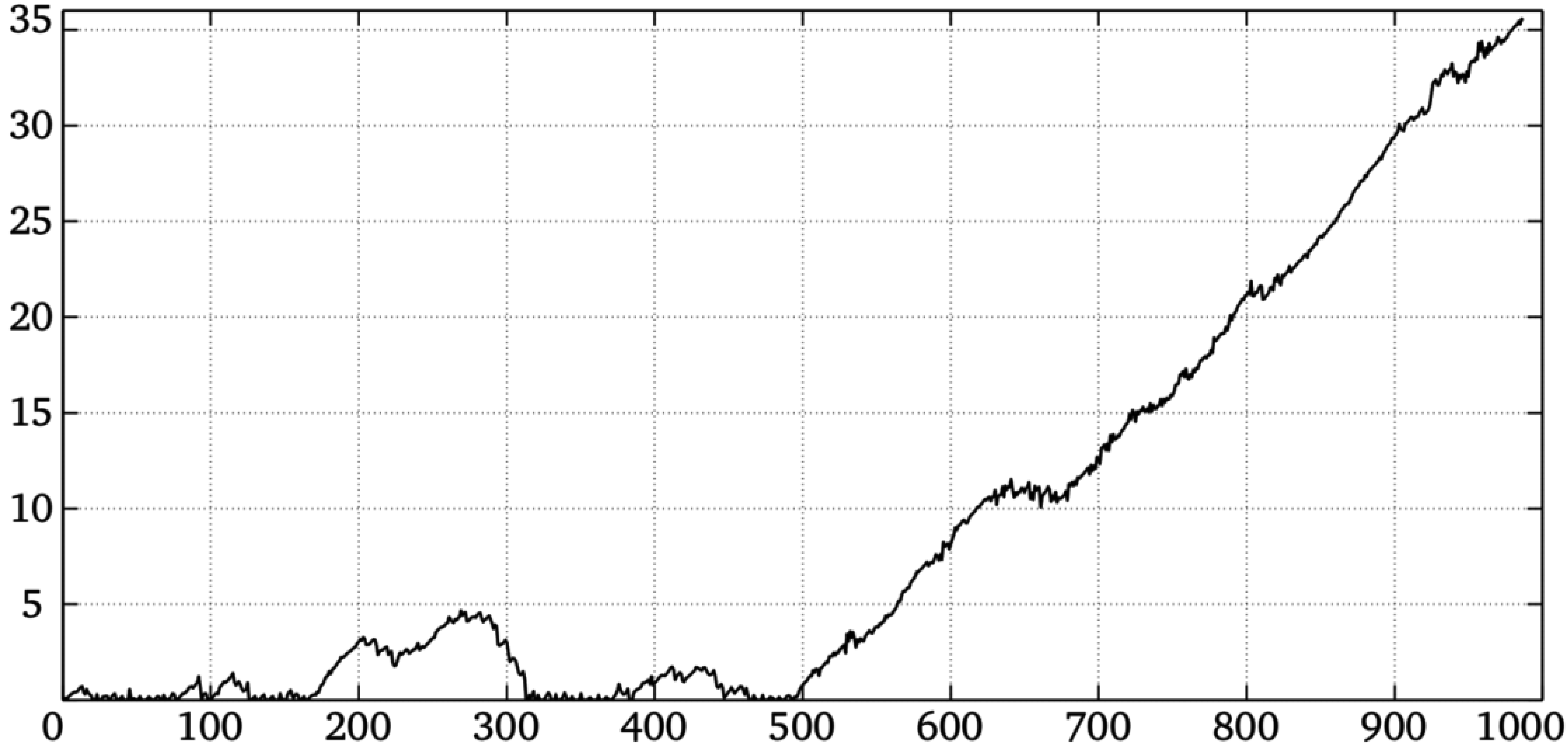
где $a'_1 = 0.1645, \ldots, a'_{14} = -0.0963$.

Составим статистики T_n так, что

$$T_n = \max\left\{0, T_{n-1} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma^2}\left(y_n - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)\right\}$$

(μ_1 и μ_2 получены соответственно по первым и последним значениям y_n, а σ^2 – по всем данным). Тогда мы имеем картину, показанную на следующем рисунке.

$$T_n = \max\Big\{0, T_{n-1} + \frac{\mu_2-\mu_1}{\sigma^2}\Big(y_n - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\Big)\Big\}$$



Отсюда уже четко видно, что “разладка” произошла около значения $n = 500$.

Недостатком описанной процедуры является то, что решение принималось по *всей* совокупности наблюдений для $n = 0, 1, \ldots, 1000$.

В реальной же ситуации, которой мы будем заниматься, наблюдения идут *последовательно*, в какой-то момент времени θ происходит “разладка” и мы по текущим наблюдениям должны построить момент остановки τ так, чтобы запаздывание (т. е. $\tau - \theta$, когда $\tau \geq \theta$) было как можно меньше, но чтобы в то же время была мала вероятность объявления ложной тревоги (т. е. $\mathsf{P}(\tau < \theta)$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Реальные задачи, где возникают описанные выше ситуации, — это, например, обнаружение момента

- запуска ракеты,
- начала землетрясения,
- смены финансового режима на рынке ценных бумаг.

2. Наш основной интерес будет связан со случаем *непрерывного* времени, и наблюдаемым процессом будет случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ (с "разладкой" в момент θ) такой, что

$$dX_t = \begin{cases} (a - \alpha X_t)\,dt + dW_t, & t < \theta, \\ (b - \beta X_t)\,dt + dW_t, & t \geq \theta, \end{cases} \qquad X_0 = 0. \qquad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В первых наших работах исследовался случай, когда

$$dX_t = bI(t \geq \theta)\,dt + dW_t, \qquad X_0 = 0, \qquad (2)$$

иначе говоря, $\alpha = \beta = a = 0$. Специалисты по радиотехнике сказали бы, что рассматривается модель "белого" шума, который имеет нулевое среднее до появления "разладки" и постоянное среднее b – после.

Далеко не ясен вопрос:

ЧТО ЕСТЬ МОМЕНТ “РАЗЛАДКИ” θ — является он

- неизвестным параметром

или же

- случайной величиной
  с каким-то распределением на $[0, \infty)$

?

Мы с самого начала будем считать θ

случайной величиной

с **экспоненциальным** распределением

$$\boxed{\mathsf{P}(\theta \geq t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0,}$$

и вот почему.

Если нет никаких соображений о моменте “разладки” θ, то естественно считать распределение θ **равномерным**. Однако на $[0, \infty)$ **такого распределения нет**, тем не менее можно говорить об “**условно равномерном** распределении”, понимая под этим

предельное образование
от экспоненциального распределения:

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} \mathsf{P}(\theta \in [a,b] \,|\, \theta \in [A,B]) = \frac{b-a}{B-A}}, \qquad [a,b] \subset [A,B].$$

(Этим объясняется и то, что в последующих выражениях мы часто будем полагать $\lambda \to 0$.)

3. Введем теперь важное понятие <u>момента остановки τ</u>, который будем интерпретировать как

<u>момент подачи сигнала "тревоги"</u>

<u>о появлении "разладки" θ</u>.

Пусть $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \le t)$ – это σ-алгебра, порожденная наблюдаемыми значениями X_s для $s \le t$. Случайную величину $\tau = \tau(X)$ называют **МОМЕНТОМ ОСТАНОВКИ**, если

<u>событие $\{\tau \le t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t^X$ при каждом $t \ge 0$.</u>

По-другому можно сказать, что

решение о том, что $\tau = t$,

- определяется всеми значениями X_s, $s \le t$,
- но не зависит от значений X_s после момента t.

Положим

$$u_t(X) = I(t < \tau(X)) = \begin{cases} 1, & t < \tau(X), \\ 0, & t \geq \tau(X), \end{cases} \tag{3}$$

иными словами,

управление u_t

- равно 1, если сигнала "тревоги" еще не было, и
- равно 0 после объявления "тревоги",

  когда наблюдения заканчиваются.

4. (Байесовская) постановка задачи обнаружения момента "разладки" θ может быть такой:

Пусть $\mathsf{P}(\theta = 0) = \pi$ и $\boxed{V(\pi) = \inf_\tau \Big[\mathsf{P}(\tau < \theta) + c\mathsf{E}(\tau - \theta)^+\Big]}$.

Если

$X = (X_t)_{t \ge 0}$ – наблюдаемый процесс и

$\pi_t = \mathsf{P}(\theta \le t \,|\, \mathcal{F}_t^X)$ – апостериорная вероятность,

то

$$\boxed{V(\pi) = \inf_\tau \mathsf{E}_\pi \Big[(1 - \pi_\tau) + c\int_0^\tau \pi_s\,ds\Big]},$$

где E_π – математическое ожидание при условии $\pi = \pi_0$.

НАЙТИ величину $V(\pi)$ и момент τ, на котором этот инфимум достигается.

