

# Предельная теорема для одномерных ветвящихся винеровских процессов с точечными источниками ветвления.

Н.В.Смородина

ПОМИ РАН, лаб. прикладных вероятностных и алгоритмических методов,  
физический факультет СПбГУ.

15 октября, 2024

Пусть  $w(t)$ ,  $t \geq 0$  – стандартный винеровский процесс,  $w(0) = 0$ ,  $w_x(t) = x + w(t)$ . Рассмотрим ветвящуюся версию этого процесса в предположении, что параметры ветвления зависят от точки, в которой процесс находится в момент ветвления. Частица стартует из точки  $x \in \mathbb{R}$  и экспоненциальное время (с параметром единица) движется вдоль траектории винеровского процесса  $w_x(t)$ . В экспоненциальный момент времени частица исчезает и вместо нее в этой же точке возникают несколько новых частиц, которые, следуя тому же правилу, движутся по траекториям независимых винеровских процессов и снова ветвятся в независящие друг от друга экспоненциальные моменты времени. Количество  $N$  появившихся новых частиц при каждом ветвлении является случайной величиной с распределением, зависящим от точки, в которой произошло ветвление . Через  $p_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  обозначим вероятность того, что частица разделилась на  $k$  частиц, при условии, что ветвление произошло в точке  $x \in \mathbb{R}$ .

Ветвящийся процесс можно рассматривать как марковский процесс, со значениями в пространстве конечных конфигураций  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ .

Через  $X_x(t)$  обозначим ветвящийся винеровский процесс, удовлетворяющий условию  $X_x(0) = \{x\}$ , то есть в начальный момент времени у нас имеется единственная частица, находящаяся в точке  $x \in \mathbb{R}$ . Мы ограничимся только нахождением математических ожиданий функционалов  $I_{t,x}(\varphi)$  от процесса  $X_x(t)$ , задаваемые как

$$I_{t,x}(\varphi) = \sum_{y \in X_x(t)} \varphi(y),$$

где  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  измеримая функция.

В случае, когда  $I_{t,x}(\varphi)$  при всех  $t > 0$  имеет конечное математическое ожидание, семейство операторов

$$[P^t \varphi](x) = \mathbb{E} I_{t,x}(\varphi)$$

образует полугруппу, т.е.  $P^{t+s} = P^t P^s$  для всех  $t, s \geq 0$ , а функция  $u(t, x) = \mathbb{E} I_{t,x}(\varphi)$  решает задачу Коши

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + \beta(x)u, \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

где

$$\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(x) - 1.$$

Величину  $\beta(x)$  называют интенсивностью ветвления в точке  $x$ . В рамках нашего подхода все схемы ветвления с одной и той же интенсивностью ветвления  $\beta(x)$  неразличимы. Условимся называть класс эквивалентности таких процессов *ветвящимся процессом в широком смысле*.

Нас интересует случай, когда интенсивность ветвления  $\beta(x)$  имеет вид

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta(x - x_j) - \alpha,$$

то есть является линейной комбинацией дельта-функций, сосредоточенных в точках  $x_1, \dots, x_N$  минус некоторая константа  $\alpha \geq 0$ .

Так как в этом случае интенсивность ветвления является не функцией, а обобщенной функцией, отдельно следует доказывать "теорема существования", то есть предъявлен способ генерации траекторий такого ветвящегося процесса.

Пусть сначала, интенсивность ветвления  $\beta(x)$  – непрерывная ограниченная функция, время жизни каждой частицы от момента рождения до момента ветвления имеет стандартное экспоненциальное распределение. оператор  $P^t$  при  $t \geq 0$  формулой  $[P^t \varphi](x) = \mathbb{E} I_{t,x}(\varphi)$ . Семейство операторов  $P^t$  образует полугруппу, т.е. для любых  $t, s \geq 0$  выполнено  $P^{t+s} = P^t P^s$ .

### Lemma

*Генератор полугруппы  $P^t$  есть оператор*

$$-\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \beta(x),$$

*то есть для всех  $\varphi \in W_2^2(\mathbb{R})$  справедливо соотношение*

$$(L_2(\mathbb{R})) \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{[P^t \varphi](x) - \varphi(x)}{t} = \frac{\varphi''(x)}{2} + \beta(x)\varphi(x).$$

## Уравнение

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + \beta(x)u, \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

– аналог обратного уравнения Колмогорова, описывающего эволюцию функций

$$\varphi \mapsto P^t \varphi.$$

В отличие от обычного уравнения Колмогорова, оператор  $P^t$  вообще говоря не является сжимающим оператором в равномерной метрике и не определяет процесс.

