

Математический институт им.В.А.Стеклова
Общеинститутский семинар, 17.10.2024

Операторные E -нормы и их использование

М.Е.Широков

Основные публикации

[1] M.E.Shirokov, "Strong convergence of quantum channels: Continuity of the Stinespring dilation and discontinuity of the unitary dilation", J. Math. Phys., 61 (2020), 82204 , 15 pp., arXiv: 1712.03219

[2] М.Е.Широков, "Операторные E -нормы и их использование", Матем. сб., 211:9 (2020), 119–152

[3] M.E.Shirokov, "Optimal form of the Kretschmann–Schlingemann–Werner theorem for energy-constrained quantum channels and operations", J. Math. Phys., 63:11 (2022), 112203 , 17 pp.

[4] L. van Luijk "Energy-limited quantum dynamics", arXiv:2405.10259

[5] S.Becker, N.Galke, R.Salzmann, L. van Luijk, "Convergence rates for the Trotter-Kato splitting", arXiv:2407.04045

Основные обозначения

$\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство со с.п. $\langle \phi, \psi \rangle$;

$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}$;

$\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$ со следовой нормой $\|\rho\|_1 \doteq \text{Tr} \sqrt{\rho^* \rho}$;

$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – множество квантовых состояний (положительных операторов в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ с единичным следом);

$\text{ext} \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – множество чистых квантовых состояний (одномерных проекторов)

Операторные E -нормы на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

Пусть G – положительный оператор на $\mathcal{H}$ с плотной областью определения $\mathcal{D}(G)$ такой, что

$$\inf \{ \|G\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{D}(G), \|\varphi\| = 1 \} = 0.$$

Для заданного $E > 0$ рассмотрим функцию

$$\|A\|_E^G \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_1, \langle \varphi, G\varphi \rangle \leq E} \|A\varphi\|, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}),$$

где $\mathcal{H}_1$ – единичная сфера в $\mathcal{H}$ и предполагается, что

$$\langle \varphi, G\varphi \rangle \doteq \begin{cases} \|\sqrt{G}\varphi\|^2, & \text{если } \varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{G}) \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для любого оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ имеют место свойства:

a) $\|A\|_E^G$ не убывает и стремится к $\|A\|$ при $E \rightarrow +\infty$;

b) $E \mapsto [\|A\|_E^G]^p$ – вогнутая функция на $\mathbb{R}_+$ при $p \in (0, 2]$;

c) $\|A\varphi\| \leq \|A\|_{E_\varphi}^G \leq K_\varphi \|A\|_E^G$ для любого единичного вектора φ из $\mathcal{D}(\sqrt{G})$, где $E_\varphi = \|\sqrt{G}\varphi\|^2$, а $K_\varphi = \max\{1, \|\sqrt{G}\varphi\|/\sqrt{E}\}$.

$$\text{b)} \quad \Rightarrow \quad \|A\|_{E_1}^G \leq \|A\|_{E_2}^G \leq \sqrt{E_2/E_1} \|A\|_{E_1}^G \quad \forall E_2 > E_1 > 0.$$

Эквивалентное определение

Будем считать, что $\text{Tr} G \rho = \sup_n \text{Tr} P_{[0,n]}^G G \rho$ для любого ρ из $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, где $P_{[0,n]}^G$ – спектральный проектор оператора G , соответствующий интервалу $[0, n]$. Тогда

$$\|A\|_E^G \doteq \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) : \text{Tr} G \rho \leq E} \sqrt{\text{Tr} A \rho A^*},$$

Совпадение определений следует из

Теорема [С.В.Вейс, М.Е.Широков//УМН, 76:1(457), 199–200]

Все крайние точки множества

$$\mathfrak{C}_E^G \doteq \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \mid \text{Tr} G \rho \leq E\}$$

*являются **ЧИСТЫМИ СОСТОЯНИЯМИ**. Множество $\mathfrak{C}_E^G$ совпадает с выпуклым замыканием множества $\text{ext} \mathfrak{C}_E^G = \mathfrak{C}_E^G \cap \text{ext} \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

О топологии, задаваемой операторными E -нормами

Предложение. А) Норма $\|\cdot\|_E^G$, $E > 0$, эквивалентна операторной норме $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда оператор G **ограничен**.