Используя аналоги формулы Гирсанова для диффузионных процессов, находим, что

$$\begin{aligned} d\pi_t = \Big[\lambda - \pi_t^2(B_t - A_t)^2\Big](1-\pi_t)\,dt \\ + \pi_t(1-\pi_t)(B_t - A_t)(dX_t - A_t\,dt), \end{aligned} \tag{4}$$

где $A_t = a - \alpha X_t$ и $B_t = b - \beta X_t$. Поскольку

$$dX_t = \Big[A_t I(t \le \theta) + B_t I(t \ge \theta)\Big]\,dt + dW_t,$$

в силу обновляющего представления получаем, что

$$dX_t = [A_t(1-\pi_t) + B_t\pi_t]\,dt + d\overline{W}_t, \tag{5}$$

где $\overline{W} = (\overline{W}_t)_{t\ge0}$ – некоторый $(\mathcal{F}_t^X)_{t\ge0}$-адаптированный винеровский процесс. Поэтому из формулы (4) находим, что

$$\boxed{d\pi_t = \lambda(1-\pi_t)\,dt + \pi_t(1-\pi_t)(B_t - A_t)\,d\overline{W}_t}\,.$$

Итак, $\boxed{d\pi_t = \lambda(1-\pi_t)\,dt + \pi_t(1-\pi_t)(B_t - A_t)\,d\overline{W}_t}$.

В частности, для модели

$$dX_t = \begin{cases} dW_t, & t < \theta, \\ \boldsymbol{b\,dt} + dW_t, & t \geq \theta, \end{cases} \qquad \text{где } \; b \neq 0, \tag{6}$$

имеем

$$\boxed{d\pi_t = \lambda(1-\pi_t)\,dt + b\pi_t(1-\pi_t)\,d\overline{W}_t}.$$

А для модели

$$dX_t = \begin{cases} (\boldsymbol{a} - \alpha X_t)\,dt + dW_t, & t < \theta, \\ (\boldsymbol{b} - \alpha X_t)\,dt + dW_t, & t \geq \theta, \end{cases} \tag{7}$$

получаем

$$\boxed{d\pi_t = \lambda(1-\pi_t)\,dt + (b-a)\pi_t(1-\pi_t)\,d\overline{W}_t}.$$

Несколько изменяя обозначения, будем сейчас вместо модели $dX_t = bI(t \geq \theta)\,dt + dW_t$ рассматривать модель

$$dX_t = \mu I(t \geq \theta)\,dt + \sigma\,dW_t. \tag{8}$$

Тогда

$$d\pi_t = \lambda(1-\pi_t)\,dt + \frac{\mu}{\sigma}\pi_t(1-\pi_t)\,d\overline{W}_t. \tag{9}$$

Процесс $(\pi_t)_{t\geq 0}$ является однородным марковским процессом с инфинитезимальным оператором

$$\mathcal{A} = \lambda(1-\pi)\frac{d}{d\pi} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu}{\sigma}\Big)^2\pi^2(1-\pi)^2\frac{d^2}{d\pi^2}. \tag{10}$$

Согласно общей теории оптимальных правил остановки, для нахождения $V(\pi) = \inf_\tau \mathsf{E}_\pi\Big[(1-\pi_\tau) + c\int_0^\tau \pi_s\,ds\Big]$ надо решить **задачу (Дирихле–)Стефана**

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A}V(\pi) &= -c\pi, \quad 0 < \pi < A^*; \\ V(\pi) &= 1-\pi, \quad \pi \ge A^*, \end{aligned}} \tag{11}$$

и **оптимальный момент τ^* – это $\tau^* = \inf\{t\colon \pi_t \ge A^*\}$**.

Таким образом, общая теории говорит, что в области $(0, A^*)$, где наблюдения продолжаются, у нас действует оператор $\mathcal{A}$, а в области $(A^*, 1]$ наблюдения стоит прекращать.

Но A^* нам неизвестно. И хотя одно условие, $V(\pi) = 1-\pi$ при $\pi = A^*$, у нас уже есть, этого все еще мало для решения задачи (11).

Уравнение $\mathcal{A}V(\pi) = -c\pi$ – это уравнение второго порядка и, значит, в выражении для его общего решения есть **ДВЕ** неопределенные константы. А поскольку константу A^* мы тоже не знаем, то **неизвестных констант всего ТРИ**.

В то же время для их определения у нас пока есть только **ОДНО** условие: $\boxed{V(A^*) = 1 - A^*}$.

Можно показать, что другие два условия таковы:

- условие **гладкого склеивания**

$$\boxed{\left.\frac{dV(\pi)}{d\pi}\right|_{\pi=A^*} = \left.\frac{d(1-\pi)}{d\pi}\right|_{\pi=A^*}}$$

- условие

$$\boxed{\left.\frac{dV(\pi)}{d\pi}\right|_{\pi\downarrow 0} = 0}.$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\boxed{\mathcal{A}V(\pi) = -c\pi}$$

(сейчас мы обозначаем $F(\pi) = V(\pi)$). Тогда имеем

$$\lambda(1-\pi)F'(\pi) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\pi^2(1-\pi)^2F''(\pi) = -c\pi.$$

Полагая $\nu = \mu^2/(2\sigma^2)$ (отношение “сигнал–шум”) и $\Lambda = \lambda/\nu$, $C = c/\nu$, получаем, что величина $y(\pi) = F'(\pi)$ удовлетворяет уравнению

$$\boxed{y'(\pi) = -\frac{C\pi + \Lambda(1-\pi)y(\pi)}{\pi^2(1-\pi)^2}}.$$

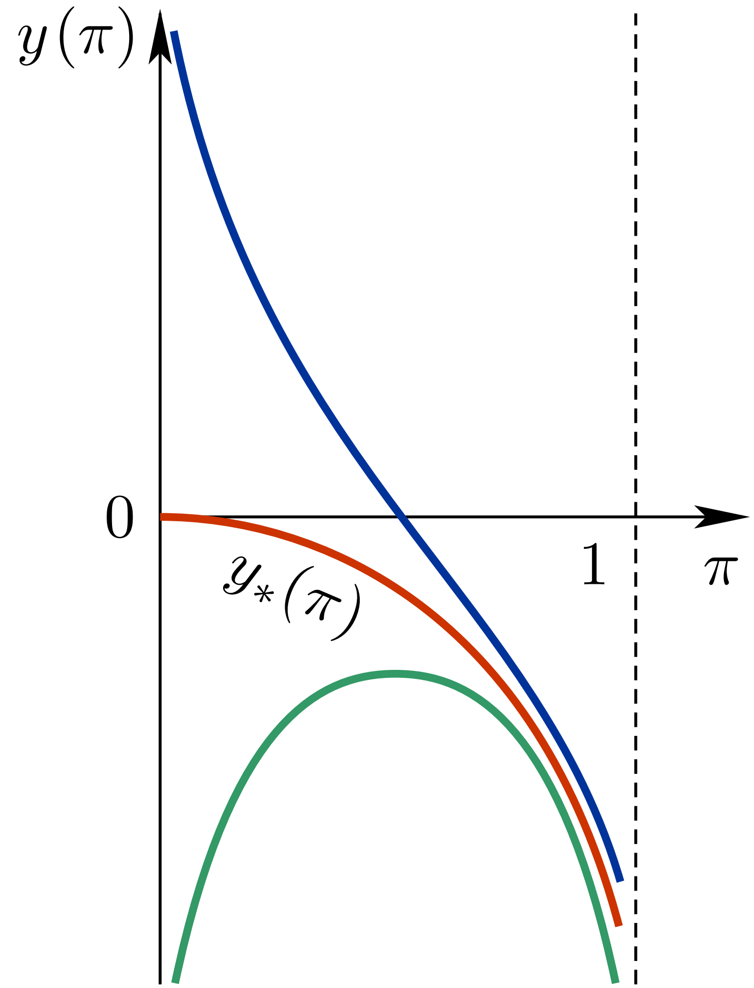
Это уравнение имеет сингулярность в точке $\pi = 0$. При этом можно видеть, что среди интегральных кривых существует

$\boxed{\textbf{СЕПАРАТРИСА} \quad y_* = y_*(\pi)}$,

входящая в точку $\pi = 0$, т. е. $y_*(0) = 0$, которая разделяет все остальные интегральные кривые $y = y(\pi)$ на два класса:

такие, что $\lim\limits_{\pi \downarrow 0} y(\pi) = \infty$ (**blue**), и

такие, что $\lim\limits_{\pi \downarrow 0} y(\pi) = -\infty$ (**green**).



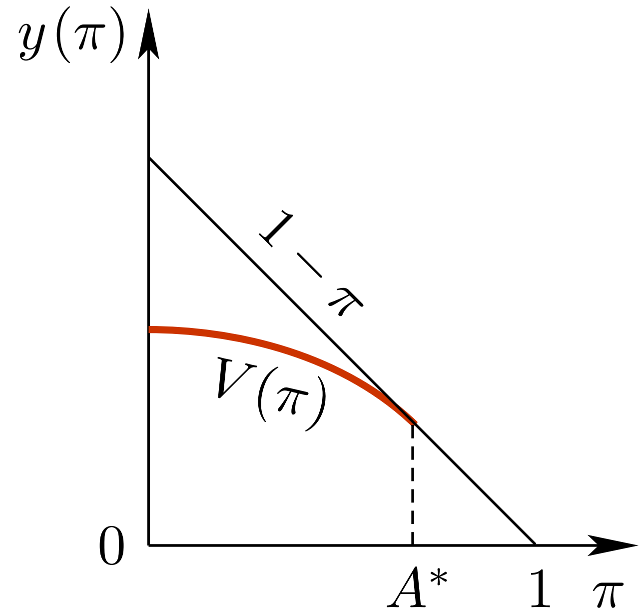
Тем самым решение задачи об оптимальной остановке

$$V(\pi) = \inf_{\tau} \mathsf{E}_{\pi}\left[(1-\pi_\tau) + c\int_0^\tau \pi_s\,ds\right]$$

сводится к решению следующей **задачи (Дирихле–)Стефана**:

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}V(\pi) = -c\pi, \qquad 0 < \pi < A^*; \\
V(\pi) = 1 - \pi, \qquad \pi \ge A^*; \\
\left.\frac{dV(\pi)}{d\pi}\right|_{\pi=A^*} = \left.\frac{d(1-\pi)}{d\pi}\right|_{\pi=A^*}; \\
V'(\pi)\Big|_{\pi\downarrow 0} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Вид $V(\pi)$ представлен на рисунке:



Задача (12) допускает полное решение – можно найти и функцию $V(\pi)$, и оптимальный порог A^*.

