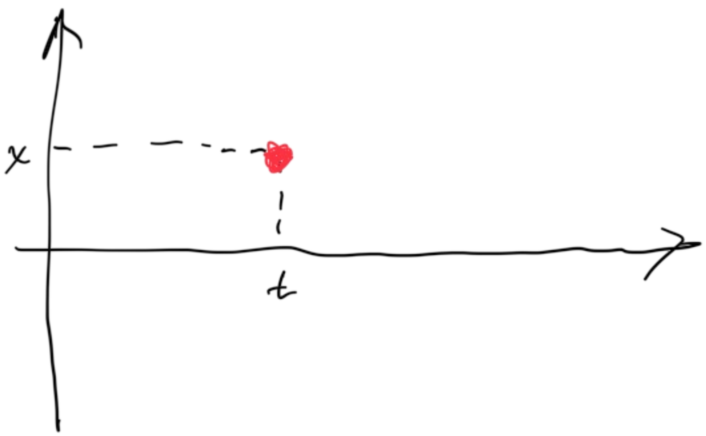
А.А. Муравлев

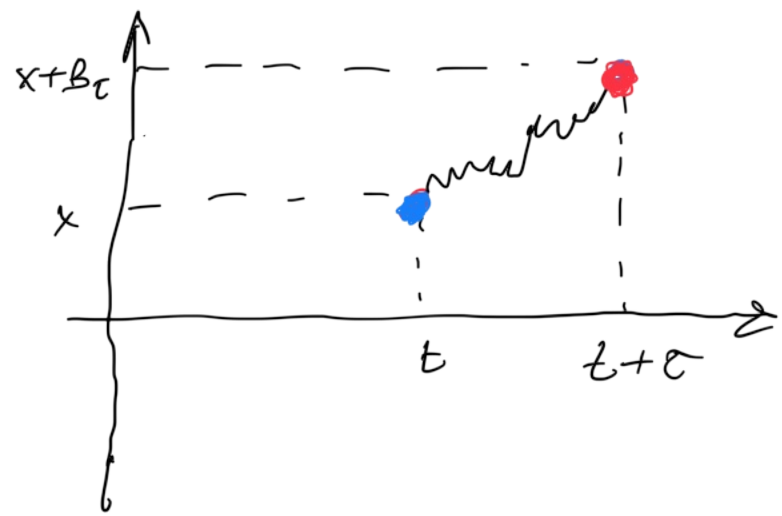
# О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ НА КОНЕЧНОМ И БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛАХ

МИАН, 15 октября

# $\boxed{1.}$ Задачи оптимальной остановки: постановка

Пусть на фазовом пространстве задана **функция выигрыша** $G(t,x)$. Рассматриваемые далее задачи подразумевают две следующие возможности:




Таким образом мы приходим к задаче максимизации

$$\mathsf{E}\, G\big(t+\tau, x+W_\tau\big)$$

по моментам остановки $\tau$. $\Big\langle$Но нужно еще задать ограничения на множество **допустимых** $\tau\Big\rangle$.

$\Big\langle$**1.**$\Big\rangle$ На **бесконечном интервале** наблюдения задача ставится следующим образом:

$$V^{\infty}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{\infty}\big(t+\tau, x+W_{\tau}\big).$$

Требуется найти как

$$\boxed{\textbf{функцию цены } V(t,x),}$$

так и (по возможности)

$$\boxed{\textbf{оптимальный}\text{ момент остановки } \tau^{*}.}$$

Как известно, **функция цены**

$$V^{\infty}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{\infty}\big(t+\tau, x+W_{\tau}\big)$$

может быть охарактеризована как наименьшая из функций $f(t,x)$, удовлетворяющих двум следующим условиям:

**а)** $f(t,x)$ — **супергармоническая** функция;

**б)** $f(t,x) \geq G^{\infty}(t,x)$.

Напомним, что **супергармоническое** свойство у функции $f(t,x)$ по сути означает следующее:

$$\mathsf{E}\, f(t+\tau, x+W_\tau) \le f(t,x)$$

для всех моментов остановки $\tau$ и точек $(t,x)$.