Выпишем теперь аналог прямого уравнения Колмогорова, описывающего эволюцию мер.

Пусть  $\nu$  – мера конечной полной вариации на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Для  $t > 0$  определим меру  $\nu P^t$ , полагая для  $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$[\nu P^t](\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int [P^t 1_\Gamma](x) \nu(dx).$$

Если  $\nu$  неотрицательна, меру  $\nu P^t$  в терминах ветвящегося случайного блуждания можно интерпретировать следующим образом. Пусть в начальный момент времени у нас имеется случайная конфигурация частиц, причем среднее число частиц в любом борелевском множестве  $\Gamma$  есть  $\nu(\Gamma)$ . Далее, отталкиваясь от этой конфигурации, запустим ветвящееся случайное блуждание и посмотрим на него в момент времени  $t > 0$ . Для каждого борелевского  $\Gamma$  величина  $\nu P^t(\Gamma)$  есть среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в момент времени  $t$  в множестве  $\Gamma$ . При этом усреднение производится как по начальным конфигурациям, так и по траекториям ветвящегося процесса.

На множестве кусочно-постоянных функций вида

$$\varphi = \sum_{k=1}^K a_k 1_{\Gamma_k},$$

оператор  $P^t$ , действующий на функции и оператор  $P^t$ ,  
действующий на меры, являются формально сопряженными.  
Действительно,

$$(\nu, P^t \varphi) = (\nu, P^t \sum_{k=1}^K a_k 1_{\Gamma_k}) = \sum_{k=1}^K a_k (\nu, P^t 1_{\Gamma_k}) \\ = \sum_{k=1}^K a_k \int [P^t 1_{\Gamma_k}](x) \nu(dx) = \sum_{k=1}^K a_k (\nu P^t)(\Gamma_k) = (\nu P^t, \varphi).$$

Оператор  $\mathcal{A}$ , рассматриваемый на области определения  $W_2^2(\mathbb{R})$ , является самосопряженным, полуограниченным снизу оператором. Соответственно, если мы рассмотрим сопряженный оператор на области определения, состоящей из абсолютно непрерывных мер, плотность которых принадлежит  $W_2^2(\mathbb{R})$ , то обратное уравнение Колмогорова фактически совпадет с прямым, различия будут только в интерпретации решений задачи Коши для этих уравнений.

Аналогичный подход можно применить для случая, когда интенсивность  $\beta(x)$  с точностью до положительного множителя является линейной комбинацией дельта-функций Дирака.

Рассмотрим сначала случай, когда есть единственный источник ветвления в нуле.

Приведем известные факты, относящиеся к определению  
самосопряженного оператора

$$\mathcal{A}^\lambda = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \lambda \delta(x).$$

1. Область определения  $\mathcal{A}^\lambda$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda) = \{f \in W_2^1(\mathbb{R}) : f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm), [f']_{0-}^{0+} = -\lambda f(0)\}.$$

2. Для  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda)$  при  $x \neq 0$

$$\mathcal{A}^\lambda f(x) = -\frac{1}{2} f''(x).$$

3. Абсолютно непрерывный спектр оператора  $\mathcal{A}^\lambda$  есть  $[0, \infty)$ .  
При  $\lambda \leq 0$  оператор  $\mathcal{A}^\lambda$  является неотрицательным и весь его спектр абсолютно непрерывен, а при  $\lambda > 0$  у оператора  $\mathcal{A}^\lambda$  имеется единственное собственное значение  $-\frac{\lambda^2}{2}$ , которому отвечает собственная функция  $e^{-\lambda|x|}$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}_0$  подпространство  $W_2^2(\mathbb{R})$  вида

$$\mathcal{D}_0 = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(0) = 0\},$$

а через  $\mathcal{L}_\lambda$  – одномерное подпространство, натянутое на функцию  $e^{-\lambda|x|}$ .

Заметим, что  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda)$  при всех  $\lambda > 0$ . При всех  $\lambda > 0$  выполнено

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda) = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{L}_\lambda.$$

Далее мы будем рассматривать только случай  $\lambda > 0$ .