Имеем

$$
\begin{aligned}
V(0) &= \inf_\tau \Big[\mathsf{P}(\tau < \theta) + c\mathsf{E}(\tau - \theta)^+ \Big] \\
&= \mathsf{P}(\tau^* < \theta) + c\mathsf{E}(\tau^* - \theta \,|\, \tau^* \geq \theta)\mathsf{P}(\tau^* \geq \theta) \\
&= \alpha^* + c\mathsf{E}(\tau^* - \theta \,|\, \tau^* \geq \theta)(1 - \alpha^*),
\end{aligned}
$$

где $\alpha^* = 1 - A^*$, поскольку

$$
\mathsf{P}(\tau^* < \theta) = \mathsf{E}(1 - \pi_{\tau^*}) = 1 - A^*.
$$

Величины $\mathsf{P}(\tau^* < \theta)$ и $\mathsf{E}(\tau^* - \theta \,|\, \tau^* \geq \theta)$, конечно же, зависят от c и значения $\nu = \mu^2/(2\sigma^2)$ (отношение "сигнал–шум"), причем непрерывным образом. Поэтому при заданной вероятности "ложной тревоги" α можно найти такое c_α, что α^* $(= \alpha^*(c_\alpha))$ будет в точности равно α. При таком α^* можно найти и время запаздывания $\mathsf{R}(\alpha, \lambda) = \mathsf{E}(\tau^*_\alpha - \theta \,|\, \tau^*_\alpha \geq \theta)$, где τ^*_α есть соответствующий момент остановки:

$$\tau^*_\alpha = \inf\{t\colon \pi_t \geq A^*_\alpha\}, \quad \text{где} \quad A^*_\alpha = 1 - \alpha^*(c_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Вычисления показывают, что

$$\mathsf{R}(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\nu(1-\alpha)} \int_0^{1-\alpha} \left[\int_0^x e^{(\lambda/\nu)[H(\alpha)-H(u)]} \frac{du}{u(1-u)^2} \right] dx,$$

где $H(u) = \log(u/(1-u)) - 1/u$, – это следует из того, что решение задачи Дирихле–Стефана может быть найдено:

$$V(\pi) = \begin{cases} (1-A^*) - \int_\pi^{A^*} y(x)\,dx, & \pi \in [0, A^*), \\ 1-\pi, & \pi \in [A^*, 1], \end{cases}$$

где

$$y(x) = -C \int_0^x e^{\Lambda[H(x)-H(u)]} \frac{du}{u(1-u)^2}, \qquad H(u) = \log \frac{u}{1-u} - \frac{1}{u},$$

а граничная точка A^* определяется из условия гладкого склеивания:

$$C \int_0^{A^*} e^{\Lambda[H(A^*)-H(u)]} \frac{du}{u(1-u)^2} = 1.$$

Интересно отметить, что если

$$\lambda \to 0, \quad \alpha \to 1 \quad \text{так, что} \quad \frac{1-\alpha}{\lambda} = T \quad \text{или} \quad \frac{1-\alpha}{\lambda} \to T,$$

то для $\mathbf{R}(T) = \lim \mathsf{R}(\alpha, \lambda)$ верна формула

$$\mathbf{R}(T) = \frac{1}{\nu}\left\{ e^{b}[-\operatorname{Ei}(-b) - 1] + b\int_0^\infty e^{-bu}\,\frac{\log(1+u)}{u}\,du \right\}, \qquad (13)$$

где

$$b = \frac{1}{\nu T} \quad \text{и} \quad -\operatorname{Ei}(-b) = \int_b^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Величина T имеет простой смысл: это есть среднее величины τ_T, являющейся временем до объявления “ложной” тревоги. Вытекает это из следующих рассмотрений.

Положим $\varphi_t = \pi_t/(1-\pi_t)$. Тогда φ_t $(=\varphi_t(\lambda))$ будет удовлетворять уравнению

$$d\varphi_t = \lambda(1+\varphi_t)\,dt + \frac{\mu}{\sigma^2}\varphi_t\,dX_t.$$

В случае отсутствия "разладки" имеем

$$dX_t = \sigma\,dB_t.$$

Введем

$$\Psi_t(\lambda) = \frac{\varphi_t(\lambda)}{\lambda} \quad \text{и} \quad \Psi_t = \lim_{\lambda \downarrow 0} \Psi_t(\lambda).$$

Тогда, так как $d\Psi_t(\lambda) = (1+\lambda\Psi_t(\lambda))\,dt + (\mu/\sigma)\Psi_t(\lambda)\,dB_t$, процесс $(\Psi_t)_{t\ge 0}$ подчиняется уравнению

$$d\Psi_t = dt + \frac{\mu}{\sigma}\Psi_t\,dB_t.$$

Если τ_T – момент первого достижения процессом $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ уровня T, то

$$\Psi_{\tau_T} = \tau_T + \frac{\mu}{\sigma}\int_0^{\tau_T} \Psi_u\, dB_u, \quad \text{а значит,} \quad \mathsf{E}\Psi_{\tau_T} = \mathsf{E}\tau_T.$$

Так как $\Psi_{\tau_T} = T$, то $\mathsf{E}\tau_T = T$ (здесь E – математическое ожидание в отсутствие "разладки").

Из формулы (13) для запаздывания $\mathbf{R}(T)$ находим (при $\nu = 1$), что

$$\mathbf{R}(T) = \begin{cases} \log T - 1 - \mathbb{C} + O\Big(\dfrac{\log T}{T}\Big), & T \to \infty, \\ \dfrac{T}{2} + O(T^2), & T \to 0, \end{cases}$$

где $\mathbb{C} = 0.577\ldots$ – константа Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в качестве величины запаздывания брать

$$\mathbf{B}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^T \mathsf{E}^t(\tau - t)^+ \, dt,$$

где $\mathfrak{M}_T = \{\tau \colon \mathsf{E}^\infty \tau = T\}$, а E^t – математическое ожидание в предположении, что "разладка" появилась в момент t, то (при $\nu = 1$) получим

$$\mathbf{B}(T) = \log T - 1 - \mathbb{C} + O\Big(\frac{\log^2 T}{T}\Big), \qquad T \to \infty.$$

Если

$$\mathbf{C}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{t \ge 0} \mathsf{E}^t(\tau - t \,|\, \tau \ge t),$$

то при больших T найдем, что

$$\log T - 1 - \mathbb{C} + O\Big(\frac{\log^2 T}{T}\Big) = \mathbf{B}(T) \le \mathbf{C}(T) \le \log T - \mathbb{C} + O\Big(\frac{\log^2 T}{T}\Big).$$

Если

$$\mathbf{D}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{t \geq 0} \operatorname{ess\,sup}_{\omega} \mathsf{E}^t[(\tau - t)^+ \mid \mathcal{F}_t](\omega),$$

то

$$\mathbf{D}(T) = \log T - 1 + O\left(\frac{1}{T}\right), \qquad T \to \infty.$$

И вообще, при любых $\nu = \mu^2/(2\sigma^2)$ и больших T

$$\mathbf{B}(T) = \frac{1}{\nu}\left[\log(\nu T) - 1 - \mathbb{C} + O\left(\frac{\log^2(\nu T)}{\nu T}\right)\right].$$

Аналогичным образом ν участвует и в выражениях для других величин ($\mathbf{R}(T)$, $\mathbf{C}(T)$, $\mathbf{D}(T)$).

Более общий случай, когда требуется оптимизировать момент остановки τ, представляют задачи вида

$$V(x) = \sup_{(u,\tau)} \mathsf{E}_x \left[G(X^u_\tau, u_\tau) + \int_0^\tau L(X^u_t, u_t)\, dt + \sup_{0 \le t \le \tau} K(X^u_t, u_t) \right],$$

где $X^u = (X^u_t)_{t \ge 0}$ – управляемый диффузионный процесс:

$$dX^u_t = a(X^u_t, u_t)\, dt + \sigma(X^u_t, u_t)\, dB_t.$$

Конечно, при $\tau \equiv T$ и $\sigma \equiv 0$ этот класс задач напоминает обычные задачи оптимального управления.

5. Рассмотренная выше задача есть частный случай следующей более общей задачи об оптимальной остановке (типа задача Больца):

$$\boxed{V(x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}_x \Big[\underbrace{G(X_\tau)}_{\text{Майер}} + \underbrace{\int_0^\tau L(X_t)\,dt}_{\text{Лагранж}} + \sup_{0\le t\le\tau} K(X_t) \Big]}\ .$$

(Вместо супремума можно рассматривать инфимум.)