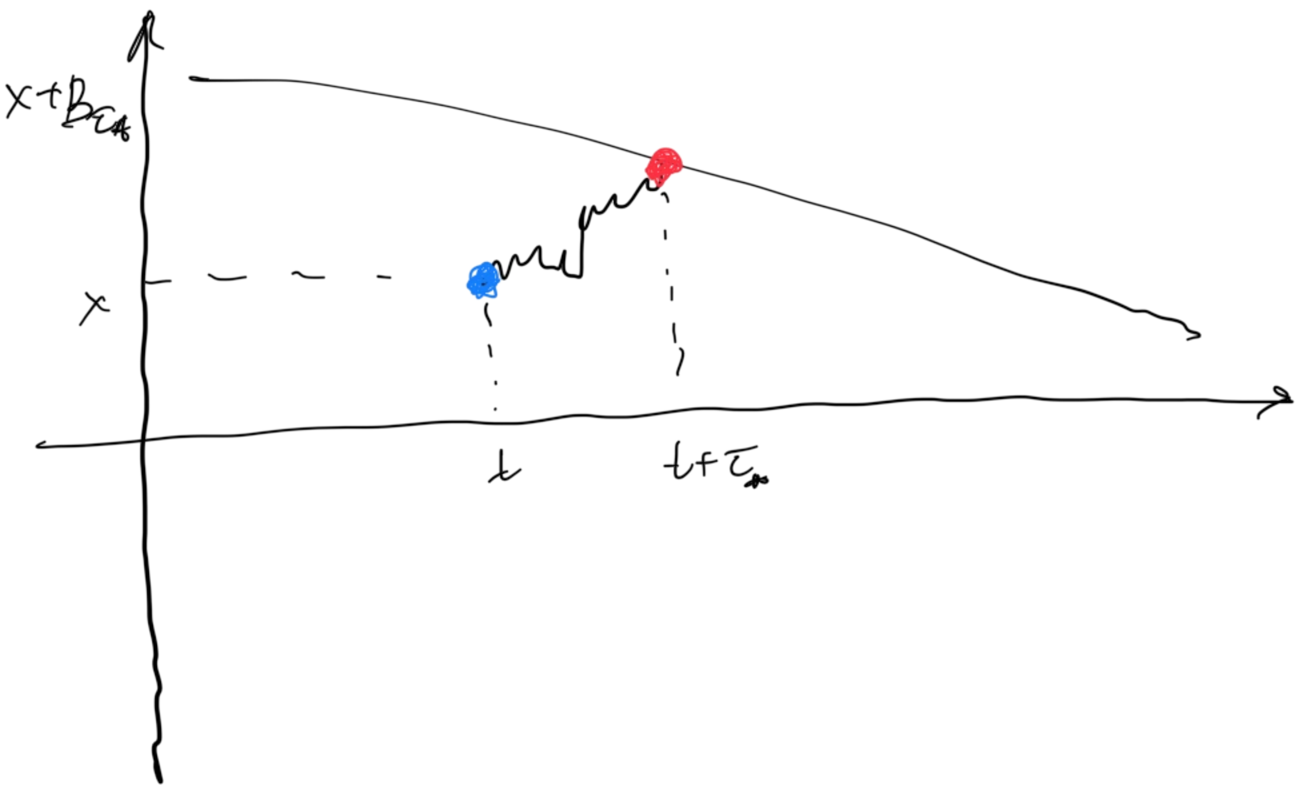
Отметим следующие полезные факты.

**а)** В случае непрерывности функции $f(t,x)$ данное свойство является **локальным**.

**б)** При достаточной гладкости функции $f(t,x)$ данное свойство **сводится** к следующему

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \le 0.$$

Если **функция цены** обладает рядом дополнительных свойств, то **оптимальный** момент остановки $\tau^*$ существует и представляет собой момент достижения некоторой границы (или границ).



