Николай Тропин
Доклад на семинаре
"Стохастика"
10 февраля 2012 г.

Многомерные случайные блуждания в случайной среде. Условия баллистичности.

Определение модели

Сначала напомним определение модели случайного блуждания в случайной среде (RWRE). Обозначим $\Lambda_d = \{e \in \mathbb{Z}^d : |e| = 1\}$ — множество целых векторов единичной длины. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_d$ вероятностных мер на Λ_d. Элементами $\mathcal{M}_d$ являются векторы длины $2d$. Пусть такие вероятностные векторы $\omega(x) \in \mathcal{M}_d$ заданы для всех точек $x \in \mathbb{Z}^d$. Будем называть *средой* $\omega = \{\omega(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \Omega = (\mathcal{M}_d)^{\mathbb{Z}^d}$.

Для данной среды ω можно определить марковскую цепь, используя $\omega(x, e)$ в качестве переходных вероятностей. Будем обозначать $P_{x,\omega}$ закон распределения этой цепи, если она стартует из точки x:

$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = x + e|X_n = x) = \omega(x, e), \quad P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1.$$

Пусть теперь на Ω задана вероятностная мера $\mathbb{P}$. Тогда мы можем выбирать среду ω случайным образом. На пространстве траекторий $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ можно определить новую вероятностную меру

$$P_x(\cdot) = \mathbb{E}P_{x,\omega}(\cdot) = \int_\Omega P_{x,\omega}(\cdot)d\mathbb{P}(\omega)$$

Возникает два класса задач: изучение случайного блуждания в типичной фиксированной случайной среде относительно $P_{x,\omega}$ и изучение усредненного случайного блуждания относительно P_x.

Далее мы будем рассматривать только RWRE, удовлетворяющие следующим предположениям:

- $\{\omega(x, \cdot)\}$ — i.i.d. случайные векторы.
- Равномерная эллиптичность: $\exists\kappa > 0 : \forall e \in \Lambda_d\ \mathbb{P}(\omega(0, e) > \kappa) = 1$.

Даже эти условия являются достаточно общими, для того, чтобы допускать различные типы поведения RWRE. Задача классификации этих типов при $d > 1$ решена еще далеко не полностью. Мы будем рассматривать блуждания, проекции которых на некоторое направление стремятся к бесконечности.

Невозвратность и баллистичность

Фиксируем направление $l \in S^{d-1}$ и определим 2 события:

$$A_l = \{\lim_{n\to\infty} X_n \cdot l = \infty\}, \quad B_l = \{\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n \cdot l}{n} > 0\}$$

Иными словами, траектория принадлежит A_l, если она уходит на бесконечность в направлении l, и принадлежит B_l, если ее проекция на l возрастает не медленнее некоторой линейной функции. Будем говорить, что RWRE

1. *невозвратно* в направлении l, если $P_0(A_l) = 1$
2. *баллистично* в направлении l, если $P_0(B_l) = 1$.

Техника моментов восстановления (см. ниже) позволяет доказать, что баллистичность в направлении l эквивалентна существованию неслучайного вектора v, такого, что $v \cdot l > 0$, и $P_0(\lim \frac{X_n}{n} = v) = 1$. В этом смысле можно говорить просто о баллистичности RWRE.

При $d = 1$ бывают невозвратные блуждания, которые не являются баллистическими, то есть возможен уход на бесконечность с сублинейной скоростью. В многомерном случае примеры такого поведения не известны.

Гипотеза Для RWRE при $d > 1$, в предположении равномерной эллиптичности и i.i.d. среды, невозвратность и баллистичность в направлении l эквивалентны.

Моменты восстановления

Невозвратные RWRE в конце концов покидают любой участок среды. И попадают в новую среду, которая не зависит от старой. Формализация и развитие этого соображения позволяет довольно эффективно изучать их.

Для траектории $X. \in (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ определим моменты восстановления

$$\tau_1(X.) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \sup_{0\le k\le n-1} X_k \cdot l < X_n \cdot l, \inf_{k\ge n} X_k \cdot l \ge X_n \cdot l\}$$

$$\tau_{k+1}(X.) = \tau_1(X.) + \tau_k(X_{\tau_k+\cdot} - X_{\tau_1}).$$

Иными словами, τ_k — это k-тый момент времени, когда проекция траектории достигла нового максимума, ниже которого больше не опускалась. Эти моменты могут оказаться и бесконечными. Кроме того, они не являются моментами остановки (зависят от всей траектории, а не только от прошлого). Однако оказывается, что если RWRE невозвратно в направлении l, то для всех k $P_0(\tau_k < \infty) = 1$. Более того, последовательности случайных величин

$$(X_{\tau_1 \wedge \cdot}), (X_{\tau_2 \wedge (\tau_1 + \cdot)} - X_{\tau_1}), \ldots, (X_{\tau_k \wedge (\tau_{k-1} + \cdot)} - X_{\tau_{k-1}}), \ldots$$

независимы и, за исключением первой, одинаково распределены по мере P_0.