Выше процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ был d-мерным однородным марковским процессом с инфинитезимальным оператором

$$L_X f(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathsf{E}_x f(X_t) - f(x)}{t},$$

имеющим вид

$$L_X f(x) = \lambda(x) f(x) + \sum_{i=1}^{d} \mu_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x)$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left[f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right] \nu(x, dy),$$

где $\nu(\cdot,\cdot)$ – компенсатор меры скачков процесса X (т. е. $\mu - \nu$, где μ – мера скачков, является мартингальной мерой).

Чтобы пояснить способ отыскания оптимального момента τ^*, рассмотрим случай Майера

$$V(x) = \sup_\tau \mathsf{E}_x G(X_\tau).$$

Если τ^* есть оптимальный момент (т. е. $\mathsf{E}_x G(S_{\tau^*}) = V(x)$), то можно показать, что

- $V(x)$ является наименьшей супергармонической функцией ($\mathsf{E}_x V(X_\sigma) \le V(x)$ для всех конечных моментов остановки σ), доминирующей функцию $G(x)$ ($V(x) \ge G(x)$);
- если $C^* = \{x\colon V(x) > G(x)\}$ и $D^* = \{x\colon V(x) = G(x)\}$, то момент

$$\tau_{D^*} = \inf\{t \ge 0\colon X_t \in D^*\} \tag{14}$$

  является оптимальным;
- момент (14) является наилучшим среди всех оптимальных моментов τ^*, т. е. $\tau_{D^*} \le \tau^*$ (P_x-п.н. для всех x).

6. Отметим несколько фактов о моментах остановки, порождаемых броуновским движением $B = (B_t)_{t \geq 0}$, т.е. таких, что

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s,\, s \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Введем следующие определяемые броуновским движением моменты ($a > 0$):

$$\begin{aligned}
\tau_a &= \inf\{t \geq 0 \colon B_t = a\},\\
\sigma_a &= \inf\{t \geq 0 \colon |B_t| = a\},\\
\tau_{a,b} &= \inf\{t \geq 0 \colon B_t \geq a + bt\},\\
\sigma_{a,b} &= \inf\{t \geq 0 \colon B_t \notin (-a + bt, a + bt)\}.
\end{aligned}$$

Для этих моментов известны плотности распределения вероятностей или преобразование Лапласа: при $t \geq 0$

$\tau_a = \mathsf{inf}\{t \geq 0\colon B_t = a\}$: $$\boxed{p_{\tau_a}(t) = \frac{a}{t}\varphi_t(a)}$$

$\sigma_a = \mathsf{inf}\{t \geq 0\colon |B_t| = a\}$: $$\boxed{\begin{aligned} p_{\sigma_a}(t) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,&\frac{a(1+2k)}{t}\\ &\times\varphi_t(a(1+2k))\end{aligned}}$$

$\tau_{a,b} = \mathsf{inf}\{t \geq 0\colon B_t \geq a+bt\}$: $$\boxed{p_{\tau_{a,b}}(t) = \frac{a}{t}\varphi_t(a+bt)}$$

$\sigma_{a,b} = \mathsf{inf}\{t \geq 0\colon B_t \notin (-a+bt, a+bt)\}$:

$$\boxed{\mathsf{E}\,\mathsf{exp}\{-\lambda\sigma_{a,b}\} = 2\,\mathsf{ch}(ab)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\ \mathsf{exp}\Big\{(1+2k)a\sqrt{2\lambda+b^2}\Big\}}.$$

$$\text{Здесь } \varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,\mathsf{exp}\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}.$$

Вообще, если для непрерывной функции $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ такой, что $g(0) \geq 0$, положить

$$\tau = \tau_g = \inf\{t \geq 0\colon B_t \geq g(t)\}$$

и ввести функцию распределения $F(s) = \mathsf{P}(\tau \leq s)$, то имеет место **уравнение Вольтерра**

$$\boxed{\Psi\left(\frac{g(t)}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^t \Psi\left(\frac{g(t) - g(s)}{\sqrt{t - s}}\right) F(ds)}, \qquad (15)$$

где $\Psi(x) = 1 - \Phi(x)$ и $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$.

Это уравнение связывает границу $g(t)$, $t \geq 0$, с распределением $F(x) = \mathsf{P}(\tau_g \leq x)$.

Например, в случае функции $g(t) = a + bt$, $a > 0$, уравнение имеет вид

$$\Psi\left(\frac{g(t)}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^t \Psi\left(b\sqrt{t-s}\right) f(s)\, ds, \quad \text{где} \quad f(x) = F'(x),$$

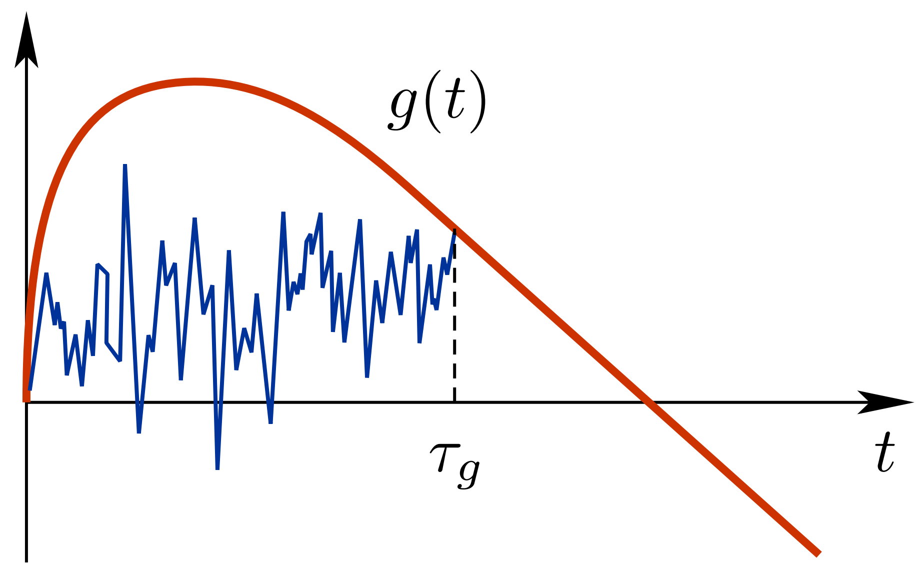
и его решение $f(s)$ таково:

$$f(s) = \frac{a}{t^{3/2}}\,\varphi\left(\frac{a+bs}{\sqrt{s}}\right), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Уравнение Вольтерра (15) весьма трудно для решения. Например, до сих пор не известна та граница, для которой $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, т. е. неизвестна та граница $g = g(t)$, для которой

$$\mathsf{P}(\tau_g \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

Хотя и ясно, что граница $g = g(t)$ должна иметь примерно такой вид:



6. Приведем ряд рассмотренных нами **(Ширяев, Житлухин, Муравлев)** конкретных задач, в которых

НАЙДЕНЫ

ОПТИМАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ОСТАНОВКИ,

которые оказываются

моментами первого выхода

на (подлежащие определению) границы

области остановки наблюдения.

Хорошо известно, что для броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$

$$\mathsf{E}|B_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi} t} \text{ для всякого } t \geq 0.$$

Вопрос: что будет, если вместо t взять момент остановки τ?

Оказывается, что

$$\boxed{\mathsf{E}|B_\tau| \leq \mathbf{z}_1^* \mathsf{E}\sqrt{\tau},}$$

где $\mathbf{z}_1^*$ находится как единственный положительный корень уравнения Куммера:

$$M(-{}^1\!/\!_2, {}^1\!/\!_2, {}^{z^2}\!/\!_2) = 0.$$

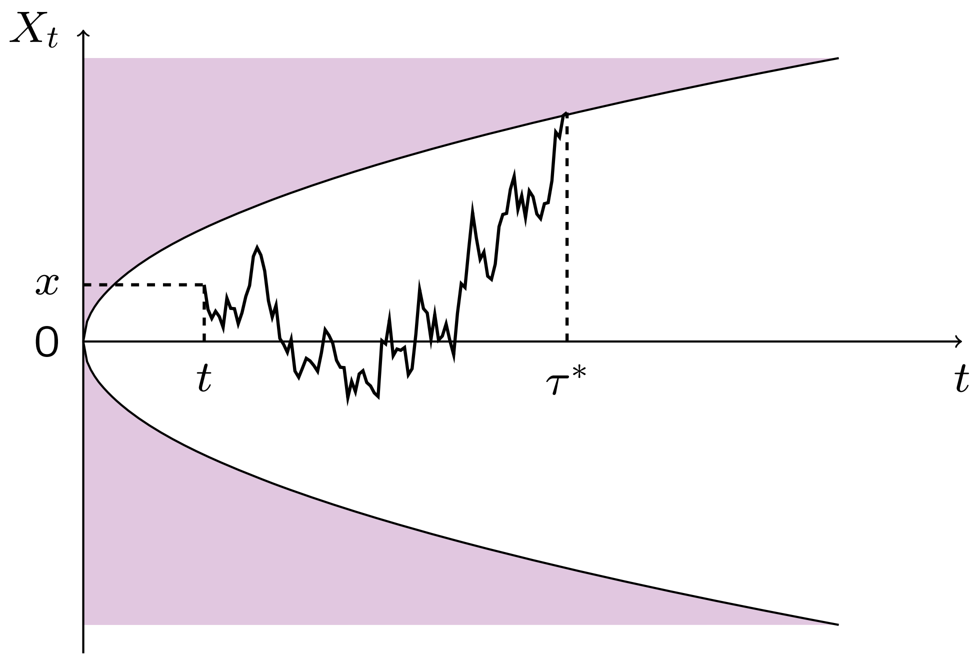
$\Big\langle$ Конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера определяется формулой

$$M(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots \Big\rangle$$

Для решения задачи получения оценки $\mathsf{E}|B_\tau| \le \mathbf{z}_1^* \mathsf{E}\sqrt{\tau}$ мы первоначально рассматриваем задачу об оптимальной остановке

$$V(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\Big(|x + B_\tau| - c\sqrt{t+\tau}\Big).$$

Оптимальный момент представлен на следующем рисунке:



$$\tau^* = \inf\big\{r > 0 : |B_r| \ge z_* \sqrt{t+r}\big\}$$

Значение z_* находится как единственный положительный корень: $z^{-1} M(-1/2, 1/2, z^2/2) = (c - z) M(1/2, 3/2, z^2/2)$.

