

Основы теории открытых квантовых систем.
Лекция 7. Вполне положительные отображения.
Соответствие Чоя-Ямилковского.
Представления Крауса и Стайнспринга

Теретёнков Александр Евгеньевич

22 октября 2024 г.

Вполне положительные отображения

Линейное отображение $\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ называется **положительным**, если

$$\Phi(X) \geq 0 \quad \forall X \geq 0$$

Вполне положительные отображения

Линейное отображение $\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ называется **положительным**, если

$$\Phi(X) \geq 0 \quad \forall X \geq 0$$

Линейное отображение $\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ называется **вполне положительным**, если отображение

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2} : \mathbb{C}^{n^2 \times n^2} \rightarrow \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}$$

положительно.

Вполне положительные отображения

Вполне положительность в более явном виде:

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{\forall \geq 0} = \begin{pmatrix} \Phi(A_{11}) & \cdots & \Phi(A_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(A_{n1}) & \cdots & \Phi(A_{nn}) \end{pmatrix} \geq 0$$

Вполне положительные отображения

Иногда также вводят k -положительные отображения:

Отображение называется k -положительным, если отображение

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{k^2} : \mathbb{C}^{nk \times nk} \rightarrow \mathbb{C}^{nk \times nk}$$

положительно.

Вполне положительные отображения

Отображение сохраняет след, если

$$\mathrm{Tr} \Phi(X) = \mathrm{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Сохраняющее след вполне положительное отображение называется **квантовым каналом** (в представлении Шредингера). Отметим, что если Φ сохраняет след, то и $\Phi \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ сохраняет след.

Вполне положительные отображения

Положительные отображения являются аналогом матриц с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что если A — матрица с неотрицательными коэффициентами, то $A \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ тоже такова, поэтому в классическом случае условие вполне положительности является излишним.

Вполне положительные отображения

Положительные отображения являются аналогом матриц с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что если A — матрица с неотрицательными коэффициентами, то $A \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ тоже такова, поэтому в классическом случае условие вполне положительности является излишним.

Условие нормировки выделяющее стохастической матрицы $e^T P p = e^T p$ аналогично условию сохранению следа. Поэтому квантовые каналы являются аналогами стохастических матриц (классических каналов).

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитарным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитарным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитарным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Доказательство:

$$\text{Tr } X = \text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } I^\dagger \Phi(X) = \text{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I.$



Вполне положительные отображения

Отображение называется унитарным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Доказательство:

$$\text{Tr } X = \text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } I^\dagger \Phi(X) = \text{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I.$ □

Поэтому можно говорить, что унитарное вполне положительное отображение задаёт квантовый канал в представлении Гейзенберга.

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитарным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Доказательство:

$$\text{Tr } X = \text{Tr } \Phi(X) = \text{Tr } I^\dagger \Phi(X) = \text{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. □

Поэтому можно говорить, что унитарное вполне положительное отображение задаёт квантовый канал в представлении Гейзенберга.

В классике, аналогом этого утверждения была возможность переписать условие нормировки как $P^T e = e$.

Вполне положительные отображения

Вполне положительное отображение, которое одновременно сохраняет след и унитарно, часто называют **бистохастическим** каналом (иногда унитарным), так как оно аналогично бистохастическим матрицам $Pe = e, P^T e = e$.

Соответствие Чоя-Ямилковского

Максимально сцепленное состояние в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n |j\rangle \otimes |j\rangle$$

$$|\Omega\rangle\langle\Omega| = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|$$

Соответствие Чоя-Ямилковского

Соответствие (иногда говорят изоморфизм) Чоя-Ямилковского:
Каждому линейному отображению $\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$
сопоставим $n^2 \times n^2$ -матрицу

$$\rho_\Phi = \Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(|\Omega\rangle\langle\Omega|).$$

Соответствие Чоя-Ямилковского

Упражнение. Соответствие Чоя-Ямилковского является обратимым. Обратное соответствие задаётся формулой

$$\Phi(X) = n \operatorname{Tr}_R \rho_\Phi (I_n \otimes X^T)$$

X^T — транспонирование в базисе $|j\rangle$.

Соответствие Чоя-Ямилковского

Если Φ — квантовый канал, то ρ_Φ является матрицей плотности.

Доказательство: В силу вполне положительности

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(|\Omega\rangle\langle\Omega|) \geq 0.$$

В силу сохранения нормировки ρ_Φ — матрица плотности. □

Представление Крауса

Утверждение. Φ — канал тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^\dagger, \quad \sum_{l=1}^{n'} W_l^\dagger W_l = I_n.$$

(минимальное число членов будем называть крауссовским рангом $W = \text{rank} \Phi$).

Представление Крауса

Доказательство: Произвольную матрицу плотности можно представить в виде

$$\rho_{\Phi} = \sum_{l=1}^{n'} |w_l\rangle\langle w_l|, \quad n' \leq n^2, \quad |w_l\rangle \in \mathbb{C}^{n^2},$$

где $\min n' = \text{rank } \rho_{\Phi}$. В частности всегда можно выбрать $\langle w_l | w_k \rangle = ||w_l||^2 \delta_{lk}$.

