Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 5. Динамика 2-уровневой системы. Уравнения Блоха во внешнем поле, в равновесном резервуаре и в случае чистой дефазировки

Теретёнков Александр Евгеньевич

8 октября 2028 г.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Матрицы Паули

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} I + i \varepsilon_{klm} \sigma_m$$

$$\operatorname{Tr} \sigma_k = 0, \qquad \operatorname{Tr} \sigma_k \sigma_l = 2\delta_{kl}$$

Матрицы Паули вместе с единичной матрицей образуют ортогональный базис относительно следового скалярного произведения.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

$$(\vec{a},\vec{\sigma})(\vec{b},\vec{\sigma}) = (\vec{a},\vec{b})I + i([\vec{a} \times \vec{b}],\vec{\sigma})$$

$$[(\vec{a},\vec{\sigma}),(\vec{b},\vec{\sigma})] = 2i([\vec{a} \times \vec{b}],\vec{\sigma})$$

Упражнение.

$$(\vec{a},\vec{\sigma})(\vec{b},\vec{\sigma})(\vec{c},\vec{\sigma}) = (\vec{d},\vec{\sigma}) + id_0 I \qquad \vec{d}-? \quad d_0-?$$

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Вектор Блоха (coherence vector)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})), \qquad |\vec{v}| \leqslant 1$$

Состояния $|\vec{v}| = 1$ соответствуют чистым состояниям.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Вектор Блоха (coherence vector)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})), \qquad |\vec{v}| \leqslant 1$$

Состояния $|\vec{v}| = 1$ соответствуют чистым состояниям.
Упражнение. Докажите

$$\vec{v} = \mathrm{Tr}\, \rho \vec{\sigma}$$

Унитарная динамика TLS

Гамильтониан общего вида $H = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{\sigma})$ (в частности $H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$).

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma}))\right) = -i\left[\frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{\sigma}), \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma}))\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{v}, \vec{\sigma}\right) = -i\frac{1}{4} \cdot 2i([\vec{\omega} \times \vec{v}], \vec{\sigma})$$

Унитарная динамика TLS

Уравнение Блоха

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{Re}} \\ \Omega_{\mathrm{Im}} \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \Omega_{\mathrm{Im}} \\ \omega_0 & 0 & -\Omega_{\mathrm{Re}} \\ -\Omega_{\mathrm{Im}} & \Omega_{\mathrm{Re}} & 0 \end{pmatrix} \vec{v}$$

Унитарная динамика TLS

Упражнение.

$$[\vec{\omega}\times\cdot\,]^{2k+1} = (-1)^k|\vec{\omega}|^{2k}[\vec{\omega}\times\cdot\,], \qquad k\in\mathbb{Z}_+$$

$$[\vec{\omega}\times\cdot\,]^{2k} = (-1)^k|\vec{\omega}|^{2k}\left(I - \frac{1}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}(\vec{\omega},\cdot\,)\right), \qquad k\in\mathbb{N}$$

Упражнение.

$$e^{t[\vec{\omega}\times\cdot\,]} = \frac{\sin(|\vec{\omega}|t)}{|\vec{\omega}|}[\vec{\omega}\times\cdot\,]+\cos(|\vec{\omega}|t)\left(I-\frac{1}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}(\vec{\omega},\cdot\,)\right)+\frac{1}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}(\vec{\omega},\cdot\,)$$

Унитарная динамика TLS

Решение уравнения Блоха

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

имеет вид

$$\vec{v}(t) = \frac{\sin(|\vec{\omega}|t)}{|\vec{\omega}|}[\vec{\omega}\times\vec{v}_0]+\cos(|\vec{\omega}|t)\left(\vec{v}_0 - \frac{1}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}(\vec{\omega},\vec{v}_0)\right)+\frac{1}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega}(\vec{\omega},\vec{v}_0).$$

2-уровневая система во внешнем поле

$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2-уровневая система во внешнем поле

$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дипольный момент

$$\vec{d} = \vec{d}_{12}^*\sigma_+ + \vec{d}_{12}\sigma_- = \mathrm{Re}\,\vec{d}_{12}\sigma_x + \mathrm{Im}\,\vec{d}_{12}\sigma_y$$

2-уровневая система во внешнем поле

$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$

$$\sigma_{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дипольный момент

$$\vec{d} = \vec{d}_{12}^{*}\sigma_{+} + \vec{d}_{12}\sigma_{-} = \mathrm{Re}\, \vec{d}_{12}\sigma_x + \mathrm{Im}\, \vec{d}_{12}\sigma_y$$

Дипольное взаимодействие

$$H_d(t) = -(\vec{d}, \vec{E}(t))$$

$$H_d(t) = -(\mathrm{Re}\, \vec{d}_{12}\sigma_x - \mathrm{Im}\, \vec{d}_{12}\sigma_y, \vec{E}(t)) =$$
$$= -\mathrm{Re}\, (\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_x - \mathrm{Im}\, (\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_y$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_0 + H_d(t), \rho],$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z, \qquad H_d(t) = -\mathrm{Re}\,(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_x - \mathrm{Im}\,(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_y$$

$$\Omega_{\mathrm{Re}}(t) = -2\mathrm{Re}\,(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)), \qquad \Omega_{\mathrm{Im}}(t) = -2\mathrm{Im}\,(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))$$

- Л. Мандель, Э. Вольф. Оптическая когерентность и квантовая оптика. Физматлит М., 2000. Разедл 15.3

2-уровневая система во внешнем поле

$$\vec{E}(t) = \vec{e}\mathcal{E}e^{-i\omega_1 t} + c.c.$$

В случае циркулярно-поляризованной волны $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$ и для переходов $\Delta m = \pm 1$ (дипольный момент имеет вид $\vec{d}_{12} = |\vec{d}_{12}|\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$). Кроме того, $\mathcal{E} = |\mathcal{E}|e^{i\varphi}$.

2-уровневая система во внешнем поле

$$\vec{E}(t) = \vec{e}\mathcal{E}e^{-i\omega_1 t} + c.c.$$

В случае циркулярно-поляризованной волны $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$ и для переходов $\Delta m = \pm 1$ (дипольный момент имеет вид $\vec{d}_{12} = |\vec{d}_{12}|\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$). Кроме того, $\mathcal{E} = |\mathcal{E}|e^{i\varphi}$.

$$\Omega_{\mathrm{Re}}(t) = -2(\mathrm{Re}\,\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) = -2|\vec{d}_{12}||\mathcal{E}|\cos(\omega_1 t - \varphi)$$

$$\Omega_{\mathrm{Im}}(t) = -2(\mathrm{Im}\,\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) = -2|\vec{d}_{12}||\mathcal{E}|\sin(\omega_1 t - \varphi)$$

Частота Раби

$$\Omega = 2|\vec{d}_{12}||\mathcal{E}|$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & -\Omega\sin(\omega_1 t - \varphi) \\ \omega_0 & 0 & \Omega\cos(\omega_1 t - \varphi) \\ \Omega\sin(\omega_1 t - \varphi) & -\Omega\cos(\omega_1 t - \varphi) & 0 \end{pmatrix}}_{G(t)} \vec{v}$$

— зависящее от времени уравнение Блоха.

2-уровневая система во внешнем поле

Переход во вращающуюся систему координат (из представления Шредингера)

$$\rho_h(t) \equiv e^{iht}\rho(t)e^{-iht}, \qquad X_h(t) = e^{iht}Xe^{-iht}$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H,\rho(t)] + \sum_j \left(C_j\rho(t)C_j^\dagger - \frac{1}{2}C_j^\dagger C_j\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)C_j^\dagger C_j \right)$$

2-уровневая система во внешнем поле

Переход во вращающуюся систему координат (из представления Шредингера)

$$\rho_h(t) \equiv e^{iht}\rho(t)e^{-iht}, \qquad X_h(t) = e^{iht}Xe^{-iht}$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H,\rho(t)] + \sum_j \left(C_j\rho(t)C_j^\dagger - \frac{1}{2}C_j^\dagger C_j\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)C_j^\dagger C_j \right)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_h(t) \equiv ihe^{iht}\rho(t)e^{-iht} + e^{iht}\frac{d}{dt}\rho(t)e^{-iht} - ie^{iht}\rho(t)e^{-iht}h =$$

