

# Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 8. Инструменты и регрессионная теорема. Генератор вполне положительной полугруппы

Теретёнков Александр Евгеньевич

29 октября 2024 г.

# Инструменты

**Чёткие наблюдаемые:**

Пусть  $X^\dagger = X$  — чёткая наблюдаемая

$$X = \sum_x x \Pi_x, \quad \Pi_x \Pi_y = \delta_{xy} \Pi_x$$

Заметим, что отображения

$$\Phi_x(\rho) = \Pi_x \rho \Pi_x$$

являются вполне положительными и  $\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho$ , а

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

является каналом.

(В частности,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iXt} \rho e^{iXt} dt = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$ .)

## Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство  $(\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho)$  вполне положительных отображений  $\Phi_x$  называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение  $x$  нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\text{Tr } \Phi_x(\rho)$$

# Инструменты

## Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство  $(\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho)$  вполне положительных отображений  $\Phi_x$  называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение  $x$  нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\text{Tr } \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\text{Tr } \Phi_x(\rho)}$$

## Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство  $(\text{Tr } \Phi_x(\rho) \leq \text{Tr } \rho)$  вполне положительных отображений  $\Phi_x$  называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение  $x$  нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\text{Tr } \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\text{Tr } \Phi_x(\rho)}$$

В результате неселективного в состоянии

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Phi_x(\rho)$$

## Нечётные наблюдаемые:

Отметим, что вероятности  $\text{Tr } \Phi_x(\rho) = \text{Tr } \Phi_x^*(I_n)\rho$  зависят от величины  $M_x = \Phi_x^*(I_n)$ , поэтому обычно говорят, что  $M_x$  задают (нечёткую) наблюдаемую (разложение единицы  $\sum_x M_x = I$ ,  $M_x = M_x^\dagger \geq 0$ ).

Одна и та же наблюдаемая может быть измерена различными инструментами, приводящими к различным апостериорным состояниям.

# Другая форма квантовой регрессионной теоремы

Обобщённая регрессионная формула:  $t_N \geq \dots \geq t_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_S X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} (\dots X^{(1)} \Phi_{t_1} (X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \dots) Y^{(N)} \end{aligned}$$

Переобозначим

$$\mathcal{C}^{(k)}(\rho) = X^{(k)} \rho Y^{(k)}$$

Тогда можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_S \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \dots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho \end{aligned}$$

## Другая форма квантовой регрессионной теоремы

С другой стороны, если бы мы считали соответствующее среднее мы считали в случае унитарной динамики  $\mathcal{U}_t$  системы и резервуара:

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_{S+R}(\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N-t_{N-1}} \dots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_S \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N-t_{N-1}} \dots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho = \\ & = \text{Tr}_{S+R}(\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N-t_{N-1}} \dots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R \end{aligned}$$

**Упражнение.** Эквивалентно, для любых вполне положительных отображений  $\mathcal{E}^{(k)}$

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_S \mathcal{E}^{(N)} \Phi_{t_N-t_{N-1}} \dots \mathcal{E}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho = \\ & = \text{Tr}_{S+R}(\mathcal{E}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N-t_{N-1}} \dots (\mathcal{E}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho \otimes \rho_R \end{aligned}$$



# Другая форма квантовой регрессионной теоремы

В результате можно сказать, что совместное распределение вероятностей для показаний инструментов  $\mathcal{E}_{x_k}^{(k)}$ , если они провели измерение в момент времени  $t_k$ , имеет вид

$$\mathrm{Tr}_S \mathcal{E}_{x_N}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \dots \mathcal{E}_{x_1}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}_{x_0}^{(0)} \rho$$

# Вполне положительная полугруппа

**Определение.** Семейство отображений  $\Phi_t : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\forall t \geq 0$  — (однопараметрическая) вполне положительная непрерывная (сохраняющая след) полугруппа:

- 1  $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}, \forall t, s \geq 0, \Phi_0 = I.$
- 2  $\Phi_t$  — непрерывна  $\forall t \geq 0$  (достаточно непрерывности  $t \rightarrow +0$ ).
- 3  $\Phi_t$  — вполне положительные, сохраняющее след  $\forall t \geq 0.$

# Генератор вполне положительной полугруппы

**Утверждение.** У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

# Генератор вполне положительной полугруппы

**Утверждение.** У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

**Доказательство:**

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_s ds = \Phi_0 = I$$

Обозначим

$$M_t = \int_0^t \Phi_s ds$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_t &= tI + o(t), & t \rightarrow +0 \\ \det M_t &= t^n + o(t^n), & t \rightarrow +0 \end{aligned}$$

