

Равномерная интегрируемость неотрицательных супермартингалов через замену времени в геометрическом броуновском движении

Александр Гущин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
15 октября 2024 г.

КОНФЕРЕНЦИЯ «СТОХАСТИКА»
ПОСВЯЩЕННАЯ 90-ЛЕТИЮ
АЛЬБЕРТА НИКОЛАЕВИЧА ШИРЯЕВА



- Обсуждение задачи
- Каноническая постановка
- Мера Фёльмера
- Некоторые результаты

Обсуждение задачи

Цитата из статьи J. Kallsen, A. N. Shiryaev, “The cumulant process and Esscher’s change of measure”, Finance Stochast., 6 (2002), 397–428.

We consider positive local martingales of the form $\mathcal{E}(\tilde{X})$ or equivalently $\exp(X)$, where X denotes the logarithmic transform of $\tilde{X}$. They play an important role in statistics and finance because they appear as natural candidates for density processes. Since $\mathcal{E}(\tilde{X})$ is a supermartingale (cf., e.g., Jacod 1979, (5.17)), it converges to some random variable $\mathcal{E}(\tilde{X})_\infty$ with $E(\mathcal{E}(\tilde{X})_\infty) \leq 1$. To define a probability measure $P' \sim P$ via its density $\frac{dP'}{dP} := \mathcal{E}(\tilde{X})_\infty$ is only possible if $E(\mathcal{E}(\tilde{X})_\infty) = 1$, or equivalently, if $\mathcal{E}(\tilde{X})$ is a uniformly integrable martingale. This explains why the question of uniform integrability has received so much attention (cf., the references in the introduction).

Roughly speaking, one may distinguish two kinds of sufficient conditions for uniform integrability. Predictable criteria (as e.g., Novikov's condition) depend only on the characteristics of $\tilde{X}$, whereas optional conditions (as e.g., Kazamaki's condition) involve $\tilde{X}$ directly and not only its characteristics. Our conditions below will be formulated in terms of X while the literature focuses mainly on $\tilde{X}$. In the predictable case or for continuous processes, the two viewpoints lead essentially to the same results. For processes with jumps, however, we obtain new kinds of optional criteria.

Пусть X — неотрицательный супермартингал, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Основная цель данной работы — привести условия, при которых X является мартингалом или равномерно интегрируемым мартингалом.

- X может обращаться в 0;
- супермартингал X не обязательно представим как стохастическая экспонента (от локального мартингала);
- X не обязательно непрерывен.

Хорошо известно, что, если X — мартингал, являющийся процессом плотности некоторой меры P' относительно P , где P' локально абсолютно непрерывна относительно P , то равномерная интегрируемость мартингала X эквивалентна абсолютной непрерывности P' относительно P . Если мы не знаем, является ли X равномерно интегрируемым мартингалом, то мера P' , для которой X является процессом плотности, может как существовать и быть в любом отношении с P , так и не существовать.

Существование такой меры зависит от возможности продолжения конечно-аддитивной функции множеств μ , корректно заданной (благодаря мартингальности X) на алгебре $\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ равенством

$$\mu(B) = \int_B X_t dP, \quad B \in \mathcal{F}_t,$$

до счетно-аддитивной меры P' на σ -алгебре, порожденной этой алгеброй. Следует отметить, что существование такой меры предоставляет дополнительные возможности при исследовании вопроса о равномерной интегрируемости X , так как ответ можно дать в терминах этой меры P' . Мы увидим, что на каноническом пространстве такая мера P' существует всегда.

Пример

Пусть $\Omega = (0, \infty)$ или $\Omega = (0, \infty]$, $\mathcal{F}$ состоит из борелевских подмножеств Ω , P есть экспоненциальное распределение с плотностью e^{-t} , $\mathcal{F}_t$ состоит из борелевских подмножеств интервала $\Omega = (0, t]$ и атома $B_t := \Omega \setminus (0, t] = \{\omega \in \Omega: \omega > t\}$, $X_t(\omega) = e^t \mathbb{1}_{\{t < \omega\}}$. Мера на $\mathcal{F}_t$ с плотностью X_t относительно сужения P на $\mathcal{F}_t$ приписывает единичную меру атому B_t . Легко видеть, что это семейство мер согласовано при различных t и, следовательно, (X_t) — мартингал, что можно проверить и непосредственно. Существование меры P' с процессом плотности X зависит от того, является ли пустым множеством $\bigcap_t B_t$ или нет. Вторая возможность отвечает случаю $\infty \in \Omega$, и тогда P' есть единичная масса в точке ∞ , и меры P и P' сингулярны.

