

Основы теории открытых квантовых систем.  
Лекция 6. Соотношение времён продольной и  
поперечной релаксации. Резонансная  
флуоресценция. Спектр Моллоу. Обобщённые  
уравнения Блоха

Теретёнков Александр Евгеньевич

15 октября 2023 г.

В прошлой лекции...

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\text{th}}(\rho) = & \gamma_0(N+1) \left( \sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ & + \gamma_0 N \left( \sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_- \sigma_+ \right),\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{\text{ph}}(\rho) = \gamma_{\text{ph}} (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho)$$

# Ограничение на соотношение времён

Оба диссипатора:

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$
$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\text{ph}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\text{ph}} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}, \gamma = (2N+1)\gamma_0$$

# Ограничение на соотношение времён

Оба диссипатора:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\text{ph}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} - 2\gamma_{\text{ph}} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}, \gamma = (2N+1)\gamma_0$$

Если писать уравнение Блоха чисто феноменологически, то можно написать релаксацию общего вида

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{\perp}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_{\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{||}} \end{pmatrix}$$

Однако для ГКСЛ:  $T_{||} \geq 2T_{\perp}$  (что подтверждается экспериментально).

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Во вращающейся системе координат и в условиях резонанса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & i\frac{\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, \rho(t)] + \\ & + \gamma_0(N + 1) \left( \sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ & + \gamma_0 N \left( \sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_- \sigma_+ \right), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3 |\vec{d}|^2}{3}, \quad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}.$$

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Во вращающейся системе координат и в условиях резонанса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) = & i\frac{\Omega}{2}[\sigma_+ + \sigma_-, \rho(t)] + \\ & + \gamma_0(N + 1) \left( \sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ & + \gamma_0 N \left( \sigma_+ \rho(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) \sigma_- \sigma_+ \right), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{4\omega_0^3 |\vec{d}|^2}{3}, \quad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}.$$

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} \\ 0 & \frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} \end{pmatrix}$$

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} \\ 0 & \frac{2\Omega}{\gamma^2+2\Omega^2} & -\frac{\gamma}{\gamma^2+2\Omega^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{st} = -G^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\Omega\gamma_0}{\gamma^2+2\Omega^2} \\ -\frac{\gamma\gamma_0}{\gamma^2+2\Omega^2} \end{pmatrix}$$

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Собственные числа  $G$ :

$$-\frac{\gamma}{2}, \quad -\frac{3}{4}\gamma \pm i\mu, \quad \mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2}$$

— это спектр, уже здесь понятно, что будет происходить: при  $\Omega < \frac{\gamma}{4}$  — будет один пик, при  $\Omega > \frac{\gamma}{4}$  будет три пика — спектр Моллоу.

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

Собственные числа  $G$ :

$$-\frac{\gamma}{2}, \quad -\frac{3}{4}\gamma \pm i\mu, \quad \mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma}{4}\right)^2}$$

— это спектр, уже здесь понятно, что будет происходить: при  $\Omega < \frac{\gamma}{4}$  — будет один пик, при  $\Omega > \frac{\gamma}{4}$  будет три пика — спектр Моллоу.

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3\gamma}{4}t} \left( \cos \mu t + \frac{\gamma}{4\mu} \sin \mu t \right) & e^{-\frac{3\gamma}{4}t} \frac{\Omega}{\mu} \sin \mu t \\ 0 & -e^{-\frac{3\gamma}{4}t} \frac{\Omega}{\mu} \sin \mu t & e^{-\frac{3\gamma}{4}t} \left( \cos \mu t - \frac{\gamma}{4\mu} \sin \mu t \right) \end{pmatrix}$$

# Релаксация в резервуаре и классическом внешнем поле

При нулевой температуре  $N = 0$  и начальном состоянии  
 $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t\right)\right) & \frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right) \sin \mu t\right)\right) \\ -\frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right) \sin \mu t\right)\right) & 1 - \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t\right)\right) \end{pmatrix}$$

При нулевой температуре  $N = 0$  и начальном состоянии  
 $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t\right)\right) & \frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right) \sin \mu t\right)\right) \\ -\frac{i\Omega\gamma_0}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \left(\frac{\gamma_0}{4\mu} - \frac{\Omega^2}{\gamma_0\mu}\right) \sin \mu t\right)\right) & 1 - \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left(1 - e^{-\frac{3\gamma_0}{4}t} \left(\cos \mu t + \frac{3\gamma_0}{4\mu} \sin \mu t\right)\right) \end{pmatrix}$$

Видно, что

$$\rho(t) \rightarrow \rho_{\text{st}}, \quad t \rightarrow \infty$$

# Спектр резонансной флуоресценции

Можно показать, что установившийся спектр излучения пропорционален преобразованию Фурье двухвременной корреляционной