В) Норма $\|\cdot\|_E^G$, $E > 0$, порождает сильную сходимость на ограниченных подмножествах в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда оператор G является **дискретным**, т.е. имеет дискретный спектр конечной кратности. Это означает, что

$$G = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k |\tau_k\rangle \langle \tau_k|, \quad \text{т.е.} \quad G\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k \langle \tau_k, \varphi \rangle \tau_k$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(G) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \sum_{k=0}^{+\infty} E_k^2 |\langle \tau_k, \phi \rangle|^2 < +\infty\}$, где $\{\tau_k\}_{k=0}^{+\infty}$ базис из СВ оператора G , $\{E_k\}_{k=0}^{+\infty}$ – последовательность СЗ, стремящаяся к $+\infty$.

Некоторые свойства

$$\text{A)} \quad \|A\|_E^G = \| |A| \|_E^G \leq \sqrt{\|A^*A\|_E^G} \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \text{ но } \|A^*\|_E^G \neq \|A\|_E^G;$$

$$\text{B)} \quad m(A)\|B\|_E^G \leq \|AB\|_E^G \leq \|A\|\|B\|_E^G, \quad \forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \text{ где } m(A) \\ \text{— нижняя граница спектра оператора } |A| = \sqrt{A^*A};$$

$$\text{C)} \quad \|AB\|_E^G \leq \sqrt{\frac{f_B(E)}{E}} \|A\|_E^G, \quad \forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \text{ если}$$

$$f_B(E) \doteq \sup \left\{ \|\sqrt{G}B\varphi\|^2 \mid \|\varphi\| = 1, \|\sqrt{G}\varphi\|^2 \leq E \right\} < +\infty \quad [4]$$

$$\text{D)} \quad |\text{Tr} A\rho B^*| \leq \|A\rho B^*\|_1 \leq \|A\|_{E_\rho}^G \|B\|_{E_\rho}^G \quad \forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \text{ и любого} \\ \text{оператора } \rho \text{ из } \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}), \text{ у которого } E_\rho \doteq \text{Tr} G\rho < +\infty \text{ и } \|\rho\|_1 \leq 1.$$

Е) Пусть $\Phi : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – 2-положительное линейное нормальное отображение такое, что $\Phi(I_{\mathcal{H}}) \leq I_{\mathcal{H}}$,

$\Phi_* : \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – предвойственное отображение, определяемое условием $\text{Tr} \Phi(A) \rho = \text{Tr} A \Phi_*(\rho) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \forall \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Если $Y_{\Phi}(E) \doteq \sup\{\text{Tr} G \Phi_*(\rho) \mid \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \text{Tr} G \rho \leq E\} < +\infty$, то

$$\|\Phi(A)\|_E^G \leq \sqrt{\|\Phi(I_{\mathcal{H}})\|} \|A\|_{Y_{\Phi}(E)}^G \leq \sqrt{\|\Phi(I_{\mathcal{H}})\| K_{\Phi}} \|A\|_E^G, \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

где $K_{\Phi} = \max\{1, Y_{\Phi}(E)/E\}$.

Если G – гамильтониан квантовой системы, описываемой пространством $\mathcal{H}$, а Φ – квантовый канал (в картине Гейзенберга), то $Y_{\Phi}(E)/E$ – коэффициент усиления энергии канала Φ .

Примеры. 1) $\|I_{\mathcal{H}}\|_E^G = 1$ для всех $E > 0$ (при любом G)

2) Пусть $G = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k |\tau_k\rangle\langle\tau_k|$, $\mathcal{D}(G) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \sum_k E_k^2 |\langle\tau_k|\varphi\rangle|^2 < \infty\}$

и пусть $A = |\tau_n\rangle\langle\tau_0|$ ($A\varphi = \langle\tau_0, \varphi\rangle\tau_n \ \forall \varphi \in \mathcal{H}$). Тогда

$$\|A\|_E^G = 1 \text{ для всех } E \geq 0, \quad \|A^*\|_E^G = \begin{cases} \sqrt{E/E_n}, & \text{если } E \in [0, E_n] \\ 1, & \text{если } E \in [E_n, +\infty) \end{cases}$$