Ветвления, можно описать другим способом. Каждой новой частице дается не зависящее от ее перемещения пуассоновское поле  $\Pi$  на  $[0, \infty)$  с лебеговой интенсивностью. Деление частицы происходит в момент, соответствующий самой левой точке этого поля. В момент деления исходная частица исчезает, все новые частицы появляются в точке деления и каждой из них дается свое пуассоновское поле, независимое от всех остальных.

Изменим схему ветвления. Частица стартует из точки  $x \in \mathbb{R}$  и движется вдоль траектории винеровского процесса  $w_x(t)$ ,  $w_x(0) = x$ . Через  $l(t, x)$  обозначим локальное время процесса  $w_x$  в нуле до момента времени  $t$ . Заметим, что п.н.  $l(t, x)$  – непрерывная неубывающая функция  $t$ . Пусть  $\Pi$  – пуассоновское поле на  $[0, \infty)$  с интенсивностью  $\lambda \cdot l(dt, x)$ . Точки этого пуассоновского поля появляются только в те моменты  $t$ , для которых  $w_x(t) = 0$ . В момент появления первой точки этого пуассоновского поля исходная частица исчезает, а вместо нее в начале координат появляются две новые частицы,

## Theorem

Генератор полугруппы  $P^t$  есть оператор

$$-\mathcal{A}^\lambda = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda \delta(x),$$

то есть для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda)$  и  $x \neq 0$  справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{[P^t \varphi](x) - \varphi(x)}{t} = \frac{\varphi''(x)}{2}$$

(предел в понимается в смысле  $L_2(\mathbb{R})$ ).

Итак, генератор полугруппы  $P^t$  есть

$$-\mathcal{A}^\lambda = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda \delta(x),$$

причем  $\sigma(\mathcal{A}^\lambda) = \{-\frac{\lambda^2}{2}\} \cup [0, \infty)$ . Прибавим теперь к оператору  $\mathcal{A}^\lambda$  тождественный оператор, умноженный на  $\frac{\lambda^2}{2}$ , у получившегося оператора левый край спектра будет точкой ноль. Какой операции над ветвящимся процессом это соответствует?

Пусть  $X_x(t)$  – ветвящееся случайное блуждание с интенсивностью ветвления  $\beta(x)$ ). Для каждого  $\alpha > 0$  через  $X_x^\alpha(t)$  обозначим новое ветвящееся случайное блуждание с интенсивностью  $\beta(x) - \alpha$ . Это ветвящееся случайное блуждание легко строится из исходного, именно, каждой появившейся новой частице мы придаём ни от чего другого не зависящую экспоненциально распределенную случайную величину  $\rho$  с параметром  $\alpha$ . В момент  $\rho$ , если эта частица еще существовала, она исчезает, не оставляя потомства.

Условимся называть такое ветвящееся случайное блуждание *спектрально сдвинутым* на  $\alpha$ .

Таким образом, у спектрально сдвинутого случайного блуждания  $X_x^{\lambda^2/2}(t)$  генератор полугруппы есть  $-\mathcal{A}_0^\lambda$ , где

$$\mathcal{A}_0^\lambda = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \lambda \delta(x) + \frac{\lambda^2}{2},$$

то есть левый край спектра оператора  $\mathcal{A}_0^\lambda$  совпадает с нулем, а интервал  $(0, \frac{\lambda^2}{2})$  является спектральной лакуной.

Рассмотрим для ветвящегося случайного блуждания  $X_x^{\lambda^2/2}(t)$  оператор  $P^t$ , вида, действующий на меры. Так как генератор полугруппы является самосопряженным оператором в  $L_2(\mathbb{R})$ , то на множестве абсолютно непрерывных знакопеременных мер с квадратично суммируемой плотностью действие этого оператора совпадает с действием сопряженного оператора, действующего на плотность меры. Если знакопеременная мера является неотрицательной, то эволюцию меры легко интерпретировать как эволюцию плотности частиц. Так как для процесса  $X_x^{\lambda^2/2}(t)$  ноль является собственным значением, отвечающим собственной функции  $e^{-\lambda|x|}$ , то эта функция и является инвариантной плотностью, другими словами, инвариантным распределением является распределение Коши (или любое ему пропорциональное). Следующая теорема показывает, что при  $t \rightarrow \infty$  плотность произвольного распределения экспоненциально быстро сближается с инвариантной.