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \sigma_+(t) \sigma_-(0) \rangle_{\text{st}}$$

# Спектр резонансной флуоресценции

Можно показать, что установившийся спектр излучения пропорционален преобразованию Фурье двухвременной корреляционной

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \sigma_+(t) \sigma_-(0) \rangle_{st}$$

По регрессионной формуле:

$$\langle \sigma_+(t) \sigma_-(0) \rangle_{st} = e^{i\omega_0 t} \operatorname{Tr} \sigma_+ \Phi_t (\sigma_- \rho_{st}), \quad t > 0,$$

где  $\Phi_t$  — эволюция во вращающейся системе координат, а коэффициент  $e^{i\omega_0 t}$  возник из перехода в представление Шредингера.  $\operatorname{Tr} \sigma_+ \Phi_t (\sigma_- \rho_{st})$  — "медленная" огибающая.

# Спектр резонансной флуоресценции

Положим  $N = 0$  (электромагнитный резервуар).

При  $t \geq 0$

$$\langle \sigma_+(t) \sigma_-(0) \rangle_{\text{st}} = \frac{\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left( \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\gamma_0}{2} - i\omega_0\right)t} + A_+ e^{-\left(\frac{3}{4}\gamma_0 + i(\mu - \omega_0)\right)t} + A_- e^{-\left(\frac{3}{4}\gamma_0 - i(\mu + \omega_0)\right)t} \right)$$

$$A_{\pm} = \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left( 2\Omega^2 - \gamma_0^2 \pm i \frac{\gamma_0}{4\mu} (10\Omega^2 - \gamma_0^2) \right)$$

$$\mu = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\gamma_0}{4}\right)^2}$$

# Спектр резонансной флуоресценции

Отражение корреляционной функции в прошлое:

$$\langle \sigma_+(-t) \sigma_-(0) \rangle_{\text{st}} = \langle \sigma_+(t) \sigma_-(0) \rangle_{\text{st}}^*, \quad t \geq 0$$

**Упражнение.** Проверить, что тот же ответ даёт регрессионная формула.

# Спектр резонансной флуоресценции

При вещественном  $\mu$  ( $\Omega > \frac{\gamma_0}{4}$ )

$$S(\omega) = \frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \left( \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\frac{\gamma_0}{2}}{\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \right.$$
$$+ \operatorname{Re} \frac{A_+ \left( \frac{3\gamma_0}{4} - i(\omega - \omega_0 + \mu) \right)}{\left( \frac{3\gamma_0}{4} \right)^2 + (\omega - \omega_0 + \mu)^2} +$$
$$\left. + \operatorname{Re} \frac{A_- \left( \frac{3\gamma_0}{4} - i(\omega - \omega_0 - \mu) \right)}{\left( \frac{3\gamma_0}{4} \right)^2 + (\omega - \omega_0 - \mu)^2} \right)$$

# Спектр резонансной флуоресценции

При  $\Omega \gg \frac{\gamma_0}{4}$ :

$$\frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \rightarrow 1, \quad \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \rightarrow 0, \quad A_{\pm} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad \mu \rightarrow \Omega$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\gamma_0}{2}}{\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \Omega)^2}$$

# Спектр резонансной флуоресценции

При  $\Omega \gg \frac{\gamma_0}{4}$ :

$$\frac{2\Omega^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \rightarrow 1, \quad \frac{\pi\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + 2\Omega^2} \rightarrow 0, \quad A_{\pm} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad \mu \rightarrow \Omega$$
$$S(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\gamma_0}{2}}{\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 + \Omega)^2} + \frac{1}{4} \frac{\frac{3\gamma_0}{4}}{\left(\frac{3\gamma_0}{4}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \Omega)^2}$$

Пики на частотах  $\omega_0 - \Omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$ , соотношение высот пиков  $1 : 3 : 1$ , соотношение интегральных интенсивностей  $1 : 2 : 1$ .

- Mollow, B. R. Power Spectrum of Light Scattered by Two-Level Systems. Phys. Rev. 1969, 188, 1969–1975.

# Обобщённые уравнения Блоха

По каким матрицам вместо матриц Паули мы хотим разлагать матрицу плотности в случае  $n$ -уровневой системы?