$$= -i[H_h(t) - h, \rho_h(t)] +$$

$$+ \underbrace{\sum_j \left((C_j)_h(t)\rho_h(t)(C_j)_h^\dagger(t) - \frac{1}{2}(C_j)_h^\dagger(t)(C_j)_h(t)\rho_h(t) - \frac{1}{2}\rho_h(t)(C_j)_h^\dagger(t)(C_j)_h(t) \right)}_{\mathcal{D}_h(\rho(t))}$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$H_d(t) = -\frac{1}{2}\Omega(e^{-i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_+ + e^{i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_-)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z = \omega_0\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$H_d(t) = -\frac{1}{2}\Omega(e^{-i(\omega_1 t-\varphi)}\sigma_+ + e^{i(\omega_1 t-\varphi)}\sigma_-)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z = \omega_0\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I$$

Положим

$$h = \omega_1\sigma_+\sigma_-$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$H_d(t) = -\frac{1}{2}\Omega(e^{-i(\omega_1 t-\varphi)}\sigma_+ + e^{i(\omega_1 t-\varphi)}\sigma_-)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z = \omega_0\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I$$

Положим

$$h = \omega_1\sigma_+\sigma_-$$

Тогда

$$e^{iht}\sigma_\pm e^{-iht} = e^{\pm i\omega_1 t}\sigma_\pm$$

$$e^{iht}H_0 e^{-iht} = \omega_0 e^{i\omega_1 t}\sigma_+\sigma_- e^{-i\omega_1 t} - \frac{\omega_0}{2}I = H_0$$

$$e^{iht}H_d(t)e^{-iht} = -\frac{1}{2}\Omega(e^{i\varphi}\sigma_+ + e^{-i\varphi}\sigma_-)$$

$$H_h - h = (\omega_0 - \omega_1)\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I - \frac{1}{2}\Omega(e^{i\varphi}\sigma_+ + e^{-i\varphi}\sigma_-)$$

2-уровневая система во внешнем поле

Таким образом, во вращающейся система координат

$$\frac{d}{dt}\rho_h(t) = -i[\Delta\omega\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\Omega(e^{i\varphi}\sigma_+ + e^{-i\varphi}\sigma_-), \rho_h(t)]$$

$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1$ — расстройка. Если $\Delta\omega = 0$, то переход во вращающуюся систему координат соответствует переходу в представление взаимодействия $h = H_0$.

2-уровневая система во внешнем поле

Уравнения Блоха во вращающейся системе координат

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\Delta\omega & \Omega\sin(\varphi) \\ \Delta\omega & 0 & \Omega\cos(\varphi) \\ -\Omega\sin(\varphi) & -\Omega\cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}}_{G_h} \vec{v}_h$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_h(t) = [\vec{\omega}_h, \vec{v}_h(t)], \qquad \vec{\omega}_h = (-\Omega\cos\varphi, \Omega\sin\varphi, \Delta\omega)^T.$$

2-уровневая система во внешнем поле

Окончательный ответ в представлении Шредингера имеет вид

$$\vec{v}(t) = e^{-t[\vec{\omega}_1 \times \cdot\,]} e^{t[\vec{\omega}_h \times \cdot\,]} \vec{v}_0$$

$$\vec{\omega}_1 = (0, 0, -\omega_1)^T, \qquad \vec{\omega}_h = (-\Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi, \Delta\omega)^T$$

Упражнение. Пусть $\Delta\omega = 0, \varphi = 0$.
Вычислите $e^{-t[\vec{\omega}_1 \times \cdot\,]} e^{t[\vec{\omega}_h \times \cdot\,]}$.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Бозонный резервуар (фононы, фотоны) при обратной температуре β

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma_0 (N+1) \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_- \right) + \\ + \gamma_0 N \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_-\sigma_+ \right),$$

где $N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0}-1}$ — распределение Бозе-Эйнштейна на частоте перехода.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Бозонный резервуар (фононы, фотоны) при обратной температуре β

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right) + \\ + \gamma_0 N\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_-\sigma_+\right),$$

где $N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0}-1}$ — распределение Бозе-Эйнштейна на частоте перехода.

А где химический потенциал?

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Бозонный резервуар (фононы, фотоны) при обратной температуре β

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma_0(N+1)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right) + \\ + \gamma_0 N\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_-\sigma_+\right),$$

где $N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0}-1}$ — распределение Бозе-Эйнштейна на частоте перехода.