3) Если U – унитарный оператор в $\mathcal{H}$, то

$$\|I_{\mathcal{H}} - U\|_E^G = \|I_{\mathcal{H}} - U^*\|_E^G = \sqrt{2 \left(1 - \inf_{\varphi \in \mathcal{H}_1, \langle \varphi, G\varphi \rangle \leq E} \Re \langle \varphi | U\varphi \rangle \right)} \quad (1)$$

Пусть H – положительный оператор в $\mathcal{H}$ такой, что

$$H^2 \leq \gamma G + \delta I_{\mathcal{H}}, \quad \text{для некоторых } \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Пусть $U_t = e^{-itH}$, $t \in \mathbb{R}$, – унитарная группа. Тогда

$$\min_{\theta \in [-\pi, \pi]} \|U_s - e^{i\theta} U_t\|_E^G \leq 2 \sin \left(\min \left\{ \frac{|t-s|}{2} \sqrt{\gamma E + \delta}, \frac{\pi}{4} \right\} \right) \quad (2)$$

(формула (1) и док-во Th.S6 из S. Becker, N. Datta, L. Lami, and C. Rouzé// Phys. Rev. Lett. 126, p. 190504 (2021)).

Левая часть (2) – расстояние между каналами $U_t(\cdot)U_t^*$ и $U_s(\cdot)U_s^*$!
(см. представленную ниже Теорему 3)

Теорема Кречмана–Шлингемана–Вернера и ее обобщения

Квантовый канал из A в B (в картине Шредингера) – это линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi : \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$. В силу теоремы Стайнспринга

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^*, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A),$$

где V_Φ – изометрия из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$.

Пусть $\beta(\rho, \sigma) \doteq \sqrt{2 - 2\|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}\|_1}$ – расстояние Бюреса между квантовыми состояниями ρ и σ . Тогда

$$\beta(\Phi, \Psi) \doteq \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R)} \beta(\Phi \otimes \text{Id}_R(\rho), \Psi \otimes \text{Id}_R(\rho)),$$

– **расстояние Бюреса между квантовыми каналами** Φ и Ψ из A в B .

Теорема 1. *Если*

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^* \quad \text{и} \quad \Psi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Psi \rho V_\Psi^*$$

– каналы между конечномерными системами A и B , то

$$\beta(\Phi, \Psi) = \min_{U \in \mathfrak{U}(\mathcal{H}_E)} \|V_\Phi - [I_B \otimes U] V_\Psi\|,$$

где $\mathfrak{U}(\mathcal{H}_E)$ – группа унитарных операторов в $\mathcal{H}_E$.

[D.Kretschmann, D.Schlingemann, R.F.Werner// IEEE Trans. Inf. Theory 54(4), 1708–1717 (2008).]

Теорема 2. Если Φ и Ψ – каналы между бесконечномерными системами A и B , то

$$\beta(\Phi, \Psi) = \inf \|V_\Phi - V_\Psi\|,$$

где инфимум берется по всем совместным представлениям
Стайнспринга

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^*, \quad \Psi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Psi \rho V_\Psi^*$$

[D.Kretschmann, D.Schlingemann, R.F.Werner// J. Funct. Anal.
255(8), 1889–1904 (2008).]

Проблема: Сходимость, задаваемая расстоянием Бюреса, является слишком сильной

$$\exists \{\Phi_p\}_{p \in \mathbb{R}_+} : \beta(\Phi_p, \Phi_{p'}) = \sqrt{2} \quad \forall p' \neq p$$

[A. Winter, arXiv:1712.10267 (2017)].

Физически мотивированной является **сильная сходимость** квантовых каналов:

$$\Phi_n \rightarrow \Phi_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_n(\rho) \rightarrow \Phi_0(\rho) \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$$

Возможное решение – использовать **расстояние Бюреса с энергетическим ограничением**

$$\beta_E^G(\Phi, \Psi) = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R), \text{Tr} G \rho_A \leq E} \beta(\Phi \otimes \text{Id}_R(\rho), \Psi \otimes \text{Id}_R(\rho)), \quad E > 0.$$

Предложение. Если G – дискретный плотно определенный положительный оператор в $\mathcal{H}_A$ ($\dim \mathcal{H}_A = +\infty$), то **метрика β_E^G порождает сильную сходимость** на множестве всех квантовых каналов из A в любую заданную систему B .