$\left\langle \textbf{2.} \right\rangle$ На **конечном интервале** наблюдения задача ставится аналогичным образом:

$$V^T(t,x) = \sup_{\tau<T} \mathsf{E}\, G^T\Big(t+\tau, x+W_\tau\Big),$$

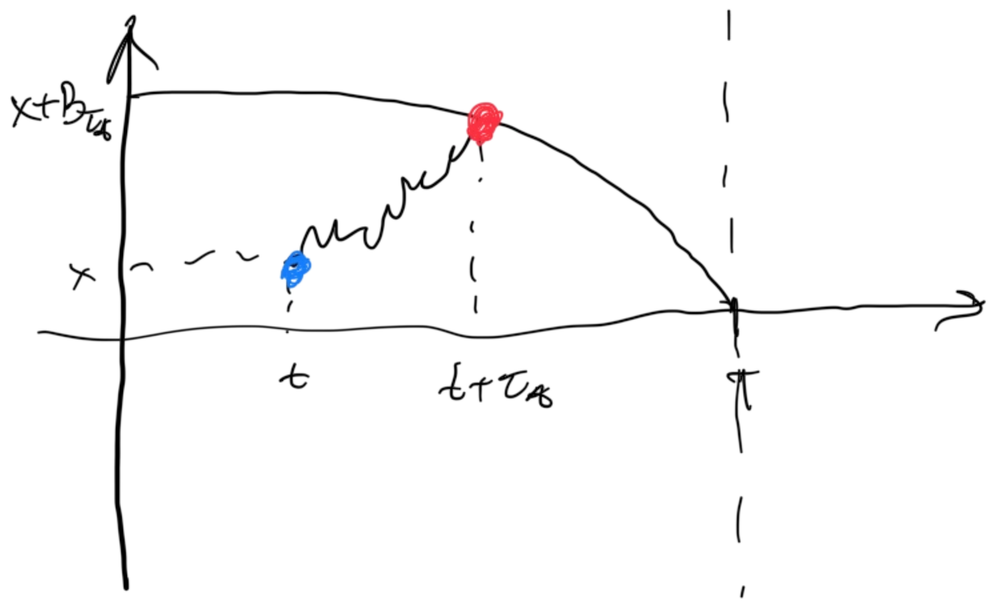
но предполагается, что $\tau$ принадлежит **интервалу** $[0,T)$.

Можно также рассматривать задачу на замкнутом интервале $[0,T]$. В этом случае возникает **“дополнительный выигрыш”**

$$G^T(x,T) - G^T(x,T-),$$

если наблюдения не были остановлены до момента времени $T$.

Как и в случае бесконечного интервала наблюдения, на конечном интервале, функция $V^T$ обладает **супергармонической** характеризацией, а при выполнении некоторых дополнительных предположений, оптимальный момент остановки — момент достижения некоторых границ.



$\langle$**3.**$\rangle$ При решении задач

$$V^{\infty}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{\infty}\big(t+\tau, x+W_\tau\big)$$

и

$$V^{T}(t,x) = \sup_{\tau<T-t} \mathsf{E}\, G^{T}\big(t+\tau, x+W_\tau\big)$$

возникает необходимость доказательства различных свойств **функций цены** и оптимальных **границ остановки** (а также вычисления этих границ).

**Вопрос.**

Можно ли результаты, полученные для $V^{\infty}(t,x)$, **использовать** для исследования задач $V^{T}(t,x)$? (И наоборот?)

Конечно, **можно использовать** следующий факт

$$V(t,x) = \lim_{T\to\infty} V^T(t,x).$$

Но есть и менее очевидный результат на этот счет.

## $\boxed{2.}$ Соответствие между задачами на конечном и бесконечном временных интервалах

Пусть на **бесконечном** временном интервале задана функция выигрыша $G^{\infty}(t,x)$. Определим функцию $G^{T}(t,x)$ следующим образом

$$G^{T}(t,x)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}\right]\cdot G^{\infty}\left(\frac{x}{T-t},\frac{1}{T-t}\right)$$

на **конечном** временном интервале $[0,T]$.

Будем обозначать данное отображение $G^{\infty}\longmapsto G^{T}$ как $\mathcal{A}$.

Пусть, как и ранее,

$$V^{\infty}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{\infty}\big(t+\tau, x+W_\tau\big)$$

и

$$V^{T}(t,x) = \sup_{\tau<T-t} \mathsf{E}\, G^{T}\big(t+\tau, x+W_\tau\big).$$

Поскольку **функции выигрыша** $G^{\infty}$ и $G^{T}$ связаны между собой, то **функции выигрыша** $V^{\infty}$ и $V^{T}$ также будут как-то связаны между собой.

Оказывается, для введенного отображения

$$\mathcal{A}: \ G^{\infty} \longmapsto G^{T}$$

зависимость $V^T$ от $V^{\infty}$ является **явной**, и задается **аналогичной формулой**:

$$V^T(t,x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}\right] \cdot V^{\infty}\left(\frac{x}{T-t}, \frac{1}{T-t}\right).$$

Поэтому для функции $G^{\infty}(t,x)$ **вместо** решения задачи

$$V^{\infty}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{\infty}\big(t+\tau, x+W_{\tau}\big)$$

**напрямую** можно пойти по следующей цепочке:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{G^{\infty}(t,x)} \arrow[d, "\mathcal{A}"'] & \boxed{V^{\infty}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{\infty}\big(t+\tau, x+W_{\tau}\big)} \\
\boxed{G^{T}(t,x)} \arrow[r, "\text{решаем}", "\text{задачу}"'] & \boxed{V^{T}(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G^{T}\big(t+\tau, x+W_{\tau}\big)} \arrow[u, "\mathcal{A}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Данный результат был получен в работе

**P. van Moerbeke**. ‘‘`Optimal stopping and free boundary problems`’’, 1974.

**Но откуда он возникает? И как доказывается?**

Идея получения данного результата **основана** на

**ПРЕОБРАЗОВАНИИ АППЕЛЯ**,

возникающем в теории дифференциальных уравнений.

В работе

“Sur l’équation $\partial^2 z \partial x^2$ - $\partial z^2 z/\partial^2 y = 0$ etla théorie de la chaleu”, 1982.

**П. Аппель** показал, что если функция $u$ удовлетворяет **уравнению теплопроводности**, то функция

$$v(t,x) = \frac{\dfrac{1}{2}u\left(\frac{x}{t}, \frac{1}{t}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-x^2/2)}$$

удовлетворяет **обратному уравнению теплопроводности**.

Используя данный факт, **П. ван Моербеке** и доказал данный результат о соответствии задач оптимальной остановки на конечном и бесконечном временных интервалах.

$\Big\langle$Доказательство использует конструкцию ***H*−ПРОЦЕССОВ ДУБА**.$\Big\rangle$

## 3. Подход на основе методов статистического последовательного анализа

К рассматриваемому вопросу можно подходить и из других соображений.

**1.** Дальнейшее изложение в существенной степени основывается на идеях, изложенных в книге

“Стохастические задачи о разладке” (**А.Н. Ширяев**, 2016 г.),

главы VIII, IX, X.

**2.** В особенности, используются результаты работы

**М. В. Житлухин**, **А. А. Муравлев**, “О задаче Чернова проверки гипотез о значении сноса броуновского движения”, 2012.

Рассмотрим **байесовскую модель** броуновского движения с неизвестным сносом:

$$X_t = \theta t + B_t, \qquad t \geq 0,$$

где $B = (B_t)_{t\geq 0}$ — броуновское движение, а $\theta$ — **случайная величина**, независимая от $B$. Предполагается, что значение $\theta$ неизвестно и оценивается по последовательным наблюдениям за процессом $X$ $\Big\langle$т.е. в соответствии с фильтрацией $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$, где $\mathcal{F}_t^X = \sigma\Big(X_s, s \leq t\Big)\Big\rangle$.

Нас будет интересовать случай, когда $\theta$ имеет **гауссовское распределение**:

$$\theta \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \sigma_0^2\right).$$

**Апостериорное распределение** в этом случае будет также гауссовским:

$$\mathrm{Law}\left(\theta \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right) = \mathcal{N}\left(\frac{\mu_0 + \sigma_0^2 X_t}{1 + \sigma_0^2 t}, \frac{\sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2 t}\right).$$

Для данного процесса $X$ рассмотрим следующую задачу **оптимальной остановки**:

$$V(t, x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}_x G(t + \tau, X_\tau).$$

Эта задача **не является стандартной**, поскольку процесс $X$ содержит ненаблюдаемую величину $\theta$.

Существуют разные подходы к ее решению.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Для процесса $X$ имеют места следующее **УРАВНЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ**:

$$dX_t = \mathsf{E}\left(\theta \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right)dt + d\overline{B}_t, \qquad X_0 = x,$$

где $\overline{B} = (\overline{B}_t)_{t \geq 0}$ — некоторое (другое) броуновское движение такое, что $\overline{B}_t$ является $\boldsymbol{\mathcal{F}_t^X}$**-измеримой** случайной величиной.

$\Big\langle$Данное уравнение называется **обновляющим представлением**.$\Big\rangle$

Как было отмечено, в случае **гауссовской** случайной величины $\theta \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \sigma_0^2\right)$ имеет место

$$\mathrm{Law}\left(\theta \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right) = \mathcal{N}\left(\frac{\mu_0 + \sigma_0^2 X_t}{1 + \sigma_0^2 t}, \frac{\sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2 t}\right),$$

поэтому

$$dX_t = \mathsf{E}\left(\frac{\mu_0 + \sigma_0^2 X_t}{1 + \sigma_0^2 t}\right) dt + d\overline{B}_t, \qquad X_0 = x.$$

Отсюда видно, что процесс $X$ является **диффузионным**.

Таким образом, в данном виде **задача**

$$V(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}_x\, G(t+\tau, X_\tau)$$

становится **стандартной** для диффузионного процесса

$$dX_t = \mathsf{E}\left(\frac{\mu_0 + \sigma_0^2 X_t}{1+\sigma_0^2 t}\right) dt + d\overline{B}_t, \qquad X_0 = x.$$

Дальше данную задачу можно решать для конкретной функции $G$.
Однако, ее формулировку можно упростить.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Применяя

**ТЕОРЕМУ ГИРСАНОВА**,

данную задачу для процесса $X$ можно свести к задаче для стандартного **броуновского движения** $B$.

Производная **Радона – Никодима** имеет следующий вид

$$\frac{d\mathsf{P}_t}{d\mathsf{P}_t^0} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \exp\left(\frac{X_t^2}{2(1+t)}\right).$$

$\Big\langle$Здесь и далее для простоты формулы приводятся для случая $\theta \sim \mathcal{N}(0,1)$.$\Big\rangle$

Поэтому можно показать, что задача

$$V(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}_x\, G(t+\tau, X_\tau)$$

**сводится** к **следующей**: найти

$$V(t,x) = \mathsf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{1+t}} \exp\left(\frac{B_t^2}{2(1+t)}\right)\right]^{-1}$$

$$\times \sup_{\tau} \mathsf{E}\, G(t+\tau, x+B_\tau) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+\tau}} \exp\left(\frac{B_\tau^2}{2(1+\tau)}\right)\right].$$

Полученная задача является

**ЗАДАЧЕЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ**

**ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ**

**НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ**.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Но можно пойти и другим путем. Напомним, что для **случайной величины** $\theta$ с $\mathsf{E}\,|\theta| < \infty$ процесс

$$M_t = \mathsf{E}\left(\theta \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right), \qquad t \geq 0,$$

называется **МАРТИНГАЛОМ ЛЕВИ** $\Big\langle$относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ $\Big\rangle$.

В случае, когда $\theta$ имеет **гауссовское** распределение $\theta \sim \mathcal{N}(0,1)$, в явном виде получаем следующие формулы:

$$M_t = \frac{X_t}{1+t}, \qquad \langle M \rangle_t = \frac{t}{1+t}, \qquad\qquad t \geq 0.$$

Далее нужно произвести <u>два</u> следующих шага.

$\boxed{1.}$ **Переформулировать** задачу

$$V(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}_x\, G(t+\tau, X_\tau)$$

в виде задачи для процесса $M = (M_t)_{t\ge 0}$:

$$V(t,x) = \sup_{\tau} \mathsf{E}_m\, \widetilde{G}(t+\tau, M_\tau).$$

$\boxed{2.}$ Произвести **замену времени**

$$r(t) = \inf\Big\{t \ge 0 : \langle M\rangle_t \ge r\Big\} = \inf\left\{t \ge 0 : \frac{t}{1+t} \ge r\right\}.$$

Таким образом, получается постановка

**ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ**

**ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ**

**НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ**.

Оказывается, что построенное таким образом соответствие — это

**ТО ЖЕ САМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ**,

что и в работе **П. ван Моербеке**.