Введём матрицы $W_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$ по формуле

$$\langle k | W_l | i \rangle = \sqrt{n} \langle k \otimes i | w_l \rangle$$

Представление Крауса

Так как $\langle k \otimes i | \rho_{\Phi} | m \otimes j \rangle = \frac{1}{n} \langle k | \Phi(|i\rangle\langle j|) | m \rangle$, то

$$\sum_{l=1}^{n'} \langle k \otimes i | w_l \rangle \langle w_l | m \otimes j \rangle = \frac{1}{n} \langle k | \Phi(|i\rangle\langle j|) | m \rangle$$

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n'} \langle k | W_l | i \rangle \langle j | W_l^{\dagger} | m \rangle = \frac{1}{n} \langle k | \Phi(|i\rangle\langle j|) | m \rangle$$

$$\sum_{l=1}^{n'} \sum_{i,j} \langle k | W_l | i \rangle \langle i | \rho | j \rangle \langle j | W_l^{\dagger} | m \rangle = \langle k | \Phi(\rho) | m \rangle$$

$$\sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^{\dagger} = \Phi(\rho)$$

Представление Крауса

Сохранение следа

$$\sum_{l=1}^{n'} W_l^\dagger W_l = I_n$$

Представление Крауса

Наоборот, если

$$\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^\dagger,$$

то для $X \geq 0$

$$\begin{aligned}\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(X) &= \sum_{l=1}^{n'} W_l \otimes I_n X (W_l \otimes I_n)^\dagger = \\ &= \sum_{l=1}^{n'} \sum_x W_l \otimes I_n |x\rangle \langle x| (W_l \otimes I_n)^\dagger \geq 0 \quad \square\end{aligned}$$

Представление Крауса

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{n'} \end{pmatrix}$$

— матрица из n ортонормированных векторов (репер) в $k = n \times n'$ -мерном пространстве. Множество таких ортонормированных наборов называется (комплексным) многообразием Штифеля при фиксированных n и k .

$$\begin{pmatrix} W_1^\dagger & \dots & W_{n'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{n'} \end{pmatrix} = I_n$$

Представление Крауса

Унитарность

$$\sum_{l=1}^{n'} W_l W_l^\dagger = I_n$$

Представление Крауса

Разложение Крауса в ортонормированном базисе

$$W_l = \sum_{i=1}^{n^2} F_i \operatorname{Tr}(F_i^+ W_l), \quad \operatorname{Tr} F_i^+ F_j = \delta_{ij}$$

$$\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^\dagger = \sum_{i,j=1}^{n^2} \underbrace{\operatorname{Tr}(F_i^+ W_l) \overline{\operatorname{Tr}(F_j^+ W_l)}}_{C_{ij}} F_i \rho F_j^\dagger$$

$$C \geqslant 0$$

Сводная таблица для представления Чоя-Ямилковского

$$\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\Phi(X^\dagger) = \Phi(X)^\dagger$$

$$\text{tr } \Phi(\rho) = \text{tr } \rho$$

$$\Phi(I) = I$$

$$(\Phi \otimes I_n)(X) \geq 0, \forall X \geq 0$$

$$(\Phi \otimes I_k)(X) \geq 0, \forall X \geq 0, k \leq n$$

$$\Phi(\rho) = \sum_l W_l \rho W_l^\dagger$$

$$W - \text{rank } \Phi$$

$$\text{tr } F_l^\dagger F_k = \delta_{lk}$$

$$\Phi(\rho) = \sum_{lk} C_{lk} F_l \rho F_k^\dagger$$

$$\rho_\Phi : \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\rho_\Phi^\dagger = \rho_\Phi$$

$$\text{Tr}_R \rho_\Phi = \frac{I_n}{n}$$

$$\text{Tr}_S \rho_\Phi = \frac{I_n}{n}$$

$$\rho_\Phi \geq 0$$

$$\langle \psi | \rho_\Phi | \psi \rangle \geq 0, S - \text{rank}(|\psi\rangle) = k$$

$$\rho_\Phi = \sum_l |w_l\rangle \langle w_l|$$

$$\text{rank } \rho_\Phi$$

$$\langle \varphi_l | \varphi_k \rangle = \delta_{lk}$$

$$\rho_\Phi = \sum_{lk} C_{lk} |\varphi_l\rangle \langle \varphi_k|$$

$S - \text{rank}(|\psi\rangle) \equiv \text{rank } \text{Tr}_R |\psi\rangle \langle \psi|$ — ранг Шмидта.

Представление Стайнспринга

Резервуар $R' = \mathbb{C}^{n'}$

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_{R'} U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger$$

$$(U|i \otimes 1\rangle = \sum_{l=1}^{n'} W_l|i \otimes l\rangle)$$

Достроим набор ортонормированных векторов до ортонормированного базиса

$$U = \begin{pmatrix} W_1 & \dots \\ \vdots & \\ W_{n'} & \dots \end{pmatrix}$$
$$U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = \begin{pmatrix} W_1 \rho W_1^\dagger & \dots \\ \vdots & \\ W_{n'} \rho W_{n'}^\dagger & \dots & W_{n'} \rho W_{n'}^\dagger \end{pmatrix}$$

Примеры вполне положительных отображений

Унитарное отображение U_i с вероятностью p_i , тогда

$$\Phi(\rho) = \mathbb{E} U \rho U^\dagger = \sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger$$

Φ — унитарный канал. ($W_i = \sqrt{p_i} U_i$)

Примеры вполне положительных отображений

Упражнение. Пусть

$$\Phi(\rho) = \sum_{ij} P_{ij} |i\rangle \langle j| \rho |j\rangle \langle i|,$$

тогда вполне-положительное, если P матрица с неотрицательными коэффициентами, квантовый канал, если P — стохастическая, унитарный канал, если P — бистохастическая.

Условные математические ожидания

Вполне положительный идемпотент $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ называется условным математическим ожиданием.

Примеры:

1

$$\mathcal{P}\rho = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

Π_x — ортогональное разложение единицы.

2

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$$

$$\mathcal{P}\rho = \text{Tr}_R \rho \otimes \rho_\beta$$