Через  $\varphi_\lambda^0$  обозначим функцию

$$\varphi_\lambda^0(x) = \sqrt{\lambda} e^{-\lambda|x|}$$

и заметим, что  $\|\varphi_\lambda^0\|_2 = 1$ .

### Theorem

Пусть  $\lambda > 0$ ,  $X_x^{\lambda^2/2}(t)$  – ветвящийся винеровский процесс, порождающий полугруппу  $P^t$  с генератором  $-\mathcal{A}_0^\lambda$ . Пусть  $\nu$  – абсолютно непрерывная мера с плотностью  $q \in L_2(\mathbb{R})$ . Тогда для любого  $t > 0$  мера  $\nu P^t$  абсолютно непрерывна, а ее плотность  $q_t$  удовлетворяет неравенству

$$\|q_t - (q, \varphi_\lambda^0)\varphi_\lambda^0\|_2 \leq e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \|q - (q, \varphi_\lambda^0)\varphi_\lambda^0\|_2 \leq e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \|q\|_2.$$

Рассмотрим общий случай, когда интенсивность ветвления имеет вид

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta(x - x_j) - \alpha,$$

где  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ .

Будем далее предполагать, что все  $\lambda_j \neq 0$ , а точки  $x_j$  для которых  $\lambda_j < 0$  условимся называть поглощающими.

Параметр  $\alpha$  мы исходно предположим равным нулю, а потом с помощью сдвига спектра подберем  $\alpha$  таким образом, чтобы правый край спектра генератора соответствующей полугруппы  $P^t$  попал в точку ноль.

Генератор полугруппы  $P^t$ , порождаемый соответствующим ветвящимся процессом, есть оператор

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta(x - x_j).$$

Обозначим

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} - \sum_{j=1}^N 2\lambda_j \delta(x - x_j)$$

(коэффициент 2 здесь добавлен для удобства).

Форма  $a$ , соответствующая оператору  $\mathcal{A}$ , задана на  $\mathcal{D}[a] = W_2^1(\mathbb{R})$  и имеет вид

$$a[u, v] = \int_{\mathbb{R}} u'(x) \overline{v'(x)} dx - 2 \sum_{j=1}^N \lambda_j u(x_j) \overline{v(x_j)}.$$

Область определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$  имеет следующий вид

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{f : f \in W_2^1(\mathbb{R}), f \in W_2^2(-\infty, x_1], f \in W_2^2[x_N, +\infty),$$

$$\forall j = 1, \dots, N-1 \quad f \in W_2^2[x_j, x_{j+1}], \quad \forall j = 1, \dots, N \quad [f']_{x_j-0}^{x_j+0} = -2\lambda_j f(x_j)\}$$

(здесь, через  $[f']_{x_j-0}^{x_j+0}$  обозначен скачок  $f'$  в точке  $x_j$ ).

Оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряженным оператором в  $L_2(\mathbb{R})$  и для  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  и  $x \neq x_j$  при всех  $j = 1, \dots, N$  выполнено

$$(\mathcal{A}f)(x) = -f''(x).$$

Нас будет интересовать только случай, когда в спектре оператора  $\mathcal{A}$  имеется хотя бы одно отрицательное собственное значение. В случае  $N = 1$  это было эквивалентно условию  $\lambda > 0$ . В случае  $N > 1$  необходимое и достаточное условие состоит в том, что квадратичная форма принимает отрицательные значения т.е. существует функция  $u \in W_2^1(\mathbb{R})$ , такая что

$$a[u, u] = \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx - 2 \sum_{j=1}^N \lambda_j |u(x_j)|^2 < 0.$$

Достаточное условие наличия отрицательного спектра

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j > 0.$$

У оператора  $\mathcal{A}$  может появиться не более  $p$  отрицательных с.з., где  $p$  это число непоглощающих источников. Так как  $\mathcal{A}$  – обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка, его отрицательные с.з. – простые.

Найдем эти собственные значения и отвечающие им собственные функции. В отличие от случая  $N = 1$ , эти собственные значения не могут быть найдены явно, а только как решения некоторого уравнения. Итак, обозначим через  $\gamma$  положительный корень из модуля неизвестного отрицательного собственного значения и выпишем уравнение, которому удовлетворяет  $\gamma$ .