# Генератор вполне положительной полугруппы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \forall t < \delta(\varepsilon) \quad |\det M_t - t^n| < \varepsilon t^n$$

Так как круг

$$z : |z - t^n| < \frac{1}{2}t^n$$

не содержит точки  $z = 0$ , то полагая  $t_1 = \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2})$ , получим

$$\det M_{t_1} \neq 0.$$

$\Rightarrow \exists t_1 > 0 : M_{t_1}$  — обратима

# Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\Phi_s &= M_{t_1}^{-1} M_{t_1} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_s ds \Phi_t = \\ &= M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_{s+t} dt = M_{t_1}^{-1} \int_s^{s+t_1} \Phi_t dt = \\ &= M_{t_1}^{-1} (M_{s+t_1} - M_s)\end{aligned}$$

В правой части стоят функции дифференцируемые по  $s$ , что гарантирует дифференцируемость  $\Phi_s$

$$\frac{d}{ds} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} (\Phi_{s+t_1} - \Phi_s) = \underbrace{M_{t_1}^{-1} (\Phi_{t_1} - I)}_{\mathcal{L}} \Phi_s \quad \square$$

# Генератор вполне положительной полугруппы

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = \mathcal{L}\Phi_t,$$

$\mathcal{L}$  — генератор.

$$\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$$

# Генератор вполне положительной полугруппы

**Теорема.**  $\mathcal{L}$  — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы  $\Leftrightarrow \mathcal{L}$  имеет вид ГКСЛ.



# Генератор вполне положительной полугруппы

**Теорема.**  $\mathcal{L}$  — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы  $\Leftrightarrow \mathcal{L}$  имеет вид ГКСЛ.

**Доказательство:**

1)  $\Phi_t$  — вполне положительная однопараметрическая полугруппы.

Разложение Краусса в базисе.

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger, \quad C \geq 0$$

Выберем ортонормированный базис такой, что  $F_{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} I$

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger + \sum_{i=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}} C_{in^2}(t) F_i \rho + h.c. + \frac{C_{n^2 n^2}(t)}{n} \rho$$

# Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\Phi_\varepsilon(\rho) - \rho}{\varepsilon} &= \sum_{i,j=1}^{n^2-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i \rho F_j^\dagger + \\ &+ \sum_{i=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C_{in^2}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i \rho + h.c. + \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C_{n^2 n^2}(\varepsilon) - n}{\varepsilon} \rho\end{aligned}$$

$$a_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad i, j = 1, \dots, n^2 - 1$$

$$F = \sum_{i=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C_{in^2}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i$$

$$a_{n^2 n^2} = \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C_{n^2 n^2}(\varepsilon) - n}{\varepsilon}$$

(Неотрицательность  $a_{ij}$  следует из неотрицательности  $C_{ij}(\varepsilon)$ .)

# Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\rho) &= \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger + F \rho + \rho F^\dagger + a_{n^2 n^2} \rho = \\ &= -i[H, \rho] + \{G, \rho\} + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger\end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2i}(F^\dagger - F), \quad G = \frac{1}{2}a_{n^2 n^2}I + \frac{1}{2}(F^\dagger + F)$$

# Генератор вполне положительной полугруппы

Выразим  $G$  через  $a_{ij}$  и базис  $F_i$  с помощью условия нормировки  $\text{tr } \mathcal{L}(\rho) = 0$ :

$$0 = \text{tr} \left( 2G + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho$$

В силу произвольности  $\rho$ :

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i$$

# Генератор вполне положительной полугруппы

2)  $\mathcal{L}$  — ГКСЛ генератор.

По формуле Троттера  $e^{A+B} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{N}A} e^{\frac{1}{N}B} \right)^N$

Применим к

$$\mathcal{L}(\rho) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger}_{\mathcal{A}(\rho)} + \underbrace{(G - iH)\rho + \rho(G + iH)}_{\mathcal{B}(\rho)}$$

$$e^{\mathcal{L}t} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \exp \left( \frac{t}{N} \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \cdot F_j^\dagger \right) e^{\frac{t}{N}(G-iH)} \cdot e^{\frac{t}{N}(G+iH)} \right)^N$$

Оба члена вполне положительны, поэтому и предел вполне положителен.