Другой пример. Пусть наблюдается процесс

$$\boxed{X_t = \mu t + B_t, \quad t \geq 0,}$$

и по наблюдениям **различаются две сложные гипотезы**

$$\boxed{H_+ : \mu > 0} \quad \text{и} \quad \boxed{H_- : \mu \leq 0,}$$

причем $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ — случайная величина. Функция риска:

$$R(\tau, d) = \mathsf{E}\Big[c\tau + k|\mu|\,\mathbf{I}\big(d \neq \operatorname{sgn}\mu\big)\Big],$$

где d — решение, принимаемое в момент τ окончания наблюдений.

Было показано (**М. Житлухин, А. Муравлев**), что эта задача сводится к задаче об оптимальной остановке для броуновского движения:

$$\boxed{V_{\mu_0,\sigma_0^2} = \inf_\tau \mathsf{E}\left[\frac{2}{\sigma_0^2(1-\tau)} - \left|B_\tau + \frac{\mu_0}{\sigma_0}\right|\right]}$$

Оказалось, что оптимальный момент $\tau^* = \tau^*(\mu_0, \sigma_0^2)$ имеет вид

$$\tau^*\Big(\mu_0, \sigma_0^2\Big) = \inf\Big\{0 \le t \le 1 : \Big|B_t + \frac{\mu_0}{\sigma_0}\Big| \ge a_{\sigma_0}(t)\Big\},$$

где $a_{\sigma_0}(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ — невозрастающая функция, являющаяся **единственным** **решением интегрального уравнения**

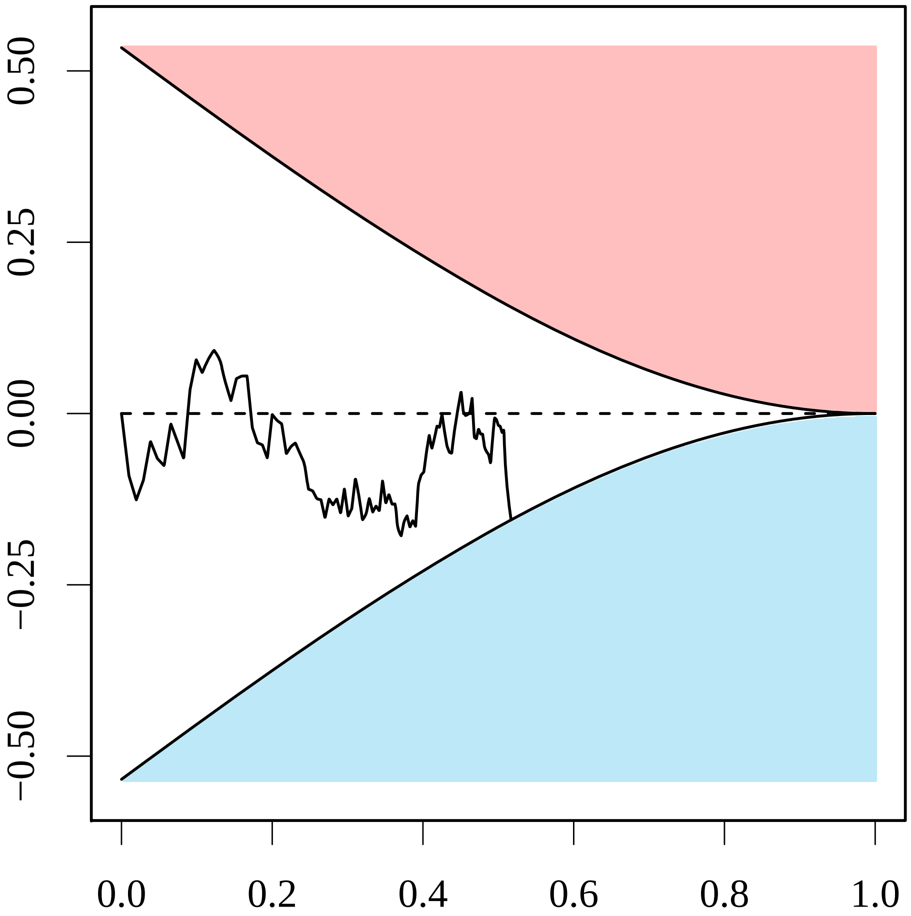
$$\frac{G(1-t, a(t))}{(1-t)} = \int_t^1 \frac{2}{\sigma_0^2(1-s)^2}\left[\Phi\left(\frac{a(s)-a(t)}{\sqrt{s-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-a(s)-a(t)}{\sqrt{s-t}}\right)\right] ds$$

в классе функций $a(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a(1) = 0, \quad a(t) > 0 \text{ при } t < 1, \\ \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{(1-s)^2}\left[\Phi\left(\frac{a(s)-x}{\sqrt{s-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-a(s)-x}{\sqrt{s-t}}\right)\right] ds < \infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Здесь $G(t,x) = (1/\sqrt{t})\,\varphi(x/t) - (|x|/\sqrt{t})\Phi(-|x|/t)$; $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ — плотность и функция распределения закона $\mathcal{N}(0,1)$.

Функция $a_{\sigma_0}(t)$ была найдена численно путем решения полученного интегрального уравнения методом индукции назад.



$$d^* = \begin{cases} 1 & \text{в } \square, \\ -1 & \text{в } \square. \end{cases}$$

На рисунке представлены оптимальные границы остановки и правило принятия решения.

Приведем еще один результат (М. Житлухин, А. Ширяев) — о **последовательном различении трех гипотез** по наблюдениям за процессом

$$\boxed{X_t = \mu t + B_t, \quad t \geq 0,}$$

где μ может принимать три значения

$$\boxed{H_{-1}\colon \mu = -1}, \qquad \boxed{H_0\colon \mu = 0} \quad \text{и} \quad \boxed{H_1\colon \mu = 1}$$

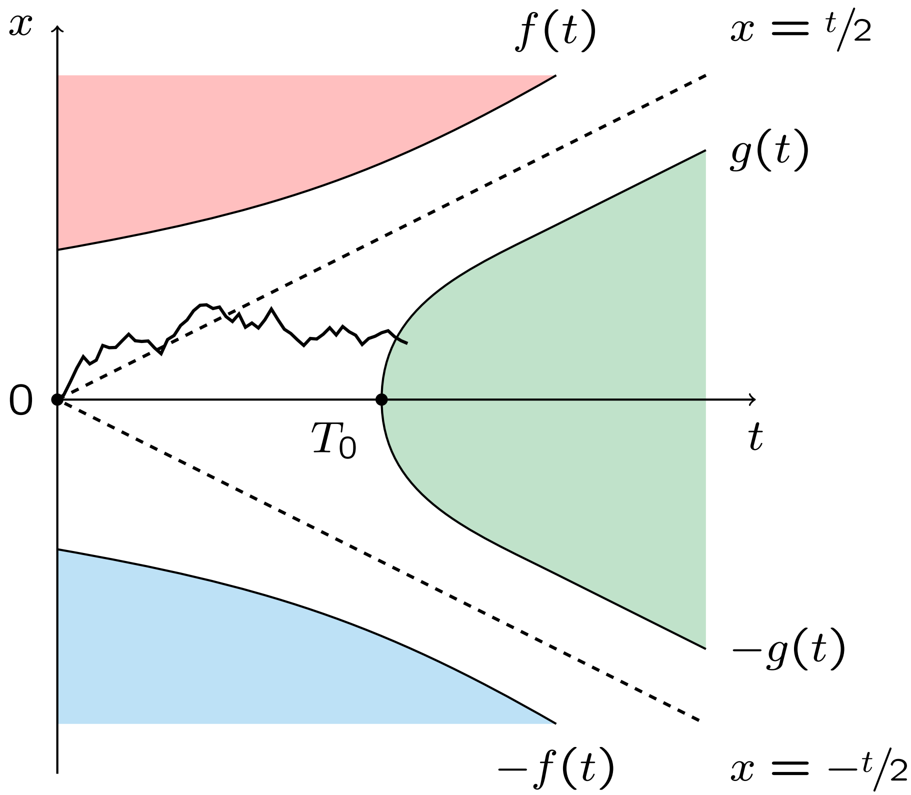
с априорными вероятностями $(1/3, 1/3, 1/3)$. Функция риска есть

$$R(\tau, d) = \mathsf{E}[c\tau + W(\mu, d)],$$

где τ —момент прекращения наблюдений, $d \in \{-1, 0, 1\}$ и функция штрафа такова:

$$W(\mu_i, j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \\ 1 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

