

# НИКОЛАЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЕФИМОВ – математик, педагог, человек

И.Х. Сабитов  
(МГУ им. М.В. Ломоносова, isabitov@mail.ru)

Общероссийский семинар по истории математики при  
ПОМИ

05.12.2024 г.

# План доклада

- 1 Общие сведения о биографии Николая Владимировича
- 2 Путь в геометрию «в целом»
- 3 Н.В. Ефимов и этика в науке
- 4 Звездные достижения Николая Владимировича
- 5 Педагогическая и общественная деятельность Николая Владимировича

# 1. Знакомство с Н.В. Ефимовым

Сначала хочу рассказать, как я познакомился с Николаем Владимировичем. Это случилось в июле 1961 г. в Ленинграде на IV Всесоюзном математическом съезде (который оказался и последним). Я приехал в Ленинград на съезд по своей инициативе, просто к своим хорошим знакомым. К тому времени я работал уже два года ассистентом Таджикского госуниверситета, где был оставлен по распределению после окончания ТГУ в 1959 г. И как раз в год моего окончания ТГУ вышла монография И.Н. Векуа «Обобщенные аналитические функции», в которой, наряду с самой теорией этих функций и соответствующих краевых задач, были даны приложения этой теории к вопросам бесконечно малых (б.м.) изгибаний. Эти результаты И.Н. Векуа, а также его ученика Боярского я знал уже по их статьям, так как на 4-м курсе я выполнил две курсовые работы – одну по краевым задачам теории функций, другую – по б.м. изгибаниям поверхностей. После ТГУ я продолжил заниматься в обоих направлениях и, соответственно, к началу съезда у меня были два результата, один по краевым задачам, другой – по геометрии.

О результате по краевым задачам я рассказал на Всесоюзной конференции по теории функций, состоявшейся в Ереване в сентябре 1960 г., где познакомился с Ф.Д. Гаховым. Выслушав мое сообщение, он сначала сказал, что «такого не может быть», но впоследствии, получив письменный вариант работы, дал на нее положительный отзыв, и статья была опубликована в Докладах АН Таджикистана. В моих планах было поступление к нему в аспирантуру Ростовского университета. Однако, встретив меня на съезде, Федор Дмитриевич сказал мне, чтобы я пока не подавал заявления в аспирантуру РГУ, и что он сообщит, когда и куда писать такое заявление. Но у меня было трудное положение в ТГУ: хотя после двух лет работы по распределению я и имел право поступления в аспирантуру, меня не хотели отпускать и настаивали, чтобы я учился в аспирантуре заочно. С большим трудом, пользуясь счастливым случаем, мне удалось получить необходимые для поступления в аспирантуру документы, и мне вовсе не улыбалось снова возвращаться в Душанбе, а затем попытаться уехать куда-либо после начала нового учебного года. Что делать?

До встречи с Ф.Д. я успел побывать на съезде на заседаниях секции геометрии и там увидал первый раз в жизни знаменитых геометров, имена и работы которых мне были известны по их книгам и статьям – А.Д. Александрова, Н.В. Ефимова, А.В. Погорелова и других. На одном из заседаний секции председательствовал Н.В., и темы докладов соответствовали моим исследованиям. В перерыве я подошел к нему, представился и попросил разрешения выступить вне программы с 15-минутным сообщением о своем результате. Н.В. спросил, в чем состоит мой результат, а он заключался в довольно широком обобщении одной теоремы Богдана В. Боярского, приведенной в упомянутой выше монографии И.Н. Векуа, впрочем, опубликованной и ранее в Успехах. Имя Боярского было, конечно, знакомо Николаю Владимировичу, потому что у них была совместная статья, тоже опубликованная в УМН. По-видимому, услышав знакомое имя и зная Боярского как серьёзного математика, он сразу же дал согласие на мой доклад и в конце заседания предоставил мне слово.