# Обобщённые уравнения Блоха

По каким матрицам вместо матриц Паули мы хотим разлагать матрицу плотности в случае  $n$ -уровневой системы?  
Эрмитов базис, ортогональный единице

$$F_j = F_j^\dagger, \quad \text{Tr } F_j = 0, \quad \text{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$$

# Обобщённые уравнения Блоха

По каким матрицам вместо матриц Паули мы хотим разлагать матрицу плотности в случае  $n$ -уровневой системы?  
Эрмитов базис, ортогональный единице

$$F_j = F_j^\dagger, \quad \text{Tr } F_j = 0, \quad \text{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$$

Обобщённые матрицы Гелл-Манна (генераторы  $su(n)$ )

$$S^{(jk)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle k| + |k\rangle\langle j|), \quad j < k$$

$$J^{(jk)} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|j\rangle\langle k| - |k\rangle\langle j|), \quad j < k$$

$$D^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left( \sum_{k=1}^l |k\rangle\langle k| - l|l+1\rangle\langle l+1| \right), \quad l = 1, \dots, n-1$$

**Упражнение.** Проверить  $\text{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$ .

# Обобщённые уравнения Блоха

## Обобщённые вектора Блоха

$$\rho = \frac{1}{n}I + \sum_{k=1}^{n^2-1} v_k F_k$$

# Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые вектора Блоха

$$\rho = \frac{1}{n}I + \sum_{k=1}^{n^2-1} v_k F_k$$

Уравнение ГКСЛ в форме Коссаковского (в самосопряжённом базисе)

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \sum_{i=1, k=1}^{n^2-1} a_{ik} ([F_i, \rho_t F_k] + [F_i \rho_t, F_k]),$$

где матрица  $a = a^\dagger \geqslant 0$ .

$$H = \sum_{k=1}^{n^2-1} h_k F_k$$

# Обобщённые уравнения Блоха

В общем случае

$$F_k F_j = \frac{\delta_{kj}}{n} I + \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n^2-1} z_{kjl}^* F_l$$

Коэффициенты:

$$z_{kjl} = f_{kjl} + i d_{kjl},$$

$f_{kjl}$  — структурные константы  $su(n)$ . Кроме того, в выбранном базисе  $f_{kjl}$  — полностью антисимметричны, а  $d_{kjl}$  — полностью симметричны.

# Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые уравнения Блоха

$$\dot{v} = Gv + b$$

(вещественные  $v$ )

$$G = Q + R$$

# Обобщённые уравнения Блоха

$$\begin{aligned}Q_{sm} &= \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j f_{jms} \\R_{sm} &= -\frac{1}{4} \sum_{j,k,l=1}^{n^2-1} a_{jk} (z_{jlm} f_{kls} + \bar{z}_{klm} f_{jls}) = \\&= -\frac{1}{4} \sum_{j \leq k, l=1}^{n^2-1} (2 - \delta_{jk}) \operatorname{Re} a_{jk} (f_{jlm} f_{kls} + f_{klm} f_{jls}) + \\&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \leq k, l=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk} (-d_{jlm} f_{kls} + d_{klm} f_{jls}) \\b_s &= \frac{i}{n} \sum_{j=1}^{n^2-1} a_{jk} f_{jks} = -\frac{2}{n} \sum_{j < k=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk} f_{jks}\end{aligned}$$

# Обобщённые уравнения Блоха

$$Q_{sm} = \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j f_{jms}$$

— зависит только от структурных констант алгебр Ли.

$$Q = -Q^T$$

В случае обратимой эволюции это единственный ненулевой член.

Поэтому, в случае обратимой эволюции

$$\frac{d}{dt}(v, v) = (v, (Q + Q^T)v) = 0$$

# Обобщённые уравнения Блоха

$$R_{sm} = -\frac{1}{4} \sum_{j \leq k, l=1}^{n^2-1} (2 - \delta_{jk}) \operatorname{Re} a_{jk} (f_{jlm} f_{kls} + f_{klm} f_{jls}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j \leq k, l=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk} (-d_{jlm} f_{kls} + d_{klm} f_{jls})$$

При  $\operatorname{Im} a_{jk} = 0$  уравнение зависит только от структурных констант алгебры Ли.

$$b_s = -\frac{2}{n} \sum_{j < k=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk} f_{jks}$$

При  $\operatorname{Im} a_{jk} = 0$  получим  $b_s = 0$ .

# Обобщённые уравнения Блоха

То есть, если  $a$  — вещественная матрица, то получаем однородное уравнение

$$\dot{v} = Gv,$$

причём  $G$  выражается через  $a$  только через структурные константы алгебры Ли  $su(n)$ .

На самом деле, случай вещественного  $a$ , это просто случай генератора типа классической диффузии.

# Обобщённые уравнения Блоха

При  $n = 2$  в общем случае  $R = R^T$  (и так было в наших примерах). В случае произвольного  $n$  это неверно, однако если  $a$  — вещественная матрица, то  $R = R^T$ .

# Симметричность спектра

Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным