

Глобальное сглаживание минимальных гиперповерхностей Калаби-Яу в 4-мерных торических многообразиях

В. В. Батырев

Мемориальная конференция памяти А.Н. Паршина
12 ноября 2024

Плюрироды комплексных алгебраических многообразий

Мы будем рассматривать бирациональные свойства алгебраические многообразия над полем $\mathbb{C}$.

Согласно теореме Хиронаки, каждый класс бирациональной эквивалентности d -мерных комплексных алгебраических многообразий содержит проективную гладкую модель X , которая позволяет определить её дискретные инварианты (так называемые **плюрироды** многообразия X):

$$P_m(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, (\Omega_X^d)^{\otimes m}), \quad \forall m \geq 0,$$

не зависящие от выбора гладкого проективного представителя X в данном бирациональном классе $[X]$.

Размерность Кодайры

Плурисогенности имеют асимптотически степенной рост в зависимости от m :

$$P_m(X) \asymp m^\kappa, \quad \kappa \in \{0, 1, \dots, d\} \cup \{-\infty\}$$

где неотрицательное целое число $\kappa = \kappa(X)$ (или символ $-\infty$) называется **размерностью Кодайры** данного бирационального класса $[X]$.

Определение

Говорят, что гладкое проективное комплексное многообразие X имеет **отрицательную размерность Кодайры**, если $\kappa(X) = -\infty$, то есть, если

$$P_m(X) = 0 \quad \forall m \geq 0.$$

В противном случае говорят, что бирациональный класс X имеет **неотрицательную кодаирову размерность**.

Определение

Бирациональный класс гладкого проективного комплексного многообразия X называется **Калаби-Яу**, если имеет место



$$P_m(X) = 1 \quad \forall m \geq 0.$$

В этом случае размерность Кодaira многообразия X , очевидно, равна 0.



$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0, \quad 0 < i < \dim_{\mathbb{C}} X.$$

Многообразия Калаби-Яу

Определение

Гладкое проективное комплексное многообразие X называется **многообразием Калаби-Яу**, если имеет место

•

$$\Omega_X^d \cong \mathcal{O}_X.$$

•

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0, \quad 0 < i < \dim_{\mathbb{C}} X.$$

Замечание

К сожалению, в размерности $d \geq 3$ не каждый бирациональный класс Калаби-Яу имеет представитель в виде гладкого проективного многообразия Калаби-Яу. Однако представитель с условием $\Omega_X^d \cong \mathcal{O}_X$ можно найти, если разрешить X иметь не очень сложные особенности: локально $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности. Для их получения используется бирациональная теория минимальных моделей (теория Мори).

Глобальное сглаживание особых многообразий Калаби-Яу в размерности 3

- Y. NAMIKAWA and J. H. M. STEENBRINK, Global smoothing of Calabi-Yau threefolds, *Invent. Math.* 122 (1995), no. 2, 403–419.
- Y. NAMIKAWA, On deformations of Calabi-Yau threefolds with terminal singularities. *Topology* 33(3), 429–446 (1994)
- Z. RAN, Deformations of Calabi-Yau Kleinfolds in *Essays on Mirror Manifolds*, Int. Press, Hong Kong, 1992, 451–457. MR
- G. TIAN, Smoothing 3-folds with trivial canonical bundle and ordinary double points in *Essays on Mirror Manifolds*, Int. Press, Hong Kong, 1992, 458–479.
- M. REID, The moduli space of threefolds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible. *Math. Ann.* 278, 329–334 (1987)
- R. FRIEDMAN, Global smoothings of varieties with normal crossings, *Ann. of Math. (2)* 118 (1983), no. 1, 75–114.
- R. FRIEDMAN, Simultaneous resolution of threefold double points, *Math. Ann.* 274 (1986) 671–689.
- R. FRIEDMAN, Global smoothings of varieties with normal crossings, *Ann. of Math. (2)* 118 (1983), no. 1, 75–114.