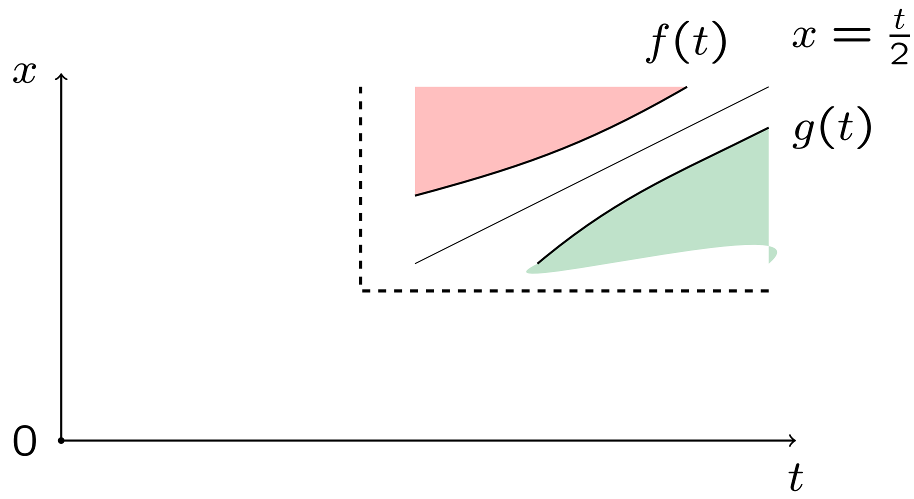
Относительно оптимального **момента остановки** τ^* и правила **принятия решения** d^* в этой задаче приведем лишь рисунок, описывающий их графически:



$$d^* = \begin{cases} 1 & \text{в } \boxed{}\,, \\ 0 & \text{в } \boxed{}\,, \\ -1 & \text{в } \boxed{}\,. \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, были найдены **интегральные уравнения**, описывающие функции f и g. $\boxed{1}$

Интересно отметить, что **оптимальные границы** оказываются отделены от прямых $x = t/2$ и $x = -t/2$ на бесконечности. На рисунке изображено поведение границ $f(t)$ и $g(t)$ при больших t.



Было установлено, что при $t \to \infty$

$$\boxed{f(t) = \frac{t}{2} + B + o(e^{-t})} \quad \text{и} \quad \boxed{g(t) = \frac{t}{2} - B + o(e^{-t}),}$$

где $B > 0$ — единственный корень уравнения

$$e^{B} - e^{-B} + 2B = \frac{1}{2c}.$$

Интерес представляет ситуация, когда **величина** возникающего сноса μ **заранее не известна**. Рассматривалась (А. Муравлев) соответствующая задача в предположении, что снос μ может принимать **два значения** $\mu_1 < 0$ и $\mu_2 > 0$:

$$X_t = \begin{cases} \sigma B_t & \text{при } t < \theta; \\ \mu_1(t-\theta) + \sigma B_t & \text{при } t \geq \theta, \qquad \text{если } \mu = \mu_1, \\ \qquad\qquad \text{или} & \\ \mu_2(t-\theta) + \sigma B_t & \text{при } t \geq \theta, \qquad \text{если } \mu = \mu_2. \end{cases}$$

$\langle$Как и ранее, разладка θ распределена экспоненциально.$\rangle$

Функция риска $R(\tau, d)$ представляет собой сумму компоненты, отвечающей за **обнаружение разладки**:

$$\boxed{\mathsf{P}(\tau < \theta) + c\,\mathsf{E}(\tau - \theta)^+,}$$

и компоненты, отвечающей за **определение величины сноса**:

$$\boxed{a\,\mathsf{P}(\mu = \mu_1, d = 2) + b\,\mathsf{P}(\mu = \mu_2, d = 1).}$$

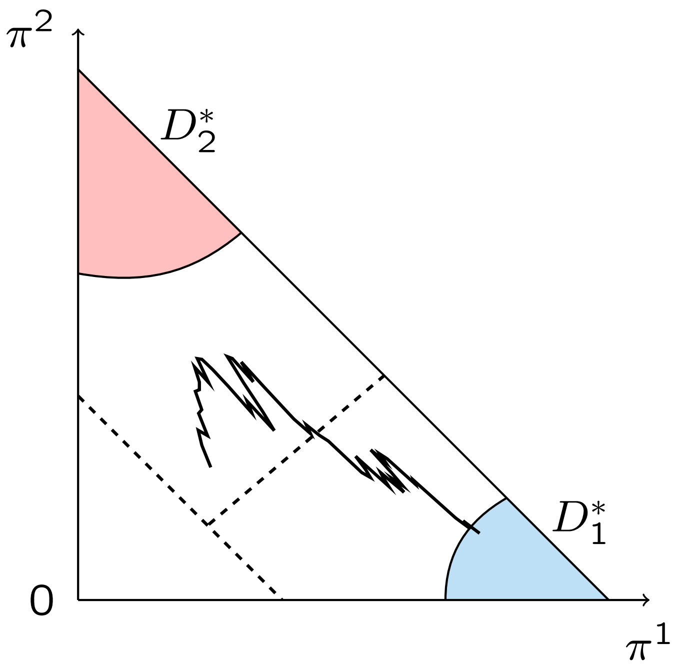
Оптимальный момент остановки τ^* в данной задаче имеет вид

$$\tau^* = \inf\Big\{t \geq 0 : \pi_t \in \partial D^*\Big\},$$

где **двумерный** процесс $\pi_t = (\pi_t^1, \pi_t^2)$ определяется так:

$$\pi_t^i = \mathsf{P}\Big(\theta \leq t, \mu = \mu_i \,\Big|\, X_s, s \leq t\Big), \qquad i = 1, 2.$$

Соответствующие <u>область остановки</u> $D^* = D_1^* \cup D_2^*$ и правило <u>принятия решения</u> d^* представлены на следующей картинке:



$$d^* = \begin{cases} 2 & \text{в } \boxed{}\,, \\[2ex] 1 & \text{в } \boxed{}\,. \end{cases}$$

Рассмотрим процесс броуновского движения, у которого в момент **разладки** $\theta \le T$ значение сноса меняется с $\mu_1 > 0$ на $\mu_2 < 0$, что можно записать в дифференциальной форме:

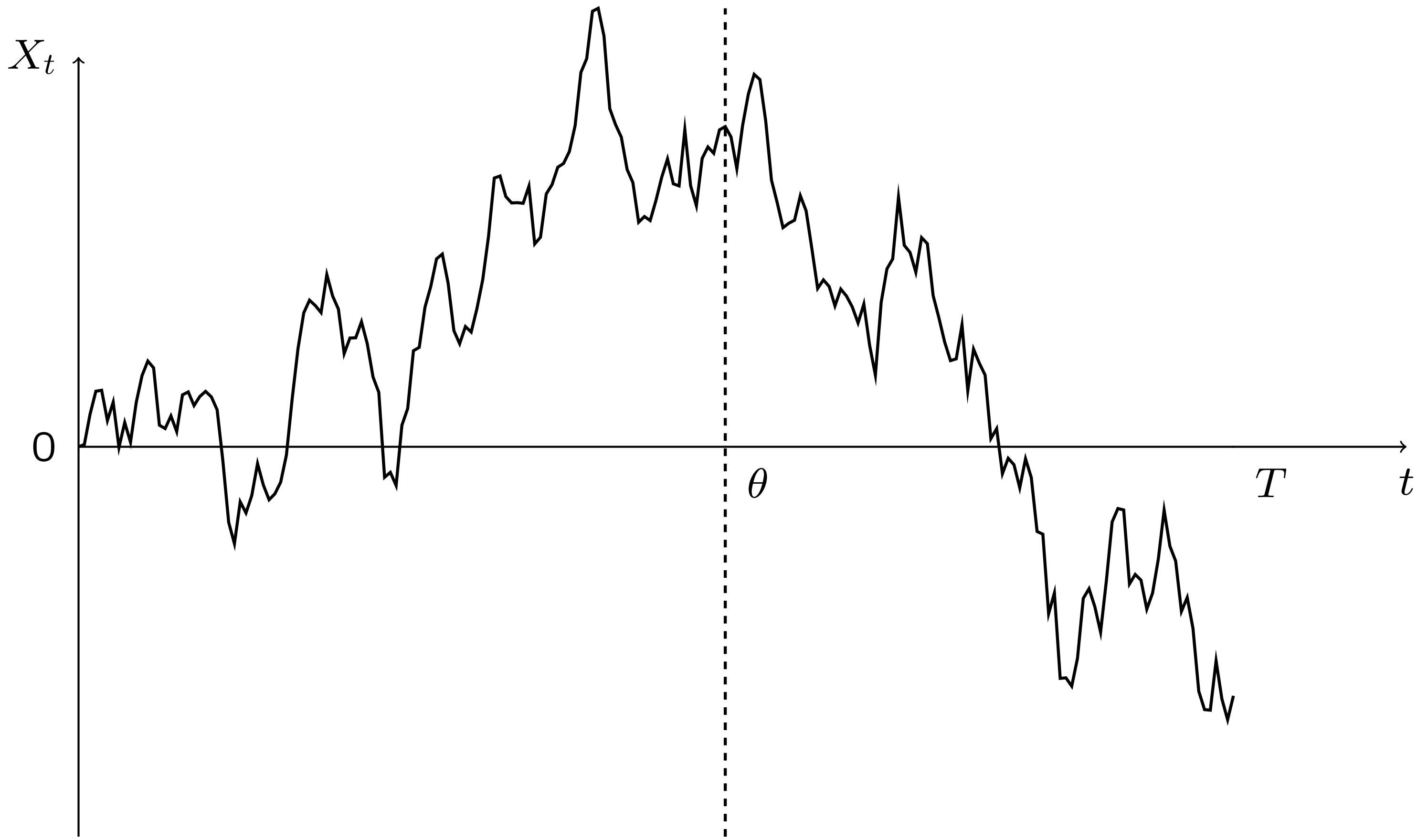
$$dX_t = \Big[\mu_1 \mathbf{I}\Big(t < \theta\Big) + \mu_2 \mathbf{I}\Big(t \ge \theta\Big)\Big]\, dt + \sigma\, dB_t.$$

Предполагается, что θ **равномерно** распределено на $[0, T]$.