Каноническая постановка

Обозначим $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $\mathbb{R}_+$ с борелевской σ -алгеброй. Канонический процесс на этом пространстве обозначается $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$.

Зададим фильтрацию $\mathbb{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \geq 0}$, порожденную Y .

Единственная вероятностная мера, по которой канонический процесс есть стохастическая экспонента от стандартного винеровского процесса, т.е. $\log Y_t + t/2$ есть стандартный винеровский процесс, обозначается μ .

Введем также пространство $\mathcal{V}$ неубывающих непрерывных справа функций на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $[0, \infty]$. Канонический процесс на $\mathcal{V}$ обозначается $A = (A_t)_{t \geq 0}$. Введем σ -алгебры

$$\mathcal{V}_t := \sigma(\{ \{A_s \leq u\} : s \in \mathbb{R}_+, u \leq t \})$$

Пространства траекторий-2

и $\mathcal{V} := \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{V}_t$. Из определения ясно, что $\mathbb{V} := (\mathcal{V}_t)_{t \geq 0}$ есть наименьшая фильтрация, относительно которой все A_t являются моментами остановки, т.е. канонический процесс A относительно $\mathbb{V}$ есть замена времени.

Отметим, что $\mathcal{V}$ является компактным метрическим пространством в обычной топологии поточечной сходимости на всюду плотном множестве. В силу непрерывности справа A_t будет борелевской функцией, в частности, $\mathcal{V}$ — борелевская σ -алгебра.

Введем правый обратный к A процесс $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ соотношением

$$T_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Фильтрация $\mathbb{V}$ порождена этим процессом.

Определим $\Omega^* := \mathcal{C} \times \mathcal{V}$, $\mathcal{G}^* := \mathcal{C} \otimes \mathcal{V}$, и введем непрерывную справа фильтрацию $(\mathcal{G}_t^*)$ из соотношения

$$\mathcal{G}_t^* = \bigcap_{s > t} (\mathcal{C}_s \otimes \mathcal{V}_s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Определим наш основной объект, процесс $X_t = Y_{A_t}$, который выступает в качестве канонического представления неотрицательного супермартингала. Известно, см. Г. & Урусов (2015), что любой неотрицательный супермартингал Z с $EZ_0 \leq 1$ совпадает по распределению с процессом замены времени в геометрическом броуновском движении.

Предполагается, что геометрическое броуновское движение и замена времени относятся к одной и той же фильтрации. Мы используем это утверждение, но выразим его другим образом. Нас будут интересовать условия, при которых процесс X будет супермартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, где $\mathcal{F}_t := \mathcal{G}_{A_t}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $\mathcal{C}_t^\mu$ пополнение σ -алгебры $\mathcal{C}_t$ по мере μ .

Определение

Марковское ядро $K(y, B)$, $y \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{V}$, из $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ в $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ называется неупреждающим, если для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и для любого $B \in \mathcal{V}_t$, функция $y \mapsto K(y, B)$ $\mathcal{C}_t^\mu$ -измерима.

Для неупреждающего марковского ядра K определим меру $P := \mu \otimes K$ на $(\Omega^*, \mathcal{G}^*)$ как единственную вероятностную меру, удовлетворяющую соотношению

$$P(B \times C) = \int_B K(y, C) \mu(dy), \quad B \in \mathcal{C}, \quad C \in \mathcal{V}. \quad (1)$$

Предложение

Пусть P — вероятностная мера на $(\Omega^*, \mathcal{G}^*)$ с проекцией μ на первую координату. Следующие условия эквивалентны:

- (i) P — распределение на $(\Omega^*, \mathcal{G}^*)$ пары процессов (Z, T) , где Z и T — соответственно геометрическое броуновское движение и замена времени относительно некоторой общей фильтрации.
- (ii) $P = \mu \otimes K$, где K — неупреждающее марковское ядро;
- (iii) по мере P σ -алгебры $\mathcal{C}$ и $\mathcal{G}_t^*$ условно независимы относительно σ -алгебры $\mathcal{C}_t$ при каждом $t \geq 0$.