А где химический потенциал?

$\mu = 0$ для фотонов и фононов.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Отметим, что $\mathcal{D}_h(\rho) = \mathcal{D}(\rho)$ при $h = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$. Поэтому от члена вида $h = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$ можно избавиться перейдя во вращающуюся систему координат:

$$\frac{d}{dt}\rho = \mathcal{D}(\rho)$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Отметим, что $\mathcal{D}_h(\rho) = \mathcal{D}(\rho)$ при $h = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$. Поэтому от члена вида $h = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$ можно избавиться перейдя во вращающуюся систему координат:

$$\frac{d}{dt}\rho = \mathcal{D}(\rho)$$

Уравнение Блоха:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = (2N+1)\gamma_0$$

Упражнение. Проверить, что это действительно так.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение линейного ОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$\vec{v} = e^{Gt}\vec{v}_0 + \frac{e^{Gt} - I}{G}\vec{b}$$

(Данное выражение можно сделать осмысленным и при $\det G = 0$.)

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение линейного ОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$\vec{v} = e^{Gt}\vec{v}_0 + \frac{e^{Gt} - I}{G}\vec{b}$$

(Данное выражение можно сделать осмысленным и при $\det G = 0$.)

Стационарное решение:

$$G\vec{v}_{st} + \vec{b} = 0$$

$$\vec{v}_{st} = -G^{-1}\vec{b}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение линейного ОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$\vec{v} = e^{Gt}\vec{v}_0 + \frac{e^{Gt} - I}{G}\vec{b}$$

(Данное выражение можно сделать осмысленным и при $\det G = 0$.)

Стационарное решение:

$$G\vec{v}_{st} + \vec{b} = 0$$

$$\vec{v}_{st} = -G^{-1}\vec{b}$$

Решение в терминах стационарного решения

$$\vec{v} = e^{Gt}(\vec{v}_0 - \vec{v}_{st}) + \vec{v}_{st}$$

$$\vec{v} - \vec{v}_{st} = e^{Gt}(\vec{v}_0 - \vec{v}_{st})$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

В данном случае:

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

В данном случае:

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\rm st} = \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} \end{pmatrix}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

В данном случае:

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} \end{pmatrix}$$

Отношение населённостей

$$\frac{1-\frac{\gamma_0}{\gamma}}{1+\frac{\gamma_0}{\gamma}} = \frac{1-\frac{1}{2N+1}}{1+\frac{1}{2N+1}} = \frac{N}{N+1} = \frac{\frac{1}{e^{\beta\omega_0}-1}}{\frac{1}{e^{\beta\omega_0}-1}+1} = \frac{1}{1+e^{\beta\omega_0}-1} = e^{-\beta\omega_0}$$

— соответствует распределению Гиббса.

Решение

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0y} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0z} e^{-\gamma t} - (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0y} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0z} e^{-\gamma t} - (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

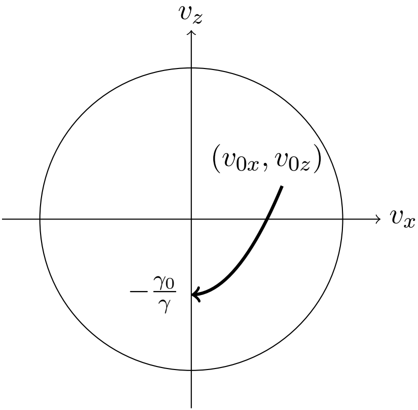
Нарисуем динамику в плоскости $v_x - v_z$:

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{v_x}{v_{0x}}$$

$$v_z = \left(v_{0z} + \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{\gamma_0}{\gamma} = \left(v_{0z} + \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \frac{v_x^2}{v_{0x}^2} - \frac{\gamma_0}{\gamma}$$