И вот, через день или два после этого, я стоял в каком-то фойе, думая о ситуации, в которую неожиданно и загадочно поставил меня Гахов, и тут, случайно увидев проходящего мимо меня Н.В., внезапно решил подойти к нему и попроситься поступить к нему в аспирантуру. Он был один, узнал меня, и к моему удивлению и радости, не стал расспрашивать никаких подробностей, а только сказал "Да-да, я согласен, как раз нам надо развивать отношения с Казанским университетом". Он, конечно, догадался по моему акценту, что я татарин, но, по-видимому, или забыл, или не обратил внимания, что я не из Казани, а из Душанбе. Я не стал ему объяснять, что я не имею никакого отношения к Казанскому университету (кстати, не из какой-нибудь «хитрости», а просто растерялся и не совсем понял, причем здесь Казань, где я ни разу до того не был), а быстренько спросил, когда и что мне надо делать для подачи документов в аспирантуру МГУ. Он мне все подробно объяснил, и вот так судьба мне улыбнулась, и я поступил в МГУ в аспирантуру к Николаю Владимировичу.

## 2. Из биографии Николая Владимировича

Теперь я предложу Вашему вниманию более или менее связный текст по биографии Н.В., для которого частично воспользуюсь ранее опубликованными работами, особенно из книг [1], [2] и [3].

Николай Владимирович Ефимов, один из крупнейших геометров прошлого века, член-корреспондент АН СССР, родился 31 мая 1910 г. в Оренбурге. Его отец, Владимир Ильич Ефимов, 1874 года рождения, выходец из деревни Рязанской губернии, работал в то время инкассатором финансовых учреждений, расположенных вдоль железной дороги Оренбург-Ташкент. В последние годы перед кончиной в 1947 г. в Москве он работал кладовщиком в тресте Минералруд. Мать, Екатерина Васильевна, урожденная Гончарова, родилась в 1888 в Воронеже, была домохозяйкой. Но брак родителей Коли распался рано, мать вышла замуж за другого, и маленькому Коле пришлось жить большей частью у бабушки в Ташкенте. (К сожалению, нам неизвестно ничего о родителях Е.В. и об их социальном положении. У меня есть предположение, что она могла быть из дворян). Скончалась Елена Васильевна в 1960 г. в г. Шахты Ростовской области.).

Жизнь в смутное время войн и революций была трудная, никто образованием Коли не занимался, но смысленный мальчик сам захотел учиться, раздобыл учебники и научился читать и даже сообразил, как зарабатывать на мелкие расходы. Николай Владимирович рассказывал мне, что он лепил свистульки из глины или вырезал их из тонких веток ивы, шел на рынок и увидев какого-нибудь маленького мальчика с мамой, начинал свистеть перед ним, показывая разные варианты своих игрушек. Мальчик, конечно, сразу просил маму купить ему свистульку. Можно дополнить этот сюжет следующим рассказом Алексея Мельникова, внука Н.В. «Из того, что дедушка вспоминал про детство и молодость: отец их рано бросил и им не интересовался. Воспитывали его сначала дед и бабушка. Погибли в голод гражданской войны. Его спасала от голода дворняжка по кличке Забава: приносила ему в пасти яйца. Потом его нашла мать.»



К концу гражданской войны, в 1920 году, мать с отчимом переехали в город Новочеркасск и там десятилетний Коля сразу пошел в 4-й класс. После окончания в 1927 году средней школы молодому Ефимову хотелось учиться дальше, но как сыну служащего ему пришлось сначала пойти работать на производстве для получения рабочего стажа. Его взяли строительным рабочим на железнодорожном депо на станции Каменоломня, а затем он перешел на работу слесарем на завод «Красный Аксай».

Здесь хочу вспомнить одну историю, характеризующую уважительное отношение Николая Владимировича к физическому труду.

На 70-летнем юбилее Н.В., отмечавшемся у него дома в кругу друзей и учеников, я произнес тост, в котором хотел отметить необыкновенное трудолюбие юбиляра, особенно поражающего тех, кто читал и изучал его толстенную книгу «Высшая геометрия», для чего я использовал известный из биографии Александра Дюма-отца случай, когда он, выступая на одном из рабочих митингов, поднял вверх свои руки и воскликнул: «Руки, написавшие 500 томов книг, это руки рабочего!» Николаю Владимировичу, по-видимому, понравилось это сравнение, и он сказал: «Спасибо, я люблю, когда меня называют рабочим!»