Так как потенциал оператора  $A$  сосредоточен только в конечном числе точек, вне этих точек, то есть на каждом из интервалов

$$(-\infty, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, \infty),$$

неизвестная собственная функция  $f$  должна удовлетворять уравнению  $-f'' + \gamma^2 f = 0$ . Общее решение этого уравнения имеет вид  $ce^{\gamma x} + de^{-\gamma x}$ , где  $c, d$  – произвольные постоянные.

Неизвестную собственную функцию нужно искать в следующем виде

$$f(x) = \begin{cases} c_0 e^{\gamma x} + d_0 e^{-\gamma x} & \text{при } x \in (-\infty, x_1] \\ c_1 e^{\gamma x} + d_1 e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_1, x_2] \\ c_2 e^{\gamma x} + d_2 e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_2, x_3] \\ \dots \\ c_{N-1} e^{\gamma x} + d_{N-1} e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_{N-1}, x_N] \\ c_N e^{\gamma x} + d_N e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_N, \infty). \end{cases}$$

Здесь имеется  $2(N + 1)$  неизвестных коэффициентов и неизвестна величина  $\gamma$ . Из условия  $f \in L_2(\mathbb{R})$  вытекает, что  $d_0 = c_N = 0$ .

Далее, так как собственная функция определяется с точностью до множителя, то один ненулевой коэффициент мы можем выбрать произвольным образом, именно, положим  $c_0 = 1$ .

Теперь остались неизвестными коэффициенты  $c_1, \dots, c_{N-1}$ ,  $d_1, \dots, d_N$  и число  $\gamma$ . Для определения этих  $2N$  неизвестных используем условие  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Это даст нам  $N$  уравнений из условий непрерывности  $f$  в точках  $x_1, \dots, x_N$

$$c_{j-1}e^{\gamma x_j} + d_{j-1}e^{-\gamma x_j} = c_j e^{\gamma x_j} + d_j e^{-\gamma x_j}, \text{ где } j = 1, \dots, N,$$

и  $N$  уравнений из условий на скачок  $f'$  в точках  $x_1, \dots, x_N$

$$f'(x_j + 0) - f'(x_j - 0) = -2\lambda_j f(x_j), \text{ где } j = 1, \dots, N.$$

Последнее условие эквивалентно условию

$$\gamma c_{j-1}e^{\gamma x_j} - \gamma d_{j-1}e^{-\gamma x_j} - 2\lambda_j c_{j-1}e^{\gamma x_j} - 2\lambda_j d_{j-1}e^{-\gamma x_j} = \gamma c_j e^{\gamma x_j} - \gamma d_j e^{-\gamma x_j}.$$

Перепишем уравнения в матричной форме. Получим

$$\begin{pmatrix} e^{\gamma x_j} & e^{-\gamma x_j} \\ \gamma e^{\gamma x_j} & -\gamma e^{-\gamma x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x_j} & e^{-\gamma x_j} \\ e^{\gamma x_j}(\gamma - 2\lambda_j) & -\gamma e^{-\gamma x_j}(\gamma + 2\lambda_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix}$$

Вычисляя обратную матрицу, получаем

$$\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma - \lambda_j & -\lambda_j e^{-2\gamma x_j} \\ \lambda_j e^{2\gamma x_j} & \gamma + \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix}.$$

Используя начальное условие  $c_0 = 1$ ,  $d_0 = 0$ , получаем уравнение для определения  $\gamma$ . Обозначим

$$S_j(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma - \lambda_j & -\lambda_j e^{-2\gamma x_j} \\ \lambda_j e^{2\gamma x_j} & \gamma + \lambda_j \end{pmatrix},$$

$$T(\gamma) = S_N(\gamma)S_{N-1}(\gamma)\dots S_1(\gamma).$$

Решая рекуррентное соотношение, получаем

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^N} T(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $c_N = 0$ , то уравнение для определения  $\gamma$  имеет вид

$$(T(\gamma))_{11} = 0.$$

Обозначим через  $\gamma_0$  наибольшее решение . Через  $\gamma_1$  обозначим наибольшее из остальных положительных решений или ноль если  $\gamma_0$  – единственное положительное решение.