[M.E.Shirokov// J. Phys. A:Math. Theor. 52, 014001 (2019)].

Теорема 3. Пусть G – дискретный положительный оператор.
Если

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^* \quad \text{и} \quad \Psi(\rho) = \text{Tr}_E V_\Psi \rho V_\Psi^*$$

– каналы между бесконечномерными системами A и B , то

$$\beta_E^G(\Phi, \Psi) = \inf_{U \in \mathfrak{W}_\Psi} \|V_\Phi - [I_A \otimes U] V_\Psi\|_E^G,$$

где $\mathfrak{W}_\Psi$ – множество частичных изометрий U из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_E)$ таких, что $[I_B \otimes U^* U] V_\Psi = V_\Psi$.

[M.E.Shirokov // J. Math. Phys., 63:11 (2022), 112203]

Следствие. Если $\{\Phi_n\}$ – последовательность квантовых каналов из A в B , **сильно сходящаяся** к каналу Φ_0 , то существуют

- гильбертово пространство $\mathcal{H}_E$,
- последовательность $\{V_n\}$ изометрий из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, **сильно сходящаяся** к изометрии V_0 ,
- последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящаяся к нулю

такие что

$$\Phi_n(\rho) = \text{Tr}_E V_n \rho V_n^* \quad \forall n \geq 0 \quad \text{и} \quad \|V_n - V_0\|_E^G \leq \beta_E^G(\Phi_n, \Phi_0) + \varepsilon_n.$$

Операторные E -нормы для линейных операторов в $\mathcal{H}$,
ограниченных относительно оператора $\sqrt{G}$

Оператор A в $\mathcal{H}$ называется **ограниченным относительно оператора $\sqrt{G}$** , если $\mathcal{D}(\sqrt{G}) \subseteq \mathcal{D}(A)$ и

$$\|A\varphi\|^2 \leq a^2 \|\varphi\|^2 + b^2 \|\sqrt{G}\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{G}),$$

для некоторых неотрицательных a и b (не зависящих от φ).

Для любого $\sqrt{G}$ -ограниченного A и $E > 0$ его E -норма определяется выражением

$$\|A\|_E^G \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{H}_1, \langle \varphi, G\varphi \rangle \leq E} \|A\varphi\|. \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть A – линейный оператор в $\mathcal{H}$ такой, что $\mathcal{D}(A) \supseteq \mathcal{D}(\sqrt{G})$. Если величина $\|A\|_{E_0}^G$ в (3) конечна при некотором $E_0 > 0$, то

- оператор A является $\sqrt{G}$ -ограниченным;
- функция $E \mapsto [\|A\|_E^G]^2$ конечна и вогнута на $\mathbb{R}_+$ и, следовательно,

$$\|A\|_{E_1}^G \leq \|A\|_{E_2}^G \leq \sqrt{E_2/E_1} \|A\|_{E_1}^G \quad \forall E_2 > E_1 > 0.$$

Равносильное определение $\|A\|_E^G$

Лемма 2. Для любых $\sqrt{G}$ -ограниченных операторов A и B в $\mathcal{H}$ аффинная функция $\rho \mapsto A\rho B^* \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ корректно определена на $\mathfrak{T}_G^+ \doteq \{\rho \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr} G\rho < +\infty\}$ формулой

$$A\rho B^* \doteq \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\beta_i|, \quad \alpha_i = A\varphi_i, \quad \beta_i = B\varphi_i,$$

где $\rho = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ – любое разложение оператора $\rho \in \mathfrak{T}_G^+$ в сумму полож. операторов ранга 1, $\text{Tr} G\rho = \sup_n \text{Tr} P_{[0,n]}^G G\rho$ и

$$|\alpha_i\rangle\langle\beta_i|\psi = \langle\beta_i, \psi\rangle\alpha_i \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

$$\text{Тогда} \quad \|A\|_E^G \doteq \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}): \text{Tr} G\rho \leq E} \sqrt{\text{Tr} A\rho A^*},$$

Для любого $\sqrt{G}$ -ограниченного оператора A пусть $\Pi_{\sqrt{G}}(A)$ множество всех пар (a, b) таких, что

$$\|A\varphi\|^2 \leq a^2\|\varphi\|^2 + b^2\|\sqrt{G}\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{G}),$$

Тогда $b_{\sqrt{G}}(A) = \inf \{b \mid (a, b) \in \Pi_{\sqrt{G}}(A)\}$ – $\sqrt{G}$ -граница A .