Глобальное сглаживание минимальных Калаби-Яу многообразий в размерности 3

Теорема (Намикава-Стинбринк 1995)

Пусть X $\mathbb{Q}$ -факториальное трёхмерное многообразие Калаби-Яу с изолированными терминальными особенностями. Тогда X может быть глобально сглажено в гладкое проективное многообразие Калаби-Яу Y с помощью плоской деформации, при которой группа Пикара остается неизменной.

Пусть $H \subset (\mathbb{C}^*)^4$ невырожденная гиперповерхность в $(\mathbb{C}^*)^4$ из бирационального класса Калаби-Яу, заданная множеством нулей многочлена Лорана с многогранником Ньютона P . Мы опишем комбинаторное построение глобального сглаживания минимальной модели Калаби-Яу $\hat{H}$ с помощью явной деформации уравнения в некотором крепантном терминальном разрешении четырёхмерного горенштейнова торического многообразия Фано.

Многогранник Ньютона P

Рассмотрим многочлен Лорана

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{m}} \mathbf{t}^{\mathbf{m}} \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$$

в качестве регулярной функции на алгебраическом торе

$$\mathbb{T}^d := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \cong (\mathbb{C}^*)^d.$$

Его **многогранником Ньютона** P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^d$:

$$P = \operatorname{Newt}(f) := \operatorname{Conv}(\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \mid c_{\mathbf{m}} \neq 0).$$

Срезки многочлена Лорана на грани $Q \preceq P$

Запишем многочлен Лорана $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d \cap P} c_m t^m,$$

где P – его многогранник Ньютона. Тогда **срезкой f на грань $Q \preceq P$** называется многочлен Лорана

$$f_Q(t) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^d \cap Q} c_m t^m.$$

Невырожденные торические гиперповерхности

Определение (Хованский, Варченко, Кушниренко)

Многочлен Лорана f и определяемая им аффинная торическая гиперповерхность $H := \{f = 0\} \subset \mathbb{T}^d$ называются **невырожденными**, если для любой грани $Q \preceq P$ система уравнений

$$f_Q(t) = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} f_Q(t) = \cdots = t_d \frac{\partial}{\partial t_d} f_Q(t) = 0$$

не имеет решений в T^d .

Алгебраическая характеристика невырожденности

Условие невырожденности торической гиперповерхности является открытым по Зарисскому условием на конечный набор коэффициентов c_m ($m \in A$) для мономов $c_m t^m$, входящих в многочлен Лорана f . Это условие может быть явно выражено через необращение в нуль так называемого **главного A -детерминанта** введенным Гельфандом, Капрановым и Зелевинским в конце 80-х годов прошлого века.

И.М.Гельфанд, А.В.Зелевинский, М.М.Капранов. *Дискриминанты многочленов многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона*. Алгебра и Анализ, **2** (1991), 449–505.

Примеры невырожденных многочленов Лорана

Рассмотрим многочлен Лорана

$$f := \sum_{i=0}^d c_{m_i} t^{m_i},$$

у которого мономы Лорана

$$t^{m_0}, \dots, t^{m_d} \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]$$

имеют аффинно независимые экспоненты $m_0, \dots, m_d \in \mathbb{Z}^d$. Это эквивалентно тому условию, что квадратная целочисленная матрица размера $(d+1) \times (d+1)$ состоящая из строчек $(1, m_0), \dots, (1, m_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ имеет ненулевой определитель. В этом случае для любых ненулевых коэффициентов $c_{m_0}, \dots, c_{m_d}$ соответствующий многочлен Лорана f является невырожденным, а его многогранник Ньютона P является d -мерным симплексом.

Основные обозначения

Пусть $M \cong \mathbb{Z}^d$ свободная абелева группа ранга d , $N := \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ двойственная группа с **естественным спариванием**

$$\langle *, * \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Будем рассматривать соответствующие векторные пространства $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}$ и $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ вместе с индуцированным спариванием

$$\langle *, * \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Для любого выпуклого компакта $K \subset M_{\mathbb{R}}$ рассмотрим его непрерывную выпуклую **опорную функцию**

$$\text{Min}_K : N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Min}_K(y) := \min_{x \in K} \langle x, y \rangle, \quad y \in N_{\mathbb{R}}.$$

Внутренность Файна целочисленного многогранника P

Пусть P — выпуклый d -мерный целочисленный многогранник. Тогда

$$P = \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, \nu \rangle \geq \text{Min}_P(\nu) \quad \forall \nu \in N \setminus \{0\}\}.$$

Определение.

Подмножество

$$F(P) := \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, \nu \rangle \geq \text{Min}_P(\nu) + 1 \quad \forall \nu \in N \setminus \{0\}\}$$

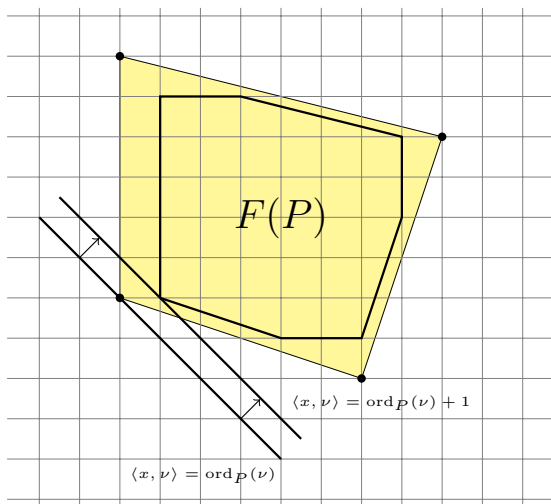
в P называется **внутренностью Файна** многогранника P .

- подмножество $F(P) \subset P$ выпукло.
- подмножество $F(P)$ состоит из всех точек $x \in P$, которые имеют **целочисленное расстояние** не менее 1 до любой целочисленной опорной гиперплоскости многогранника P .
- Каждая внутренняя целая точка многогранника P содержится в $F(P)$. В частности, мы всегда имеем включение

$$\text{Conv}(\text{Int}(P) \cap M) \subseteq F(P).$$

- В случае $\dim P = 2$ всегда имеет место равенство $F(P) = \text{Conv}(\text{Int}(P) \cap M)$

Внутренность Файна целочисленного многогранника P



Комбинаторная формула для размерности Кодайры

Теорема

Размерность Кодайры κ невырожденной торической гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ с многогранником Ньютона P вычисляется по формуле

$$\kappa = \min\{d - 1, \dim F(P)\}.$$

В частности, невырожденная торическая гиперповерхность с многогранником Ньютона имеет неотрицательную размерность Кодайры тогда и только тогда, когда внутренность Файна $F(P)$ не пуста.

Необходимое комбинаторное условие бирациональных классов Калаби-Яу

В 1976 году Аскольд Хованский доказал, что геометрический род невырожденной торической гиперповерхности с многогранником Ньютона P равен числу его внутренних целых точек $|Int(P) \cap M|$. Из этого результата, в частности, следует, что если невырожденная торическая гиперповерхность принадлежит бирациональному классу Калаби-Яу, то её многогранник Ньютона обязан содержать ровно одну внутреннюю целую точку. К настоящему времени полная унимодулярная классификация таких целочисленных многогранников имеется в размерности 2 и 3. Однако, для размерности 3 и выше, условие существования единственной внутренней целой точки в P не является достаточным для бирациональных классов Калаби-Яу.

Комбинаторный критерий для бирациональных классов Калаби-Яу

Теорема (Критерий бирациональных классов Калаби-Яу)

Невырожденная торическая гиперповерхность H с многогранником Ньютона P принадлежит бирациональному классу Калаби-Яу тогда и только тогда, когда внутренность Файна $F(P)$ состоит в точности из единственной внутренней целой точки многогранника P .