Условия баллистичности

Начнем с простого достаточного условия баллистичности. Для этого определим локальный снос $d_x(\omega) = E_{x,\omega}(X_1 - X_0)$. Тогда для баллистичности достаточно выполнения

$$\mathbb{E}[(d_0(\omega) \cdot l)_+] > \kappa^{-1} \mathbb{E}[(d_0(\omega) \cdot l)_-].$$

Это условие в терминах распределения переходных вероятностей в одной точке. Оно легко проверяется для конкретных распределений и позволяет получить множество примеров баллистических RWRE, но не является необходимым.

В конце 90-х годов Sznitman предложил семейство условий, которые также гарантируют баллистичность. Эти условия допускают несколько формулировок. Первая формулировка говорит о почти экспоненциальном убывании вероятностей нетипичного выхода из полосы. Точнее, пусть $T_L^l = \inf\{n \geq 0 : X_n \cdot l > L\}$ а $\gamma \in (0, 1)$. Будем говорить, что выполняется условие $T_\gamma | l$, если для любого направления l' из окрестности l и для всех $b > 0$ выполняется

$$\limsup_{L \to \infty} L^{-\gamma} log P_0(T_L^{l'} > T_{bL}^{-l'}) < 0. \tag{1}$$

Если (1) верно для всех $\gamma \in (0, 1)$, будем говорить, что выполняется условие $T'|l$. В одномерном случае все эти условия эквивалентны невозвратности и, следовательно, не гарантируют баллистичности. Sznitman доказал, что условие $T'|l$ на самом деле равносильно любому из условий $T_\gamma|l$ при $\gamma \in (1/2, 1)$. Этот результат был впоследствии улучшен в работах Drewitz'a и Ramirez'a. Им удалось избавиться от ограничений на γ при $d \geq 4$, и уменьшить нижнюю границу для γ в размерностях 2 и 3.

Остаются открытыми следующие вопросы:

- Являются ли условия Sznitman'a необходимыми для невозвратности в данном направлении?

- Верно ли, что все T_γ эквивалентны для $d = 2, 3$?
- Можно ли в определении (1) рассматривать только направление l, а не его окрестность?

Из условия $T_\gamma|l$ при $d \geq 2$ следует баллистичность RWRE, то есть УЗБЧ $P_0(\frac{X_n}{n} \to v) = 1$ для некоторого $v \neq 0$. Условие $T'|l$ оказывается достаточным для выполнения ФЦПТ: относительно P_0 процесс

$$B_\cdot = \frac{X_{[\cdot n]} - [\cdot n]v}{n}$$

сходится к броуновскому движению в пространстве Скорохода.

Условия Sznitman'а оказываются связаными с моментами восстановления RWRE. Определим случайную величину $R = \sup_{0 \leq k \leq \tau_1} ||X_k - X_0||$ — радиус блуждания до момента τ_1. Тогда $T_\gamma|l$ эквивалентно следующим двум условиям:

- Невозвратность в направлении l
- $\exists c > 0 : E_0 \exp\{cR^\gamma\} < \infty$

Первое из этих условий гарантирует корректность определения случайной величины R.

Проверка условий T_γ или T' кажется сложной задачей, требующей вычисления асимптотики вероятностей выхода или хорошего знания свойств τ_1. Sznitman предложил необходимое и достаточное условие для T', для проверки которого нужно работать только с одним конечным множеством. Для положительных $L, L', \tilde{L}$ и поворота σ в $\mathbb{R}^d$ обозначим $B(L, L', \tilde{L}, \sigma) = \{x \in \mathbb{Z}^d : x \in \sigma([-L, L'] \times [-\tilde{L} \times \tilde{L})]^{d-1}\}$. Пусть

$$\rho_B(\omega) = \frac{P_{0,\omega}(X_{T_B}) \notin \partial_+ B)}{P_{0,\omega}(X_{T_B}) \in \partial_+ B)},$$

где T_B — момент выхода из B, $\partial_+ B$ — часть границы B, для которой $x \cdot l \geq L'$. Эта случайная величина близка по духу отношению вероятностей пойти налево и направо в одномерной модели RWRE, которое играло там определяющую роль. Следующее условие эквивалентно T':

$$\inf_{B \in \mathcal{B}, 0 < a \leq 1} \{c_1(d)(\log \frac{1}{\kappa})^{3(d-1)} \tilde{L}^{d-1} L^{3(d-1)+1} \mathbb{E}\rho_B^a\} < 1,$$

где $\mathcal{B} = \{B(L-2, L+2, \tilde{L}, \sigma) : \sigma(e_1) = l, L > c_2(d), 3\sqrt{d} \leq \tilde{L} < L^3\}$. Это означает, что для проверки T' достаточно найти один параллелепипед $B \in \mathcal{B}$, для которого выполняется указанное неравенство.

Список литературы

[1] Topics in random walks in random environment, Alain-Sol Sznitman, In School and Conference on Probability Theory, ICTP Lect. Notes, XVII, pages 203–266 (electronic). Abdus Salam Int. Cent. The-oret. Phys., Trieste, 2004

[2] Ballisticity conditions for random walk in random environment, A. Drewitz and A.F. Ramírez, Probab. Theory and Related Fields 150, 61-75 (2011).

[3] Quenched exit estimates and ballisticity conditions for higher dimensional random walk in random environment, A. Drewitz and A.F. Ramírez, to appear in Ann. Probab.