О задаче Дэвиса-Монро

Павел Яськов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

К 90-летию Альберта Николаевича Ширяева

План

План

- Мотивация
- БД с нелинейным сносом
- Гауссов мультипликативный хаос
- Идеи доказательства

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД на $[0,1]$, заданное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$,

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД на $[0,1]$, заданное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$,

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Существует ли $f \in L_2$, для которой $F(t) = \int_0^t f(s)ds$?

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД на $[0,1]$, заданное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$,

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Существует ли $f \in L_2$, для которой $F(t) = \int_0^t f(s)ds$?

- нет $\Longrightarrow \mathsf{P}_X \perp \mathsf{P}_B$

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД на $[0,1]$, заданное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$,

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Существует ли $f \in L_2$, для которой $F(t) = \int_0^t f(s)ds$?

- нет $\Longrightarrow \mathrm{P}_X \perp \mathrm{P}_B$
- да $\Longrightarrow \mathrm{P}_X \sim \mathrm{P}_B$

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД на $[0,1]$, заданное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$,

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Существует ли $f \in L_2$, для которой $F(t) = \int_0^t f(s)ds$?

- нет $\Longrightarrow \mathrm{P}_X \perp \mathrm{P}_B$
- да $\Longrightarrow \mathrm{P}_X \sim \mathrm{P}_B$ и при этом

$$\frac{d\mathrm{P}_X}{d\mathrm{P}_B}(g) = \exp\left\{\int_0^1 f(s)dg(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(s)ds\right\}.$$

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД на $[0,1]$, заданное на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$,

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Существует ли $f \in L_2$, для которой $F(t) = \int_0^t f(s)ds$?

- нет $\Longrightarrow \mathrm{P}_X \perp \mathrm{P}_B$
- да $\Longrightarrow \mathrm{P}_X \sim \mathrm{P}_B$ и при этом

$$\frac{d\mathrm{P}_X}{d\mathrm{P}_B}(g) = \exp\left\{ \int_0^1 f(s)dg(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(s)ds \right\}.$$

на $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]), \mathrm{P}_B)$.

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, B - БД и

$$X = B + F \text{ для } F \in C[0,1].$$

Существует ли $f \in L_2$, для которой $F(t) = \int_0^t f(s)ds$?

- нет $\Longrightarrow \mathsf{P}_X \perp \mathsf{P}_B$
- да $\Longrightarrow \mathsf{P}_X \sim \mathsf{P}_B$ и при этом

$$\frac{d\mathsf{P}_X}{d\mathsf{P}_B} = \exp\left\{\int_0^1 f(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(s)ds\right\},$$

если B задано на $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]), \mathsf{P}_B)$ тождественным отображением.

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, $(B(t))$ - БД на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и

$$X(t) = B(t) + \int_0^t f(s)ds.$$

Тогда

- $f \notin L_2 \Longrightarrow \mathrm{P}_X \perp \mathrm{P}_B$

Мотивация: теорема Камерона-Мартина

Пусть $t \in [0,1]$, $(B(t))$ - БД на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и

$$X(t) = B(t) + \int_0^t f(s) ds.$$

Тогда

- $f \notin L_2 \Longrightarrow \mathrm{P}_X \perp \mathrm{P}_B$

  $\exists\ (c_n)_{n=1}^{\infty} : c_n \to \infty$ и

  $$\int_0^1 f_n(s)\, dZ(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 f_n^2(s)\, ds \overset{\text{п.н.}}{\to} \begin{cases} -\infty, & Z = B \\ +\infty, & Z = X \end{cases},$$

  где $f_n = f\mathrm{I}(|f| \leqslant c_n)$.

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от $(B(t))$ и

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+}, \quad t \in [0,1].$$

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от $(B(t))$ и

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+}, \quad t \in [0,1].$$

Davis&Monroe (1984):

$$\mathsf{P}_{X_\varepsilon} \ll \mathsf{P}_B, \quad \text{где } 0 < \varepsilon < 2,$$
$$\mathsf{P}_{X_\varepsilon} \perp \mathsf{P}_B, \quad \text{где } \varepsilon > \sqrt{8}.$$

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от $(B(t))$ и

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+}, \quad t \in [0,1].$$

Davis&Monroe (1984):

$$\mathsf{P}_{X_\varepsilon} \ll \mathsf{P}_B, \quad \text{где } 0 < \varepsilon < 2,$$
$$\mathsf{P}_{X_\varepsilon} \perp \mathsf{P}_B, \quad \text{где } \varepsilon > \sqrt{8}.$$

Яськов (2022):

$$\mathsf{P}_{X_\varepsilon} \sim \mathsf{P}_B, \quad \text{где } 0 < \varepsilon < \sqrt{8},$$
$$\mathsf{P}_{X_\varepsilon} \perp \mathsf{P}_B, \quad \text{где } \varepsilon \geqslant \sqrt{8}.$$

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X(t) = B(t) + \int_0^t f(s,\tau)ds.$$

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X(t) = B(t) + \int_0^t f(s,\tau)ds.$$

Если $f(\cdot,\tau) \in L_2$ п.н., то

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X(t) = B(t) + \int_0^t f(s,\tau)ds.$$

Если $f(\cdot,\tau) \in L_2$ п.н., то

$$\frac{d\mathrm{P}_X}{d\mathrm{P}_B} = \int_0^1 \exp\left\{ \int_0^1 f(s,u)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(s,u)ds\right\}du.$$

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+}, \quad t \in [0,1].$$

Наивное применение формулы плотности дает

$$\frac{d\mathrm{P}_{X_\varepsilon}}{d\mathrm{P}_B} = \int_0^1 \exp\left\{\delta \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u}} - \frac{\delta^2}{2}\int_u^1 \frac{ds}{s-u}\right\} du$$

с $\delta = \varepsilon/2$.

БД с нелинейным сносом: сингулярность

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+ \wedge 1}, \quad t \geqslant 0.$$

Наивное применение формулы плотности дает

$$\frac{d\mathrm{P}_{X_\varepsilon}}{d\mathrm{P}_B} = \int_0^1 \exp\left\{\delta \int_0^1 \frac{dB(s+u)}{\sqrt{s}} - \frac{\delta^2}{2}\int_0^1 \frac{ds}{s}\right\} du$$

с $\delta = \varepsilon/2$.

БД с нелинейным сносом: сингулярность

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+ \wedge 1}, \qquad t \geqslant 0.$$

Пусть

$$M = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leqslant k<2^{-n}} \left(\int_{2^{-n}}^{1} \frac{dZ(s+k2^{-n})}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{8}}{2} \int_{2^{-n}}^{1} \frac{ds}{s} \right).$$

БД с нелинейным сносом: сингулярность

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+ \wedge 1}, \quad t \geqslant 0.$$

Пусть

$$M = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leqslant k<2^{-n}} \left(\int_{2^{-n}}^{1} \frac{dZ(s+k2^{-n})}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{8}}{2} \int_{2^{-n}}^{1} \frac{ds}{s} \right).$$

Тогда п.н.

$$\begin{cases} M \leqslant 0, & \text{если } Z = B \\ M > 0, & \text{если } Z = X_\varepsilon \text{ и } \varepsilon \geqslant \sqrt{8} \end{cases}$$

БД с нелинейным сносом

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X_\varepsilon(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+}, \quad t \in [0,1].$$

Наивное применение формулы плотности дает

$$\frac{d\mathrm{P}_{X_\varepsilon}}{d\mathrm{P}_B} = \int_0^1 \exp\left\{\delta \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u}} - \frac{\delta^2}{2}\int_u^1 \frac{ds}{s-u}\right\} du$$

с $\delta = \varepsilon/2$.

БД с нелинейным сносом

Обозначим $Y(u) = \int_u^1 (s-u)^{-1/2} dB(s)$.

БД с нелинейным сносом

Обозначим $Y(u) = \int_u^1 (s-u)^{-1/2} dB(s)$. Тогда

$$\operatorname{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln \frac{1}{|u-v|} + L(u,v),$$

где L – непрерывная функция на $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$.

БД с нелинейным сносом

Обозначим $Y(u) = \int_u^1 (s-u)^{-1/2} dB(s)$. Тогда

$$\mathrm{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln \frac{1}{|u-v|} + L(u,v),$$

где L – непрерывная функция на $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$.

Колмогоров, Обухов (1962), Мандельброт (1972), теория турбулентности:
локальная диссипация энергии в $A \subseteq \mathbb{R}^3$

$$E(A) = \int_A \exp\{\lambda Y(u) - \lambda^2 \mathrm{E} Y^2(u)/2\} du,$$

$$\mathrm{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln^+ \frac{R}{\|u-v\|}.$$

Гауссов мультипликативный хаос

$$Y(u) = \int_u^1 (s-u)^{-1/2} dB(s),$$

Гауссов мультипликативный хаос

$$Y(u) = \int_u^1 (s-u)^{-1/2}\, dB(s),$$

Тогда

$$\mathrm{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln \frac{1}{|u-v|} + L(u,v)$$

Замечание: Y нельзя определить точечно, но можно определить как гауссову систему $\{\int_0^1 Y(u)\rho(du)\}$, индексированную определенным классом знаковых мер ρ.

Гауссов мультипликативный хаос

Логкоррелированный гауссовский процесс $Y = Y(u)$ с

$$\mathrm{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln \frac{1}{|u - v|} + L(u, v),$$

где L – непрерывная функция.