Если $b_{\sqrt{G}}(A) = 0$, то A называется **инфинитезимально ограниченным относительно $\sqrt{G}$** .

T.Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators", Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

M.Reed, B.Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics". Vol I-II.

B.Simon, "Operator Theory: A Comprehensive Course in Analysis", Part IV American Mathematical Society, 2015.

Для любого $\sqrt{G}$ -ограниченного оператора A имеют место соотношения:

$$[\|A\|_E^G]^2 = \inf \{a^2 + b^2 E \mid (a, b) \in \Pi_{\sqrt{G}}(A)\}$$

$$b_{\sqrt{G}}(A) = \lim_{E \rightarrow +\infty} \|A\|_E^G / \sqrt{E}.$$

$$[\|A\|_E^G]^2 = \inf \{\lambda E + E_0 \mid \lambda, E_0 \geq 0 \text{ s.t. } AA^* \leq \lambda G + E_0\}$$

(Corollary 2.20 in [L. van Luijk// arXiv:2405.10259])

Линейное пространство $\mathcal{D}(\sqrt{G})$ можно превратить в гильбертово пространство $\mathcal{H}_E^G$, введя в нем скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle_E^G = \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \sqrt{G}\varphi, \sqrt{G}\psi \rangle / E \quad E > 0.$$

Любой $\sqrt{G}$ -ограниченный оператор $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ отождествляется с ограниченным оператором из $\mathcal{H}_E^G$ в $\mathcal{H}$ с нормой

$$\|A\|_E^G = \sup \left\{ \|A\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{G}), \|\varphi\|^2 + \|\sqrt{G}\varphi\|^2 / E \leq 1 \right\}.$$

Тогда

$$\sqrt{1/2} \|A\|_E^G \leq \|A\|_E^G \leq \|A\|_E^G \quad \forall E > 0$$

и, следовательно,

$$\|A\|_{E_1}^G \leq \|A\|_{E_2}^G \leq \sqrt{2E_2/E_1} \|A\|_{E_1}^G \quad \forall E_2 > E_1 > 0$$

для любого $\sqrt{G}$ -ограниченного оператора A .

Для любого $\sqrt{G}$ -ограниченного оператора A и $E > 0$ выполнены соотношения

$$|||A|||_E^G = \sup_{t>0} \|A\|_{tE}^G / \sqrt{1+t}, \quad \|A\|_E^G = \inf_{t>0} |||A|||_{tE}^G \sqrt{1+1/t},$$

т.е. нормы $||| \cdot |||_E^G$ и $\| \cdot \|_E^G$ связаны функциональными преобразованиями

$$F[f](x) = \sup_{t>0} \frac{f(xt)}{t+1} \quad \text{и} \quad G[f](x) = \inf_{t>0} f(xt)(1+1/t),$$

множества неотрицательных функций на $(0, +\infty)$, т.ч.

$$G \circ F : f(x) \mapsto \text{conv} f(x) \quad (\text{вогнутая оболочка функции } f(x))$$

[В.Ю.Протасов, М.Е.Широков// Докл. РАН, 489:5, 452–455]

Пусть $\mathfrak{B}_G(\mathcal{H})$ – банахово пространство ограниченных операторов из $\mathcal{H}_E^G$ в $\mathcal{H}$ с нормой $||| \cdot |||_E^G =$ банахово пространство всех $\sqrt{G}$ -ограниченных операторов из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ с нормой $\| \cdot \|_E^G$

