

Формула Видома для старшего коэффициента полинома, ортонормированного относительно переменного веса

А. В. Комлов, С. П. Суетин

1. Пусть задан полином $Q(x) = x^{2m} + \dots$ степени $2m$ с вещественными коэффициентами – потенциал внешнего поля в стандартной теоретико-потенциальной задаче (1) (см. [1], [2], [3]). Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p E_j$, где $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, p$, – система отрезков на вещественной прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующему условию. В классе $M_1(E)$ единичных мер μ с носителями $\text{supp } \mu$ на E (единственное) решение $\lambda = \lambda_Q \in M_1(E)$ экстремальной задачи

$$I_Q(\lambda) = \min_{\mu \in M_1(E)} I_Q(\mu) \quad (1)$$

обладает следующими свойствами: $\text{supp } \lambda = E$ (т.е. мера λ заполняет весь компакт E) и $d\lambda(x) = h(x)/\sqrt{|H_{2p}(x)|} dx$, $x \in E$, где функция h голоморфна и отлична от нуля на E , $H_{2p}(z) = (z - e_1) \cdots (z - e_{2p})$ (рассматривается арифметическое значение корня на E). В (1) I_Q – функционал энергии с полем Q : $I_Q(\mu) = \int (V^\mu(x) + 2Q(x)) d\mu(x)$, $V^\mu(x) = - \int \log |x - t| d\mu(t)$. Существование такой системы отрезков E для заданного поля Q вытекает из общих результатов работ [1], [4], [6]. Тем самым здесь рассматривается случай так называемой “стенки” (“hard edge case”; см. [4], [5]). Экстремальная мера λ является единственной *равновесной мерой* (в классе $M_1(E)$) во внешнем поле Q : $V^\lambda(x) + Q(x) \equiv w_Q$, $x \in E$, w_Q – *постоянная равновесия*.

2. Пусть последовательность полиномов $P_n(x) = x^n + \dots$, $n = 1, 2, \dots$, определяется соотношениями ортогональности $\int_E P_n(x) x^j \varphi_n(x) dx = 0$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, где $\varphi_n(x)$ – заданная последовательность весовых функций на E . Многочлен P_n минимизирует норму $\int P_n^2(x) \varphi_n(x) dx$ в классе всех многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом; распределение нулей таких многочленов зависит от асимптотического поведения функций φ_n при $n \rightarrow \infty$ (см. [1], [7]). В дальнейшем предполагается, что $\varphi_n(x) = e^{-2nQ(x)}/\sqrt{|H_{2p}(x)|}$; пусть $p_n(x, n) = \gamma_n(n)x^n + \dots$ – соответствующая последовательность нормированных полиномов, $\gamma_n(n) > 0$. Тогда [1]

$$|p_n(z, n)|^{1/n} \rightarrow e^{w_Q - V^\lambda(z)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

локально равномерно (т.е. на компактных подмножествах) в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Соотношение (2) принято называть формулой *слабой* (или логарифмической) асимптотики для полиномов $p_n(\cdot, n)$; из (2) вытекает формула слабой асимптотики для старших коэффициентов: $\gamma_n(n)^{1/n} \rightarrow e^{w_Q}$, $n \rightarrow \infty$. В теории случайных матриц (см. [5], [8], [9], [10]), естественным образом возникает задача о формулах *сильной* асимптотики для полиномов $p_n(z, n)$ и коэффициентов $\gamma_n(n)$. Для случая “soft edge case” такие формулы получены в работе [6]. В настоящей работе формула сильной асимптотики для $\gamma_n(n)$ получена для случая “стенки”. Формула (3) аналогична классической формуле Видома [11; §6, теорема 6.2] для веса, не зависящего от n (см. также [12], [13], [14]). Для одного отрезка случай “стенки” изучен в работе [15; теорема 2]; полученные в настоящей работе результаты обобщают результаты работы [15] на случай произвольного числа отрезков $p \geq 2$.

3. Пусть $g(z, \infty) = g_D(z, \infty)$ – функция Грина для области D с особенностью в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, $\omega_k(z)$ – гармоническая мера (в точке $z \in D$) отрезка E_k относительно $\bigsqcup_{j \neq k} E_j$, $k = 1, \dots, p$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $\lambda \in M_1(E)$ – равновесная мера во внешнем поле Q , w_Q – постоянная равновесия. Тогда для старшего коэффициента $\gamma_n(n)$ нормированного относительно веса $\varphi_n(x) = e^{-2nQ(x)}/\sqrt{|H_{2p}(x)|}$, $x \in E$, полинома справедлива следующая формула:

$$\gamma_n(n) = e^{nw_Q} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon_j g(z_j(n), \infty) \right\} (1 + O(\delta^n)), \quad \delta \in (0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Точки $z_j(n)$, $z_j(n) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, и параметры $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, \dots, p-1$, однозначно определяются из следующей системы сравнений (c_k – некоторые постоянные):

$$\sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon_j \omega_k(z_j) = -2n\lambda(E_k) + c_k \pmod{2}, \quad k = 1, \dots, p-1. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что в типичном случае при $n \rightarrow \infty$ величина $2 \log(\gamma_n(n) \cdot e^{-nw_Q})$ осциллирует около нуля и заполняет целый отрезок $[-A, A]$; $A = \sum_{j=1}^{p-1} g(z_j^*, \infty)$, $z_j^* \in (e_{2j}, e_{2j+1})$ – критические точки функции Грина.

Теорема 1 вытекает из формулы (5) сильной асимптотики для полиномов $p_n(x, n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p_n(x, n)$ – полиномы, нормированные относительно веса $\varphi_n(x) = e^{-2nQ(x)}/\sqrt{|H_{2p}(x)|}$, $x \in E$, $\Psi_n(z, n)$ – соответствующая нормированная пси-функция Наттолла (см. [13], [14], [3]). Тогда справедлива следующая формула:

$$p_n(z, n) = \Psi_n(z, n) (1 + O(\delta^n)), \quad \delta \in (0, 1), \quad z \in K, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где K – произвольный компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, лежащий вне выпуклой оболочки компакта E .

Теорема 2 доказывается методом, основанном на сингулярном интегральном уравнении Наттолла (см. [16], [13], [15], [3]).

Список литературы

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127.
 [2] H. N. Mhaskar, E. B. Saff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**:1 (1984), 203–234. [3] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122. [4] В. С. Бузаров, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **190**:6 (1999), 11–22. [5] L. Pastur, *J. Approx. Theory*, **139**:1–2 (2006), 269–292. [6] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425. [7] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352. [8] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56. [9] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190. [10] Л. Эрдеш, *УМН*, **66**:3(399) (2011), 67–198. [11] H. Widom, *Adv. Math.*, **3**:2 (1969), 127–232. [12] А. И. Аптекарев, *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258. [13] С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114. [14] С. П. Суетин, *Совр. пробл. матем.*, **6**, МИАН, М., 2006, 3–74. [15] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, *J. Approx. Theory*, **129**:2 (2004), 129–166. [16] J. Nuttall, *Constr. Approx.*, **6**:2 (1990), 157–166.

А. В. Комлов (A. V. Komlov)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: komlov@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
 Принято редколлегией
 10.01.2012

С. П. Суетин (S. P. Suetin)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: suetin@mi.ras.ru