Гауссов мультипликативный хаос μ_δ, связанная с Y – это случайная мера на $\mathcal{B}([0, 1])$, удовлетворяющая

$$\mu_\delta(A) = \int_A \exp\{\delta Y(u) - \delta^2 \mathrm{E} Y^2(u)/2\} du.$$

Гауссов мультипликативный хаос

Логкоррелированный гауссовский процесс $Y = Y(u)$ с

$$\mathrm{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln \frac{1}{|u - v|} + L(u, v),$$

где L – непрерывная функция.

Гауссов мультипликативный хаос μ_δ, связанная с Y – это случайная мера на $\mathcal{B}([0, 1])$, удовлетворяющая

$$\mu_\delta(A) = \int_A \exp\left\{\delta Y(u) - \delta^2 \mathrm{E} Y^2(u)/2\right\} du.$$

Основной вопрос. Для каких δ можно определить μ_δ и каким образом?

Гауссов мультипликативный хаос

Логкоррелированный гауссовский процесс $Y = Y(u)$ с

$$\mathrm{Cov}(Y(u), Y(v)) = \ln \frac{1}{|u-v|} + L(u,v),$$

где L – непрерывная функция.

Гауссов мультипликативный хаос μ_δ, связанная с Y – это случайная мера на $\mathcal{B}([0,1])$, удовлетворяющая

$$\mu_\delta(A) = \int_A \exp\left\{\delta Y(u) - \delta^2 \mathsf{E} Y^2(u)/2\right\} du.$$

Основной вопрос. Для каких δ можно определить μ_δ и каким образом?

Субкритический режим $\delta < \sqrt{2}$.
Kahane, 1985; Shamov, 2016; Berestycki, 2017

Схема доказательства

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X_{\varepsilon,\gamma}(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+ + \gamma} - \varepsilon\sqrt{\gamma}, \quad t \in [0,1].$$

Применение формулы плотности дает при $\delta = \varepsilon/2$

$$\frac{d\mathrm{P}_{X_{\varepsilon,\gamma}}}{d\mathrm{P}_B} = \int_0^1 \exp\left\{\delta \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u+\gamma}} - \frac{\delta^2}{2}\int_u^1 \frac{ds}{s-u+\gamma}\right\} du.$$

Схема доказательства

Пусть $\tau \sim U[0,1]$ не зависит от B и

$$X_{\varepsilon,\gamma}(t) = B(t) + \varepsilon\sqrt{(t-\tau)^+ + \gamma} - \varepsilon\sqrt{\gamma}, \quad t \in [0,1].$$

Применение формулы плотности дает при $\delta = \varepsilon/2$

$$\frac{dP_{X_{\varepsilon,\gamma}}}{dP_B} = \int_0^1 \exp\left\{\delta \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u+\gamma}} - \frac{\delta^2}{2}\int_u^1 \frac{ds}{s-u+\gamma}\right\} du.$$

При $\delta < \sqrt{2}$ нужно доказать сходимость плотностей в L_1 при $\gamma \to 0$.

Схема доказательства

$$I(Y) = \int_0^1 \exp\{Y(u) - \mathrm{E}Y^2(u)/2\}du,$$

$$Y_\gamma(u) = \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u+\gamma}}$$

При $\delta < \sqrt{2}$ нужно доказать сходимость $I(\delta Y_\gamma)$ в L_1 при $\gamma \to 0$.

Схема доказательства

$$I(Y) = \int_0^1 \exp\{Y(u) - \mathrm{E}Y^2(u)/2\}du,$$

$$Y_\gamma(u) = \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u+\gamma}}$$

При $\delta < \sqrt{2}$ нужно доказать сходимость $I(\delta Y_\gamma)$ в L_1 при $\gamma \to 0$.

Случай $\delta < 1$. В L_2 скалярные произведения

$$\mathrm{E}I(\delta Y_\gamma)I(\delta Y_\zeta) \text{ имеют предел при } \gamma, \zeta \to 0.$$

Следовательно, $I(\delta Y_\gamma)$ сходится в L_2 при $\gamma \to 0$.

Схема доказательства

$$I(Y) = \int_0^1 \exp\{Y(u) - \mathrm{E}Y^2(u)/2\}du, \; \mathrm{E}I(Y) = 1,$$

$$Y_\gamma(u) = \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s - u + \gamma}}$$

Нужно доказать сходимость $I(\delta Y_\gamma)$ в L_1 при $\gamma \to 0$.

Случай $1 \leqslant \delta < \sqrt{2}$. Величины

$$\mathrm{E}\sqrt{I(\delta Y_\gamma) + I(\delta Y_\zeta)} \text{ имеют предел при } \gamma, \zeta \to 0.$$

Следовательно, $I(\delta Y_\gamma)$ сходится в $L_{1/2}$ при $\gamma \to 0$.