Теорема. Пополнение $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ по любой из норм $\| \cdot \|_E^G$, $E > 0$, совпадает с (замкнутым) подпространством $\mathfrak{B}_G^0(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{B}_G(\mathcal{H})$ состоящим всех инфинитезимально ограниченных относительно $\sqrt{G}$ операторов. Оператор A принадлежит $\mathfrak{B}_G^0(\mathcal{H})$ iff

$$\|A\|_E^G = o(\sqrt{E}) \quad \text{при} \quad E \rightarrow +\infty.$$

Оператор A принадлежит $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ iff $\sup_{E>0} \|A\|_E^G < +\infty$. В

этом случае $\|A\| = \sup_{E>0} \|A\|_E^G = \lim_{E \rightarrow +\infty} \|A\|_E^G$

Если G – дискретный оператор, то банахово пространство $\mathfrak{B}_G^0(\mathcal{H})$ сепарабельно.

Некоторые оценки

Для любых A, B из $\mathfrak{B}_G(\mathcal{H})$ и любого $E > 0$ имеют место неравенства

$$\left| b_{\sqrt{G}}(A) - b_{\sqrt{G}}(B) \right| \leq b_{\sqrt{G}}(A - B) \leq \|A - B\|_E^G / \sqrt{E}$$

Для любых A, B из $\mathfrak{B}_G(\mathcal{H})$ и любого оператора ρ из $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ такого, что $\text{Tr} \rho \leq 1$ и $E_\rho \doteq \text{Tr} G \rho < +\infty$ имеют место неравенства

$$|\text{Tr} A \rho B^*| \leq \|A \rho B^*\|_1 \leq \|A\|_{E_\rho}^G \|B\|_{E_\rho}^G,$$

где $A \rho B^*$ – ядерный оператор, определенный указанным выше правилом.

Пусть

$$\mathfrak{T}_G^+ \doteq \{\rho \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr} G\rho < +\infty\}$$

Для любых A, B из $\mathfrak{B}_G^0(\mathcal{H})$ функция $\rho \mapsto A\rho B^*$ из $\mathfrak{T}_G^+$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ равномерно непрерывна на

$$\mathfrak{C}_{G,E} \doteq \{\rho \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr} \rho \leq 1, \text{Tr} G\rho \leq E\}, \quad \forall E > 0,$$

причем

$$\|A\rho B^* - A\sigma B^*\|_1 \leq \sqrt{\varepsilon} \left(\|A\|_E^G \|B\|_{4E/\varepsilon}^G + \|B\|_E^G \|A\|_{4E/\varepsilon}^G \right) = o(1) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

для любых операторов ρ и σ из $\mathfrak{C}_{G,E}$ таких, что $\|\rho - \sigma\|_1 \leq \varepsilon$.

Пример. Пусть $(q\varphi)(x) = x\varphi(x)$ и $(p\varphi)(x) = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \varphi(x)$ – самосопряженные операторы в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы

$$a = (q + ip)/\sqrt{2} \quad \text{и} \quad a^\dagger = (q - ip)/\sqrt{2}.$$

Операторы q, p, a и $a^\dagger$ ограничены относительно $\sqrt{N}$, где $N = a^\dagger a = aa^\dagger - I_{\mathcal{H}}$ – положительный дискретный оператор со спектром $\{0, 1, 2, \dots\}$. Тогда $\|a\|_E^N = \|\sqrt{N}\|_E^N = \sqrt{E}$, $\|a^\dagger\|_E^N = \sqrt{E+1}$ и

$$\|q\|_E^N = \|p\|_E^N = \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E+1}}{\sqrt{2}}$$

S. Becker, N. Datta, L. Lami, and C. Rouzé// Phys. Rev. Lett. 126, p. 190504 (2021). (Corollary S8)

Сл-но, $b_{\sqrt{N}}(a) = b_{\sqrt{N}}(a^\dagger) = 1$ и $b_{\sqrt{N}}(q) = b_{\sqrt{N}}(p) = \sqrt{2}$.