Мера Фёльмера

Поскольку мы хотим иметь критерии мартингалльности (в том числе, в сочетании с равномерной интегрируемостью), а эти свойства определяются по конечномерным распределениям, предложение 1 позволяет рассматривать только процессы $(Y_{A_t}, \mathcal{F}_t)$, где канонические процессы Y и A заданы выше на каноническом пространстве $(\Omega^*, \mathcal{G}^*, \mathbb{F}, P)$. Напомним, что σ -алгебры $\mathcal{C}$ и $\mathcal{V}_t$ условно независимы относительно σ -алгебры $\mathcal{C}_t$. В частности, процесс $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ есть мартингал относительно потока $(\mathcal{G}_t^*)$. Значит, мы можем определить для каждого $t \in \mathbb{R}$ вероятностную меру Q_t на $(\Omega^*, \mathcal{G}_t^*)$ посредством

$$dQ_t = Y_t dP.$$

Это семейство мер согласовано при различных t и, значит, задает корректно на алгебре $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{G}_t^*$ конечно-аддитивную меру Q .

Теорема

- (i) Семейство Q_t однозначно продолжается до счетно-аддитивной вероятностной меры Q на $(\Omega^*, \mathcal{G}^*)$.
- (ii) Процесс $(\widetilde{W}_t)$, где $\widetilde{W}_t := W_t - t$, $W_t = \log Y_t + t/2$, есть стандартное броуновское движение по мере Q относительно фильтрации $(\mathcal{G}_t^*)$.

Меру Q иногда называют мерой Фёльмера, ассоциированной с супермартингалом $(Y_{A_t}, \mathcal{F}_t)$.

Пример (продолжение примера 1)

Реализуем предложенную конструкцию канонического пространства в ситуации примера 1. Случайная величина $X_t = Y_{A_t}$ должна принимать 2 значения, e^t и 0 с вероятностями e^{-t} и $1 - e^{-t}$ соответственно. Имеем $\{Y_{A_t} = 0\} = \{A_t = \infty\}$ и $\{Y_{A_t} = e^t\} = \{A_t \in \{s: W_s = t + s/2\}\}$. Положим $A_t = \inf \{s: W_s = t + s/2\} = \inf \{s: Y_s = e^t\}$, где, как обычно, $\inf \emptyset = \infty$. Тогда $Y_{s \wedge A_t}$, $s \geq 0$, будет ограниченным мартингалом и, следовательно $1 = E Y_{A_t} = e^t P(A_t < \infty)$. Значит, Y_{A_t} имеет требуемые одномерные распределения. Более того, имеем, что $Y_{A_t} = e^t \mathbb{1}_{\{t < T_\infty\}}$.

Некоторые результаты

Мы продолжаем рассматривать каноническую постановку из предыдущего раздела. Мера Q определяется в теореме 1 (i). Напомним, что

$$T_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема

Следующие условия эквивалентны:

- (i) X — $(\mathbb{F}, P)$ -мартингал (соответственно, $(\mathbb{F}, P)$ -равномерно интегрируемый мартингал);
- (ii) $Q(\{A_t < \infty\}) = 1$ для любого $t \geq 0$ (соответственно, $Q(\{A_\infty < \infty\}) = 1$);
- (ii') $Q(\{T_\infty = \infty\}) = 1$ (соответственно, $Q(\{T_t = \infty \text{ для некоторого } t\}) = 1$).

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} Q(\{A_t < \infty\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(\{n \leq A_t < n+1\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{n \leq A_t < n+1\}} Y_{n+1} dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{n \leq A_t < n+1\}} Y_{A_t} dP = \int_{\{A_t < \infty\}} Y_{A_t} dP \\ &= \int_{\Omega^*} Y_{A_t} dP = EX_t. \end{aligned}$$

Отсюда следует эквивалентность (i) и (ii) в первом случае.

Доказательство в равномерно интегрируемом случае повторяет предыдущее рассуждение с заменой A_t на A_∞ .

Эквивалентность (ii) и (ii') доказывается тривиально.

Докажем следующее обобщение критерия Новикова.

Теорема

Предположим, что выполнено условие

$$E \exp\left(\frac{1}{2}A_\infty\right) < \infty. \quad (2)$$

Тогда X — равномерно интегрируемый $(\mathbb{F}, P)$ -мартингал.

Следствие

Предположим, что для любого $t \geq 0$ выполнено условие

$$E \exp\left(\frac{1}{2}A_t\right) < \infty. \quad (3)$$

Тогда X — $(\mathbb{F}, P)$ -мартингал.