Схема доказательства

$$I(Y) = \int_0^1 \exp\{Y(u) - \mathrm{E}Y^2(u)/2\}du, \ \mathrm{E}I(Y) = 1,$$

$$Y_\gamma(u) = \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s - u + \gamma}}$$

Нужно доказать сходимость $I(\delta Y_\gamma)$ в L_1 при $\gamma \to 0$.

Случай $1 \leqslant \delta < \sqrt{2}$. Величины

$$\mathrm{E}\sqrt{I(\delta Y_\gamma) + I(\delta Y_\zeta)} \text{ имеют предел при } \gamma, \zeta \to 0.$$

Следовательно, $I(\delta Y_\gamma)$ сходится в $L_{1/2}$ при $\gamma \to 0$.

При $\xi, \eta \geqslant 0$, $\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\eta = 1$ имеем

$$\frac{\left(\mathrm{E}\sqrt{|\xi - \eta|}\right)^4}{40} \leqslant \mathrm{E}\sqrt{\frac{\xi + \eta}{2}} - \mathrm{E}\frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{\eta}}{2}.$$

Схема доказательства

$$I(Y) = \int_0^1 \exp\{Y(u) - \mathrm{E}Y^2(u)/2\}du, \ \mathrm{E}I(Y) = 1,$$

$$Y_\gamma(u) = \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u+\gamma}}$$

Нужно доказать сходимость $I(\delta Y_\gamma)$ в L_1 при $\gamma \to 0$.

Случай $1 \leqslant \delta < \sqrt{2}$. Величины

$$\mathrm{E}\sqrt{I(\delta Y_\gamma) + I(\delta Y_\zeta)} \text{ имеют предел при } \gamma, \zeta \to 0.$$

Следовательно, $I(\delta Y_\gamma)$ сходится в $L_{1/2}$ при $\gamma \to 0$.

При этом существует $p = p_\delta > 1$, для которого

$$\sup_{\gamma>0} \mathrm{E}I^p(\delta Y_\gamma) < \infty.$$

Схема доказательства

$$Y_\gamma(u) = \int_u^1 \frac{dB(s)}{\sqrt{s-u+\gamma}}$$

Случай $1 \leqslant \delta < \sqrt{2}$. Величины

$$\mathsf{E}\sqrt{I(\delta Y_\gamma) + I(\delta Y_\zeta)} \text{ имеют предел при } \gamma, \zeta \to 0.$$

Следовательно, $I(\delta Y_\gamma)$ сходится в $L_{1/2}$ при $\gamma \to 0$.

Факт 1. $\mathsf{E} Y_\gamma(u) Y_\zeta(v)$ не возрастает по γ, ζ при фиксированных u, v.

Факт 2. Неравенство Кахана

Схема доказательства

Факт 2. Неравенство Кахана
Пусть $X = (X(u))_{0 \leqslant u \leqslant 1}$, $Y = (Y(u))_{0 \leqslant u \leqslant 1}$ – непрерывные центрированные гауссовские процессы, причем $\mathsf{E}X(u)X(v) \leqslant \mathsf{E}Y(u)Y(v)$ для всех $u, v \in [0, 1]$.

Схема доказательства

Факт 2. Неравенство Кахана

Пусть $X = (X(u))_{0\leqslant u\leqslant 1}$, $Y = (Y(u))_{0\leqslant u\leqslant 1}$ – непрерывные центрированные гауссовские процессы, причем $\mathrm{E}X(u)X(v) \leqslant \mathrm{E}Y(u)Y(v)$ для всех $u, v \in [0,1]$.
Тогда

$$\mathrm{E}I^q(X) \begin{cases} \leqslant \mathrm{E}I^q(Y), & q \geqslant 1, \\ \geqslant \mathrm{E}I^q(Y), & 0 < q < 1, \end{cases}$$

Литература

Berestycki, N.: An elementary approach to Gaussian multiplicative chaos. Electron. Commun. Probab. 22:Paper No. 27, 12 (2017)

Kahane, J.-P.: Sur le chaos multiplicatif, Ann. Sci. Math. Qu´ebec, 9 no.2 (1985), 105-150

Kolmogorov, A.N.: A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence, J. Fluid. Mech., 13 (1962), 83-85.

Mandelbrot, B.B.: A possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy in intermittent turbulence, Statistical Models and Turbulence, La Jolla, CA, Lecture Notes in Phys. no. 12, Springer, (1972), 333-351.

Shamov, A.: On Gaussian multiplicative chaos. J. Funct. Anal. 270(9), 3224–3261 (2016).

Яськов, П.А.: О задаче Дэвиса–Монро, УМН, 77:6(468) (2022), 207–208