Для процесс X были исследованы задачи о выборе оптимального момента τ для двух функций выигрыша следующего вида:

$$\boxed{V^{(1)} = \sup_{\tau \le T} \mathsf{E} X_\tau} \quad \text{и} \quad \boxed{V^{(2)} = \sup_{\tau \le T} \mathsf{E} \exp\left(X_\tau - \frac{1}{2}\tau\right).}$$

Типичная траектория процесса X:



Момент θ нам заранее **не известен**.

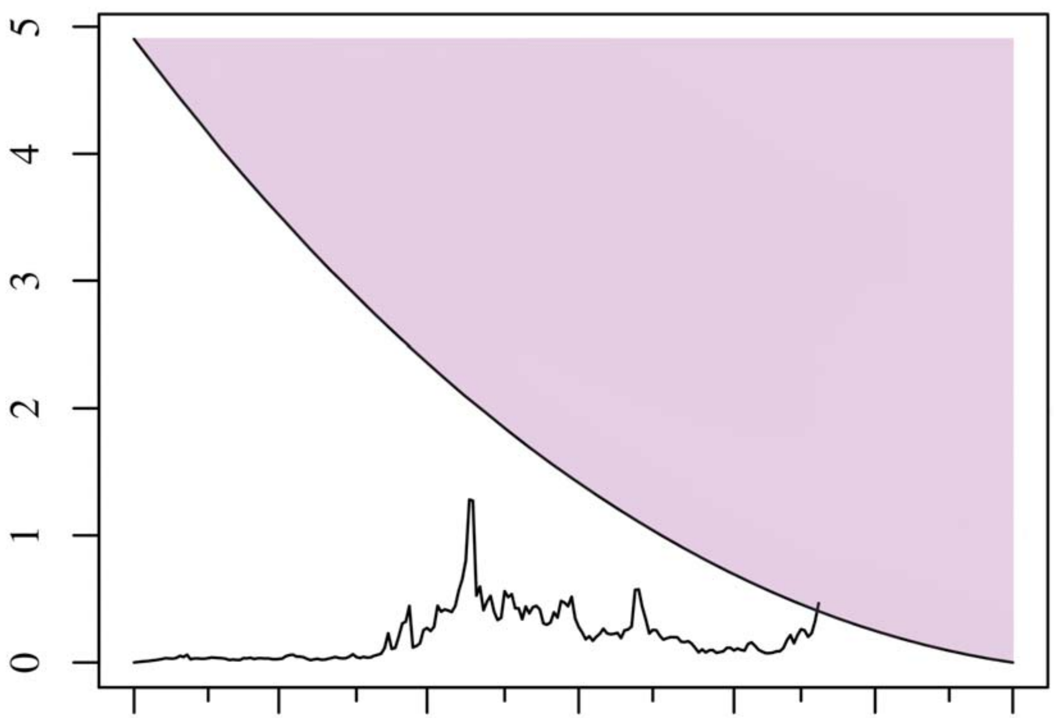
Оптимальные моменты в задачах $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ имеют вид

$$\tau^*_{(i)} = \inf\Big\{t \geq 0 : \psi_t \geq a^{(i)}(t)\Big\} \wedge T, \qquad i = 1, 2,$$

где $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет уравнению

$$d\psi_t = \rho dt - \mu\psi_t \, d\widehat{X}_t$$

и $\widehat{X}_t = (X_t - \mu_1 t)/\sigma$, $\mu = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$, $\rho = 1/T$. Наглядно **моменты** $\tau^*_{(1)}$ и $\tau^*_{(2)}$ — это **моменты выхода** на границы, как на рисунке:



Эти и другие задачи были решены
М. Житлухиным, **А. Муравлевым**и **А. Ширяевым**.

Подробности см. в книге

``Стохастические задачи о разладке'' (**А.Н.Ширяев**, 2016 г.),

главы $\boxed{\texttt{VIII}}$, $\boxed{\texttt{IX}}$, $\boxed{\texttt{X}}$.

В книге “Стохастические задачи о разладке” (гл. X) рассмотрена также интересная для финансовой математики задача о нахождении функции выигрыша (в “Русском опционе”)

$$V = \sup_{\tau} \mathsf{E}\Big[e^{-(r+\lambda)\tau} \max_{u \le \tau} S_u\Big],$$

где $S = (S_t)_{t \ge 0}$ — **геометрическое броуновское движение** с

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dB_t), \qquad S_0 = s > 0.$$

В этой задаче **оптимальный** момент остановки τ^* имеет вид

$$\tau^* = \inf\{t \ge 0 \colon \gamma_t \ge \alpha_*\},$$

где

$$\gamma_t = \frac{\max_{u \le t} S_u}{S_t}.$$

Процесс $\gamma = (\gamma_t)_{t\ge 0}$ удовлетворяет **стохастическому дифференциальному уравнению**

$$d\gamma_t = -\gamma_t(r\,dt + \sigma\,d\widehat{B}_t) + d\varphi_t,$$

где $(\varphi_t)_{t\ge 0}$ — неубывающий процесс, растущий на множестве

$$\Big\{(\omega, t)\colon \gamma_t(\omega) = 1\Big\},$$

а $\widehat{B}_t = B_t - \sigma t$.

Значение **порога** α_* определяется выражением

$$\alpha_* = \left|\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1 - 1}{x_2 - 1}\right|^{1/(x_2 - x_1)},$$

где $x_1 < x_2$ являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - Ax - B = 0, \qquad A = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}, \quad B = \frac{2\lambda}{\sigma^2}.$$

В предыдущих моделях “случайность” моделировалась броуновским движением $B = (B_t)_{t \geq 0}$. Одним из естественных обобщений данного процесса является

ФРАКТАЛЬНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

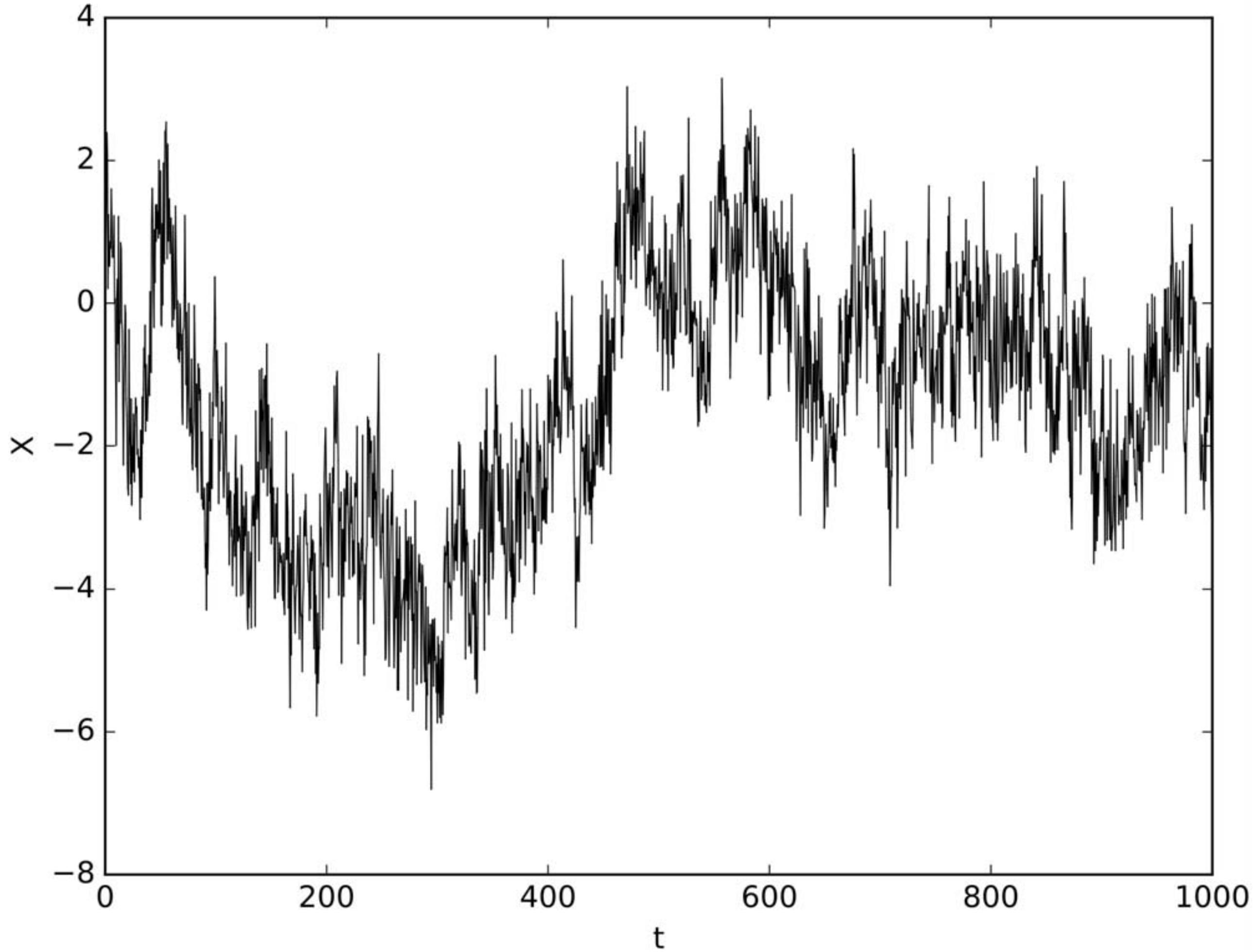
$$\boldsymbol{B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}},$$