Далее, через  $f_0$  обозначим нормированную (т.е.  $\|f_0\|_2 = 1$ ) собственную функцию оператора  $\mathcal{A}$ , соответствующую собственному значению  $-\gamma_0^2$ . Функция  $f_0$  является также собственной функцией генератора  $-\frac{1}{2} \mathcal{A}_0$ , отвечающей собственному значению  $\frac{\gamma_0^2}{2}$ . Можно показать, что функция  $f_0$  может быть выбрана строго положительной.

Как и выше, рассмотрим спектрально сдвинутое на  $\frac{\gamma_0^2}{2}$  случайное блуждание  $X_x^{\gamma_0^2/2}(t)$ . Генератор  $-\frac{1}{2} \mathcal{A}_0$  этого блуждания имеет вид

$$-\frac{1}{2} \mathcal{A}_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta(x - x_j) - \frac{\gamma_0^2}{2},$$

то есть его правый край спектра совпадает с нулем, а интервал  $(\frac{\gamma_1^2 - \gamma_0^2}{2}, 0)$  является его спектральной лакуной.

Рассмотрим для ветвящегося процесса  $X_x^{\gamma_0^2/2}(t)$  оператор  $P^t$  действующий на меры. На множестве абсолютно непрерывных знакопеременных мер с квадратично суммируемой плотностью действие этого оператора совпадает с действием сопряженного оператора, действующего на плотность меры. Соответственно,  $\nu_0(dx) = f_0(x) dx$  является инвариантным распределением.

### Theorem

Пусть  $X_x^{\gamma_0^2/2}(t)$  – ветвящийся винеровский процесс, порождающий полугруппу  $P^t$  с генератором  $-\frac{1}{2} A_0$ . Пусть  $\nu$  – абсолютно непрерывная мера с плотностью  $q \in L_2(\mathbb{R})$ . Тогда для любого  $t > 0$  мера  $\nu P^t$  абсолютно непрерывна, а ее плотность  $q_t$  удовлетворяет неравенству

$$\|q_t - (q, f_0)f_0\|_2 \leq e^{-\frac{t(\gamma_0^2 - \gamma_1^2)}{2}} \|q - (q, f_0)f_0\|_2 \leq e^{-\frac{t(\gamma_0^2 - \gamma_1^2)}{2}} \|q\|_2.$$

Случай  $N = 2$ . В этом случае корни уравнения, определяющего собственные значения, не могут быть найдены явно, но число положительных корней легко определяется.

Итак, пусть у нас имеется два источника, для определенности в точках 0 и 1. Пусть интенсивность ветвления  $\beta(x)$  имеет вид

$$\beta(x) = \lambda\delta(x) + \mu\delta(x - 1).$$

В этом случае мы имеем

$$S_1(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma - \lambda & -\lambda \\ \lambda & \gamma + \lambda \end{pmatrix}$$

и

$$S_2(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma - \mu & -\mu e^{-2\gamma} \\ \mu e^{2\gamma} & \gamma + \mu \end{pmatrix}.$$

Уравнение, относительно неизвестной  $\gamma$ , которому удовлетворяют собственные значения имеет вид

$$(T(\gamma))_{11} = (S_2(\gamma) \cdot S_1(\gamma))_{11} = (\gamma - \mu)(\gamma - \lambda) - \lambda\mu e^{-2\gamma} = 0$$

или

$$(\gamma - \mu)(\gamma - \lambda) = \lambda\mu e^{-2\gamma}.$$

Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  входят в симметрично, поэтому мы можем считать, что  $\mu \leq \lambda$ .

1. Если  $\mu < 0 < \lambda$  и  $\lambda + \mu < 0$  то при  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \geq 1$  уравнение не имеет положительных корней, а при  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < 1$  уравнение имеет ровно один положительный корень  $\gamma_0 \in (0, \lambda)$ .
2. Если  $\mu < 0 < \lambda$  и  $\lambda + \mu \geq 0$  то уравнение имеет ровно один положительный корень  $\gamma_0 \in (\frac{\lambda+\mu}{2}, \lambda)$ .
3. Если  $0 < \mu \leq \lambda$  то при  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \geq 2$  уравнение имеет ровно один положительный корень  $\gamma_0 > \lambda$ , а при  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < 2$  уравнение имеет ровно два положительных корня  $\gamma_1 < \gamma_0$ , при этом  $\gamma_0 > \lambda$ ,  $\gamma_1 < \mu$ .
4. Если  $\mu \leq \lambda < 0$  то не имеет положительных корней. Это соответствует случаю, когда оба источника являются поглощающими.