Определение

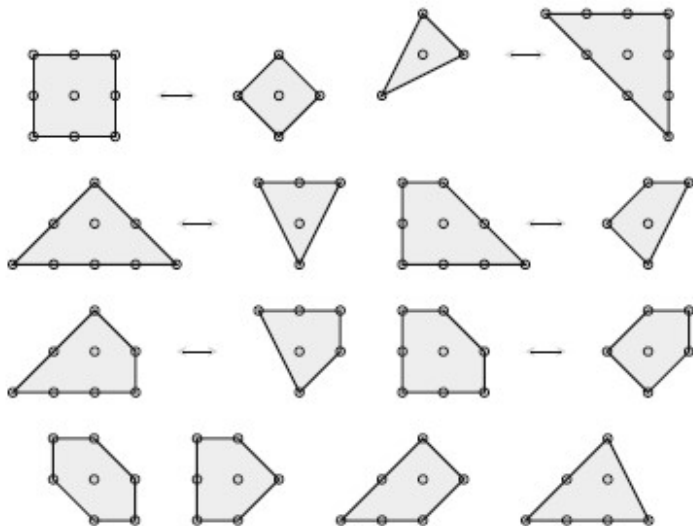
Целочисленный d -мерный многогранник $P \subset M_{\mathbb{R}}$, содержащий $0 \in M$ в своей внутренности называется **рефлексивным**, если **полярно двойственный** ему многогранник

$$P^* := \{y \in N_{\mathbb{R}} : \langle x, y \rangle \geq -1, \forall x \in P\}$$

также имеет только целые вершины.

Для целочисленных многогранников размерности 2 свойство рефлексивности равносильно свойству наличия ровно одной внутренней целой точки. Следующий пример показывает, что для целочисленных многогранников размерности 3 это уже не так.

Все рефлексивные многоугольники



Пример нереклексивного многогранника с $F(P) = 0$

Целочисленный многогранник P задаваемый неравенствами

$$x_1 \geq -1, x_2 \geq -1, x_3 \geq -1, \quad -2 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

имеет внутри себя ровно одну целую точку: $(0, 0, 0)$. Однако, P не является рефлексивным, поскольку ему полярно двойственный многогранник P имеет рациональную вершину: $(1/2, 1/2, 1/2)$. Заметим, что $F(P) = \{(0, 0, 0)\}$. Согласно критерию модели Калаби-Яу, невырожденная торическая гиперповерхность с многогранником Ньютона P бирациональна $K3$ -поверхности. В действительности, эту поверхность можно реализовать в виде гладкой кватрики в $\mathbb{P}^3$, содержащей точку с однородными координатами $(1 : 0 : 0 : 0)$, что видно из сдвига P на вектор $(1, 1, 1) \in \mathbb{Z}^3$:

$$P + (1, 1, 1) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad 1 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 4.$$

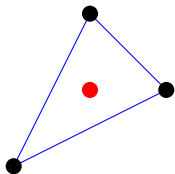
Мы получаем минимальную модель в виде замыкания аффинной торической гиперповерхности H в торическом многообразии $\mathbb{P}^3$.

Построение минимальных моделей в случае рефлексивных многогранников

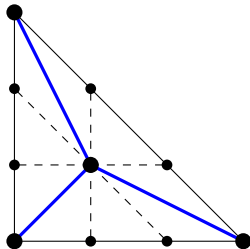
- На первом шаге рассматривается замыкание торической гиперповерхности H в горнштейновом торическом многообразии Фано V_P , определяемом нормальным веером Σ_P к рефлексивному многограннику P . В результате мы получаем **каноническую модель Калаби-Яу $\tilde{H}$** , имеющую, возможно, канонические особенности.
- На втором шаге применяется симплициальное подразбиение $\hat{\Sigma}$ веера Σ_P , которое удовлетворяет условию $\hat{\Sigma}[1] = P^* \cap (N \setminus \{0\})$. Этим мы совершаем частичное крепантное разрешение всех канонических особенностей многообразия V_P и получаем в результате симплициальное торическое многообразие $\hat{V}$ с терминальными особенностями. Замыкание $\hat{H}$ гиперповерхности H в торическом многообразии $\hat{V}$ является **минимальной моделью Калаби-Яу**, которая является гладкой, если $d \leq 4$.