Операторные E-нормы и квадратичные формы

Пусть $\mathcal{D}_0(\sqrt{G})$ – ядро для $\sqrt{G}$. Заметим, что для любого $\sqrt{G}$ -ограниченного оператора A и любого $E > 0$ имеем:

$$\|A\|_E^G = \sup\{|\langle \psi, A\varphi \rangle| \mid \psi, \varphi \in \mathcal{D}_0(\sqrt{G}), \|\psi\| = \|\varphi\| = 1, \langle \varphi, G\varphi \rangle \leq E\}.$$

Пусть Q – квадратичная форма в $\mathcal{H}$, область определения $D(Q)$ которой является ядром для $\sqrt{G}$. Определим

$$\|Q\|_E^G = \sup\{|Q(\psi, \varphi)| \mid \psi, \varphi \in D(Q), \|\psi\| = \|\varphi\| = 1, \langle \varphi, G\varphi \rangle \leq E\}$$

(Section 5.2 in [L. van Luijk// arXiv:2405.10259])

Если $\|Q\|_{E_0}^G < +\infty$ при некотором $E_0 > 0$, то

- функция $E \mapsto [\|Q\|_E^G]^2$ конечна и вогнута на $\mathbb{R}_+$;
- из теоремы Рисса следует существование оператора A на $\mathcal{D}(Q)$ такого, что $\langle \psi, A\varphi \rangle = Q(\psi, \varphi)$ для всех $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(Q)$.

Из вогнутости ф-и $E \mapsto [\|Q\|_E^G]^2$ следует, что $\exists a, b \geq 0$ т.ч. $[\|Q\|_E^G]^2 \leq a^2 + b^2 E$, а значит $\|A\varphi\|^2 \leq a^2 \|\varphi\|^2 + b^2 \|\sqrt{G}\varphi\|^2$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$.

Поскольку $\mathcal{D}(Q)$ – ядро для $\sqrt{G}$, оператор A расширяется до $\sqrt{G}$ -ограниченного оператора $\hat{A}$ на $\mathcal{D}(\sqrt{G})$ такого, что

$$\langle \psi, \hat{A}\varphi \rangle = Q(\psi, \varphi) \quad \text{для всех } \psi, \varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{G}).$$

Пример. Если H_1 и H_2 – G -ограниченные самосопряженные операторы, то их коммутатор $[H_1, H_2] \doteq H_1 H_2 - H_2 H_1$ может не иметь смысла (как оператор), но квадратичная форма

$$Q_{[H_1, H_2]}(\psi, \varphi) = \langle H_1 \psi, H_2 \varphi \rangle - \langle H_2 \psi, H_1 \varphi \rangle$$

корректно определена на $\mathcal{D}(G)$ – ядре для $\sqrt{G}$.

Если $\|Q_{[H_1, H_2]}\|_{E_0}^G < +\infty$ при некотором $E_0 > 0$, то существует $\sqrt{G}$ -ограниченный оператор $\widehat{[H_1, H_2]}$ на $\mathcal{D}(\sqrt{G})$ такой, что

$$\langle \psi, \widehat{[H_1, H_2]} \varphi \rangle = Q_{[H_1, H_2]}(\psi, \varphi) \quad \text{для всех } \psi, \varphi \in \mathcal{D}(\sqrt{G}).$$

О применениях операторных Е-норм

1) Исследование условий, при которых квантовый канал (в картине Гейзенберга), т.е. линейное вполне положительное нормальное унитарное преобразование $\Phi : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ расширяется до ограниченного преобразования

$$\widehat{\Phi} : \mathfrak{B}_G(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{B}_G(\mathcal{H}).$$

M.E.Shirokov, "On extension of quantum channels and operations to the space of relatively bounded operators Lobachevskii J. Math., 41:4 (2020), 714–727; arXiv: 1903.0608

2) Анализ квантовых динамических полугрупп, с ограниченным ростом энергии

- оценка скорости расходимости групп и полугрупп с близкими генераторами:

$$\|e^{itA}\psi - e^{itB}\psi\| \leq (|t| + O(|t|^2))\|A - B\|_E^G, \quad E = \langle \psi, G\psi \rangle;$$

- оценки перестановочности унитарных групп;
- оценки скорости сходимости в формуле Троттера

L. van Luijk, "Energy-limited quantum dynamics", arXiv:2405.10259

S.Becker, N.Galke, R.Salzmann, L. van Luijk, "Convergence rates for the Trotter-Kato splitting", arXiv:2407.04045

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!