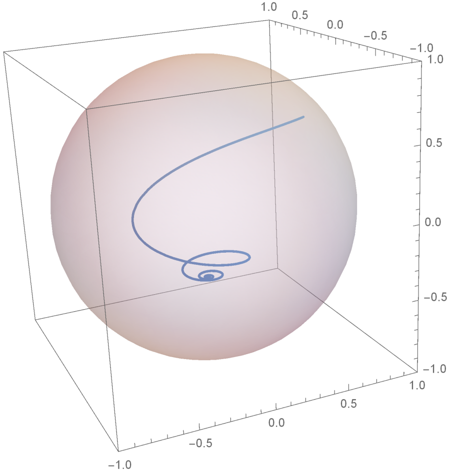
— парабола с минимумом в точке $\left(0, -\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)$.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре



2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[\omega_0\sigma_+\sigma_-, \rho] + \mathcal{D}(\rho)$$



Чистая дефазировка 2-уровневой системы

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{1}{2}[[\rho,C],C], \qquad C = (\vec{a},\vec{\sigma}), \qquad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned}[[\rho,C],C] &= i[([\vec{v}\times\vec{a}],\vec{\sigma}),(\vec{a},\vec{\sigma})] = \\ &= -2([[\vec{v}\times\vec{a}]\times\vec{a}],\vec{\sigma}) = -2(\vec{a}(\vec{a},\vec{v}) - \vec{v}|\vec{a}|^2,\vec{\sigma})\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = 2(\vec{a}(\vec{a},\vec{v}) - |\vec{a}|^2\vec{v})$$

Чистая дефазировка 2-уровневой системы

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = 2(\vec{a}(\vec{a},\vec{v}) - |\vec{a}|^2\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}, \vec{v}) = 0$$

Чистая дефазировка 2-уровневой системы

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = 2(\vec{a}(\vec{a},\vec{v}) - |\vec{a}|^2\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a},\vec{v}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = -2|\vec{a}|^2\vec{v} + 2\vec{a}(\vec{a},\vec{v}_0)$$

$$\vec{v} = e^{-2|\vec{a}|^2 t}\vec{v}_0 + (1 - e^{-2|\vec{a}|^2 t})\frac{\vec{a}(\vec{a},\vec{v}_0)}{|\vec{a}|^2}$$

Чистая дефазировка 2-уровневой системы

$$\vec{v} = e^{-2|\vec{a}|^2 t}\vec{v}_0 + (1 - e^{-2|\vec{a}|^2 t})\frac{\vec{a}(\vec{a},\vec{v}_0)}{|\vec{a}|^2}$$

Если $\vec{a} = \sqrt{\gamma_{\mathrm{ph}}}(0,0,1)$, то

$$-\frac{1}{2}[[\rho, C], C] = \gamma_{\mathrm{ph}}(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho)$$

$$\vec{v} = e^{-2\gamma_{\mathrm{ph}} t}\vec{v}_0 + (1 - e^{-2\gamma_{\mathrm{ph}} t})P_z \vec{v}_0, \qquad P_z = e_z e_z^T$$

Чистая дефазировка 2-уровневой системы

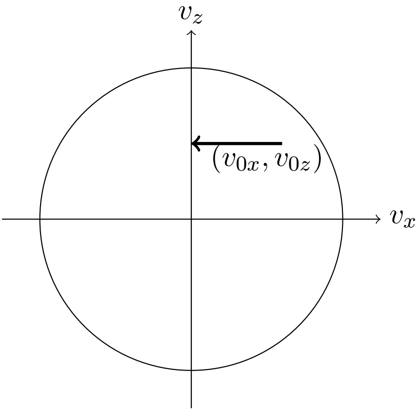
$$\vec{v} = e^{-2|\vec{a}|^2 t}\vec{v}_0 + (1 - e^{-2|\vec{a}|^2 t})\frac{\vec{a}(\vec{a},\vec{v}_0)}{|\vec{a}|^2}$$

Если $\vec{a} = \sqrt{\gamma_{\text{ph}}}(0, 0, 1)$, то

$$-\frac{1}{2}[[\rho, C], C] = \gamma_{\text{ph}}(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho)$$

$$\vec{v} = e^{-2\gamma_{\text{ph}} t}\vec{v}_0 + (1 - e^{-2\gamma_{\text{ph}} t})P_z \vec{v}_0, \qquad P_z = e_z e_z^T$$

Чистая дефазировка 2-уровневой системы



Чистая дефазировка 2-уровневой системы

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[\omega_0\sigma_+\sigma_-, \rho] + \gamma_{\text{ph}}(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho)$$