которое определяется как **гауссовский** процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathrm{cov}(B_t^H, B_s^H) \equiv \mathsf{E} B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}\Big[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big], \qquad 0 < H < 1.$$

При $H = 1/2$ процесс $B^{1/2} = (B_t^{1/2})_{t \geq 0}$ — <u>броуновское движение</u>.
При $H \neq 1/2$ это <u>немарковский</u> процесс.

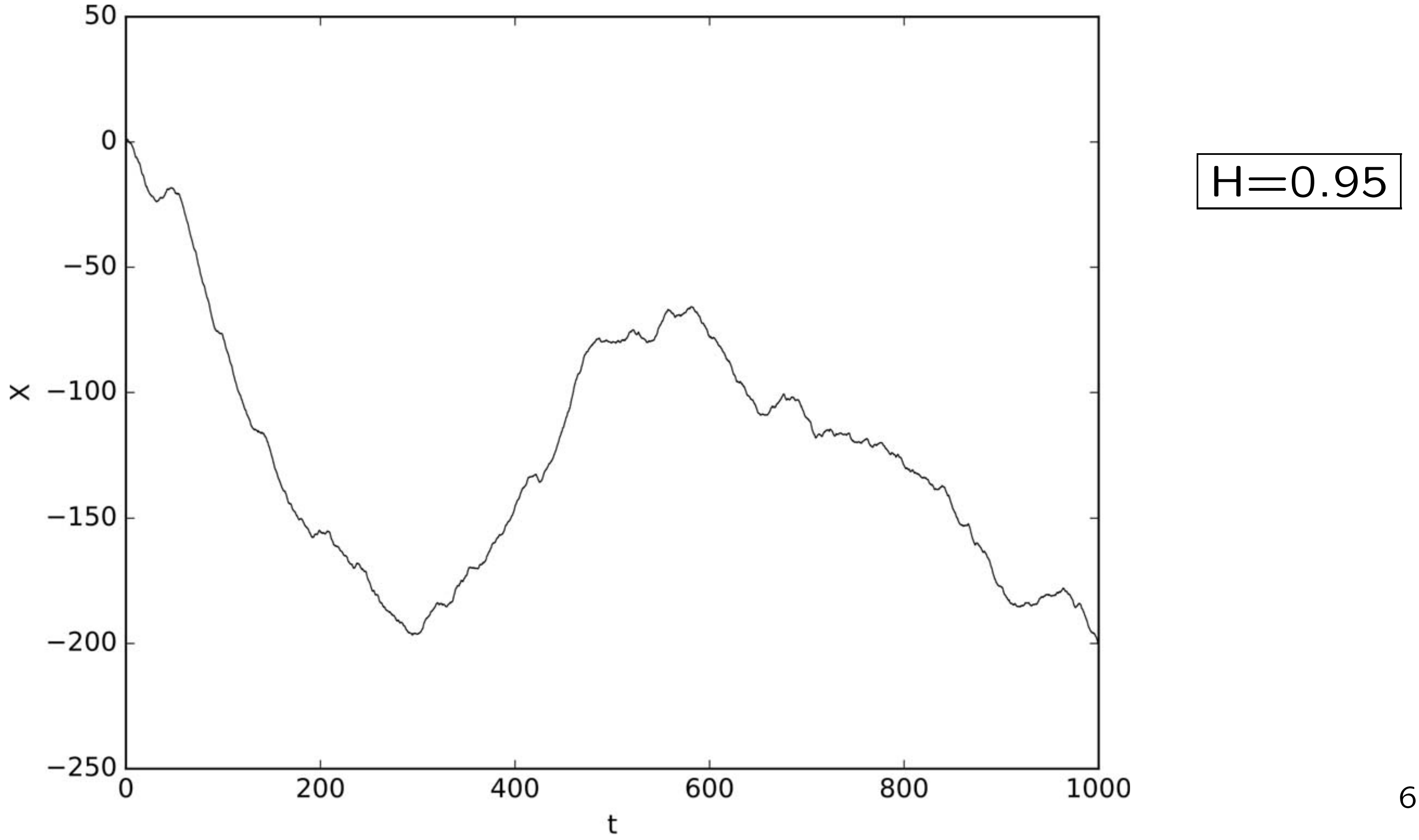
► Если $H < 1/2$, то фрактальное броуновское движение B^H — хорошая модель, описывающая **“ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ”**: вслед за положительными значениями “идут” отрицательные, и наоборот — вслед за отрицательными “идут” положительные.



H=0.15

- Если же $1/2 < H \leq 1$, то

за положительными значениями “следуют” положительные, а за отрицательными — отрицательные.



Значительный результат — установленное **А. Муравлевым**

представление

фрактального броуновского движения

в виде

композиции

процессов Орнштейна–Уленбека,

которое открывает новый путь оперирования с фрактальным процессом.

Для броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и всякого момента остановки τ такого, что $\mathsf{E}\sqrt{\tau} < \infty$, выполнено равенство

$$\boxed{\mathsf{E} B_\tau = 0,}$$

которое использовалось во многих представленных выше результатах.

В случае же фрактального броуновского движения свойство $\mathsf{E} B_\tau^H = 0$ уже **не верно** даже для случайных моментов τ, принимающих ДВА значения. Так (**М. Житлухин**, **А. Ширяев**), если

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } B_1^H \leq 0, \\ 2 & \text{при } B_1^H > 0, \end{cases}$$

то

$$\boxed{\mathsf{E} B_\tau^H = \frac{2^{2H-1} - 1}{\sqrt{2\pi}} \neq 0} \qquad \text{при } H \neq \tfrac{1}{2}.$$

Далее, если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } B_1^H \le \alpha, \\ 2 & \text{при } B_1^H > \alpha, \end{cases}$ то

$$\boxed{\mathsf{E}(B_\tau^H)^2 = \mathsf{E}\tau^{2H} + (2^{4H-2} - 1)\int_\alpha^\infty (x^2 - 1)\varphi(x)dx},$$

где $\varphi(x)$ — плотность распределения $\mathcal{N}(0,1)$.

Для броуновского движения, т.е.при $H = 1/2$, имеем $\boxed{\mathsf{E}(B_\tau)^2 = \mathsf{E}\tau.}$

ВОПРОС: если τ — **произвольный** момент остановки, то что можно сказать о $\mathbf{E}B_\tau^H$ и $\mathbf{E}(B_\tau^H)^2$ **?**

Более общим образом, такой вопрос можно задать и относительно других функционалов; например, интерес представляет

$$\mathbf{E}\Big(\max_{s\le\tau}|B_s^H|^p\Big), \qquad p > 0.$$

А. Новиков и **Э. Валкейла** установили, что для $p > 0$:

(i) $$\boxed{c_{p,H} \cdot \mathsf{E}(\tau^{pH}) \le \mathsf{E}\Big(\max_{s\le\tau}\big|B_s^H\big|^p\Big) \le C_{p,H} \cdot \mathsf{E}(\tau^{pH})}$$ **при** $\boldsymbol{H > \frac{1}{2}}$,

(ii) $$\boxed{c_{p,H} \cdot \mathsf{E}(\tau^{pH}) \le \mathsf{E}\Big(\max_{s\le\tau}\big|B_s^H\big|^p\Big) \le \boxed{\textbf{?}}}$$ **при** $\boldsymbol{H < \frac{1}{2}}$.

А. Муравлевым было показано, что

$$\boxed{-\,k_H \cdot (\mathsf{E}\tau)^H \le \mathsf{E}B_\tau^H \le k_H \cdot (\mathsf{E}\tau)^H} \quad \text{при } \boldsymbol{H \in (0, 1]}. \qquad (*)$$

П. Яськов, развивая идеи доказательства оценки $(*)$, получил недостающую верхнюю оценку в (ii): для $p > 0$

$$\boxed{\mathsf{E}\Big(\max_{s\le\tau}\big|B_s^H\big|^p\Big) \le C_{p,H} \cdot \mathsf{E}(\tau^{pH})} \quad \text{при } \boldsymbol{H < \frac{1}{2}}.$$