Простейший пример

Двумерный рефлексивный многоугольник и его полярно двойственный:



$$F(P) \subset P$$

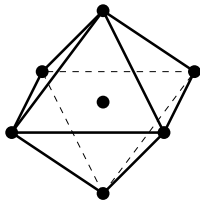


$$P^*, S_F(P)$$

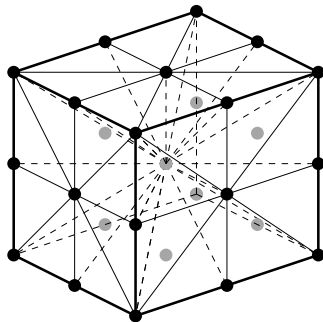
$$f(t) = t_1 + t_2 + (t_1 t_2)^{-1}$$

3-мерные рефлексивные многогранники

$$f(t) := t_1 + t_1^{-1} + t_2 + t_2^{-1} + t_3 + t_3^{-1}.$$



P



P^*

- Shihoko Ishii, *The minimal model theorem for divisors of toric varieties*, Tohoku Math. J. (1999), 213-226.

Теорема

Минимальная бирациональная модель невырожденной торической гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ задаваемая многочленом Лорана $f \in \mathbb{C}[M]$ с многогранником Ньютона P удовлетворяющим условию $F(P) \neq \emptyset$ всегда может быть построена через её замыкание в некотором симплициальном проективном торическом многообразии $\hat{V}$.

Носитель многогранника $F(P)$

Определение

Носителем внутренней Файна $F(P)$ называется подмножество

$$S_F(P) := \{\nu \in N : \text{Min}_{F(P)}(\nu) = \text{Min}_P(\nu) + 1\}.$$

- Только элементы $\nu \in N$ из подмножества $S_F(P)$ являются существенными в системе линейных неравенств, определяющих внутренность Файна $F(P)$.
- Подмножество $S_F(P)$ состоит из неразложимых элементов в максимальных конусах нормального веера Σ_P . По этой причине множество $S_F(P)$ конечно.
- минимальная модель $\hat{H}$ невырожденной аффинной гиперповерхности H получается взятием её замыкания в симплициальном торическом многообразии $\hat{V}$, соответствующем вееру $\hat{\Sigma}$, одномерные конуса которого состоят из лучей порождённых элементами $S_F(P)$, то есть $\hat{\Sigma}[1] = S_F(P)$.

Каноническая оболочка многогранника P

Определение

Пусть P - целочисленный многогранник, удовлетворяющий условию $F(P) \neq \emptyset$. Назовём **канонической оболочкой многогранника P** выпуклый многогранник $C(P)$, определяемый неравенствами,

$$C(P) := \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, \nu \rangle \geq \text{Min}_P(\nu) \quad \forall \nu \in S_F(P)\}.$$

- $C(P)$ является в общем случае рациональным многогранником, содержащим P .
- Если $\dim P = 2$, имеет место равенство $P = C(P)$. Равенство $P = C(P)$ также выполнено, если P является рефлексивным. Однако, в общем случае многогранник $C(P)$ может оказаться строго больше, чем P .

Теорема (Общий случай $F(P) = \{0\}$)

Для многогранника Ньютона P с условием $F(P) = \{0\}$ нормальный веер $\tilde{\Sigma}$ к многограннику $C(P)$ определяет некоторое $\mathbb{Q}$ -горенштейново торическое многообразие F_{ano} , имеющее по меньшей мере канонические особенности. Имеет место включение $\tilde{\Sigma}[1] \subset S_F(P)$. Выбор максимального проективного симплициального подразбиения $\hat{\Sigma}$ веера $\tilde{\Sigma}$, удовлетворяющего условию $\hat{\Sigma}[1] = S_F(P)$, определяет крепантный морфизм соответствующих торических многообразий $\varphi : \hat{V} \rightarrow \tilde{V}$. Торическое симплициальное многообразие $\tilde{V}$ имеет по меньшей мере $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, а замыкание $\hat{H}$ торической гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ в симплициальном торическом многообразии $\hat{V}$ является **минимальной бирациональной моделью** гиперповерхности H .