Доказательство: Из условия теоремы следует, что $\mathbb{G}^*$ -моменты остановки A_t конечны P-п.н. В частности, случайные величины $X_t = Y_{A_t} = \exp(W_{A_t} - A_t/2)$ строго положительны P-п.н. По определению меры Q она локально абсолютно непрерывна на фильтрации $\mathbb{G}^*$ относительно меры P : $Q|_{\mathcal{G}_t^*} \ll P|_{\mathcal{G}_t^*}$ и $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{G}_t^*} = Y_t$. Хорошо известно, что в этих обстоятельствах

$$P|_{\mathcal{G}_{A_t}^*} \ll Q|_{\mathcal{G}_{A_t}^*} \quad \text{и} \quad \frac{dP}{dQ}|_{\mathcal{G}_{A_t}^*} = \mathbb{1}_{\{A_t < \infty\}} / Y_{A_t} = \mathbb{1}_{\{A_t < \infty\}} / X_t \quad Q\text{-п.н.}$$

Заметим также, что эти соотношения сохраняются при замене A_t на меньший $\mathbb{G}^*$ -момент остановки.

Положим теперь $\widetilde{W}_t = W_t - t$ и $S_n := \inf \{t \geq 0 : \widetilde{W}_t < -n\}$.

Тогда S_n есть $\mathbb{G}^*$ -момент остановки, $Q(S_n < \infty) = 1$, так как $\widetilde{W}$ есть стандартное броуновское движение относительно $Q, 00$ и мы имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\left(\frac{1}{2}(A_t \wedge S_n)\right) &= \mathbb{E}_Q \exp\left(\frac{1}{2}(A_t \wedge S_n) - W_{A_t \wedge S_n} + \frac{1}{2}(A_t \wedge S_n)\right) \\ &= \mathbb{E}_Q \exp\left(-\widetilde{W}_{A_t \wedge S_n}\right) \\ &\geq \mathbb{E}_Q \exp\left(-\widetilde{W}_{S_n}\right) \mathbb{1}_{\{A_t = \infty\}} = e^n Q(A_t = \infty). \end{aligned}$$

Так как левая часть ограничена по n по условию, заключаем, что $Q(A_t = \infty) = 0$.

Доказанная теорема является одним из обобщений теоремы Новикова. Оригинальный результат Новикова, по существу, приведен в следующем следствии.

Следствие

Пусть M — непрерывный локальный мартингал (на некотором пространстве с фильтрацией). Если

$$E \exp\left(\frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty\right) < \infty, \quad (4)$$

то стохастическая экспонента $\mathcal{E}(M)$ — равномерно интегрируемый мартингал.

Доказательство.

По теореме Дамбиса–Дубинса–Шварца, расширяя при необходимости вероятностное пространство, можно построить винеровский процесс W' и фильтрацию $(\mathcal{H}_t)$, для которых W' есть $(\mathcal{H}_t)$ -броуновское движение, $\langle M \rangle$ есть $(\mathcal{H}_t)$ -замена времени и $M = W'_{\langle M \rangle}$ п.н. Обозначим P совместное распределение на $(\Omega^*, \mathcal{G}^*)$ процессов $\exp(W'_t - t/2)$ и $\langle M \rangle_t$. Тогда в силу определений процесс Y_{A_t} будет каноническим представлением процесса $\exp(W'_{\langle M \rangle_t} - \langle M \rangle_t/2) = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t) = \mathcal{E}(M)_t$, который есть неотрицательный супермартингал (например, относительно фильтрации, с которой он согласован). Условие (2) запишется в виде (4). Таким образом, получаем требуемое утверждение из предшествующей теоремы. $\square$

Следствие

Пусть W и τ — винеровский процесс и момент остановки соответственно относительно одной и той же фильтрации. Если

$$E \exp\left(\frac{\tau}{2}\right) < \infty, \quad (5)$$

то

$$E \exp\left(W_\tau - \frac{\tau}{2}\right) = 1.$$

Следует заметить удивительное обстоятельство: и только что сформулированное утверждение о достаточности условия Новикова для непрерывных экспоненциальных мартингалов, и утверждение вышеприведенной теоремы являются непосредственными следствиями этого утверждения в самом частном и простом случае, рассмотренном в последнем следствии. Действительно, надо взять $\tau = A_\infty$ или $\tau = \langle M \rangle_\infty$.

Спасибо за внимание!