Квинтики с одной особой cDV -точкой типа A_1

Пример 1.

Рассмотрим невырожденные торические гиперповерхности H задаваемые нулями многочленов с многогранником Ньютона

$$P := \{x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4), 2 \leq \sum_{i=1}^4 x_i \leq 5\}.$$

Замыкания $\overline{H}$ этих гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$ являются особыми квинтиками имеющими одну терминальную особенность, аналитически эквивалентной квадратичной особенности с уравнением $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$. В этом случае в качестве канонической оболочки получаем рефлексивный многогранник

$$C(P) := \{x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4), \sum_{i=1}^4 x_i \leq 5\}.$$

Квинтики с одной особой cDV -точкой типа A_2

Пример 2.

Рассмотрим невырожденные торические гиперповерхности H задаваемые нулями многочленов с многогранником Ньютона

$$P := \{x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4), \ 6 \leq 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4, \ \sum_{i=1}^4 x_i \leq 5\}.$$

Замыкания $\overline{H}$ этих гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$ также являются особыми квинтиками имеющими одну терминальную особенность, аналитически эквивалентной квадратичной особенности с уравнением $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^3 = 0$. В этом случае в качестве $C(P)$ снова получаем рефлексивный многогранник

$$C(P) := \{x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4), \ \sum_{i=1}^4 x_i \leq 5\}.$$

Рефлексивность канонической оболочки $C(P)$

Ключевым комбинаторным утверждением, позволяющим глобально сглаживать минимальные бирациональные модели невырожденных торических гиперповерхностей в классе Калаби-Яу, является следующая теорема:

Основная теорема

Пусть P целочисленный многогранник размерности не более 4, удовлетворяющий критерию Калаби-Яу: $F(P) = \{0\}$. Тогда его каноническая оболочка $C(P)$ всегда является рефлексивным многогранником. Ему двойственный равен $\text{Conv}(S_F(P))$.

Замечание

Утверждение последней теоремы в общем случае является неверным, если P имеет размерность больше 4. Пример: $P := \text{Conv}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, -e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - 2e_5)$ обладает свойством $F(P) = \{0\}$, а его каноническая оболочка $C(P)$ имеет рациональную вершину и, следовательно, не является рефлексивным многогранником.

Глобальное сглаживание классов Калаби-Яу в размерности 3

Пусть P - 4-мерный целочисленный многогранник с условием $F(P) = \{0\}$. По основной теореме, $C(P)$ - рефлексивный многогранник. Мы имеем также совпадение носителей $S_F(P) = S_F(C(P))$. Вложение $P \hookrightarrow C(P)$ интерпретирует многочлен Лорана f как элемент линейной подсистемы антиканонической линейной системы на многообразии Фано $V_{C(P)}$. Юобавляя точки решётки $m \in C(P) \cap M$, мы получим из f невырожденный элемент f' из полной антиканонической линейной системы на $V_{C(P)}$. Осталось отметить, что максимальное крепантное разрешение особенностей $V_{C(P)}$ индуцирует полную крепантную десингуляризацию гиперповерхности $\overline{H'}$ и даёт гладкое многообразие Калаби-Яу $\widehat{H'}$ посредством плоской деформации минимального многообразия Калаби-Яу $\widehat{H}$, задаваемого исходным многочленом Лорана f . Поскольку торическое многообразие $\widehat{V_{C(P)}}$ используется одновременно для проективного замыкания аффинных гиперповерхностей H и H' , группы Пикара многообразий Калаби-Яу $\widehat{H}$ и $\widehat{H'}$ получаются равными.

Спасибо за внимание!