Таким образом получив нужные документы о рабочем стаже и о соответствующем социальном положении, Николай Владимирович в 1928 году поступил на Педагогический факультет Северо-Кавказского (впоследствии Ростовского, а ныне Южного федерального) государственного университета. Там первым его учителем был известный геометр Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской, который и направил научные интересы студента Ефимова в геометрию. Я могу подтвердить, что Николай Владимирович, как человек благородный, на всю жизнь сохранил теплое отношение к своему учителю и любил рассказывать всякие связанные с ним забавные истории. Вот одна из историй. Мордухай-Болтовской придумал однажды какой-то специальный класс многогранников, составил полный их список и попросил лаборанта-мастера изготовить из дерева модели этих многогранников, описав ему все необходимые параметры. Мастер смело взялся за дело, предварительно подкрепив себя хорошей дозой, известно, чего. В раже творчества, не особенно заглядывая в «ГОСТ» Мордухая-Болтовского, он сделал даже больше моделей, чем требовалось, но оказалось, все они из нужного класса, и так он помог Д.Д. пополнить его список.



Осенью 1931 г. в Ростов приехала комиссия из МГУ с целью отбора для аспирантуры МГУ талантливых студентов. Кандидатура Ефимова подошла по всем параметрам и 19 октября 1931 г. он был направлен в МГУ для прохождения аспирантуры. В январе 1932 г. Николай Владимирович написал заявление в свой родной институт с просьбой дать ему диплом об окончании пединститута (к тому времени Северо-Кавказский университет был преобразован в Северо-Кавказский Государственный Индустриально-Педагогический Институт). С этим дипломом произошла непонятная история. Елена Николаевна, дочь Николая Владимировича, писала: «Я помню, папа ужасно боялся заполнения всяческих анкет. Даже для баллотировки в члены-корреспонденты АН СССР его пришлось долго уговаривать заполнить нужную анкету. Он говорил, вот у меня нет диплома и как только это откроется, меня в любую минуту могут выгнать с работы.»

В то же время в фондах архива СКГПИ на заявлении Н.В. о выдаче диплома стоит отметка «Заявление удовлетворено» и в делах архива есть копия Свидетельства об окончании им полного курса Физико-математической Секции Физико-Технического Отделения с присвоением ему «квалификации преподавателя физико-математических наук рабочих факультетов, техникумов, ФЗУ и приравненных к ним учебных заведений». Может быть, он потерял диплом, а, может, считал свое свидетельство об образовании не соответствующим настоящему диплому о высшем образовании. Есть и вариант, что в архиве хранится не копия, а сам оригинал, его одна служба изготовила, а другая служба не отправила по адресу, как это часто у нас бывает (но против этого варианта говорит отсутствие подписей на сохранившемся экземпляре Свидетельства). Впоследствии Николай Владимирович в своих автографиях неоднократно писал, что у него есть и письменные подтверждения от сокурсников о его учебе в СКГПИ. Во всяком случае, специалисты по истории математики считают, что вопрос о подлинности его диплома о высшем образовании закрыт.

В МГУ Николай Владимирович активно включается в работу семинара В.Ф. Кагана и под руководством Я.С. Дубнова очень быстро подготавливает и защищает кандидатскую диссертацию по теории сетей, которая тогда была в центре внимания работы этого семинара. Кстати, он был первым математиком, получившим диплом кандидата наук по новым правилам, введенным в 1934 г.

В те же годы в МГУ началась и его педагогическая деятельность. После окончания аспирантуры он с 1934 по 1941 год работал в Воронежском университете, дойдя там до должности проректора. В то же время он сумел подготовить и защитить в МГУ в 1940 г. докторскую диссертацию.

Когда началась война, Николай Владимирович, как проректор, провел очень большую работу по организации эвакуации университета на восток. Он отправил семью в эвакуацию, а сам записался добровольцем в Красную Армию.

О дальнейшей его службе в армии есть две легенды. Сначала приведем описание этой истории его дочерью Еленой.

«Но так как папа уже был доктором наук и профессором, направлять его в действующую армию не стали, а отправили курсантом в Школу авиационных техников где-то в районе Казани или Иваново. Поехал он туда вместе с профессором Фабрикантом. Прибыли они на место назначения, устроились и папа вышел во двор покурить. В то же время вошел во двор начальник этого училища, известный ученый, математик или механик, увидев Ефимова, он радостно кинулся к нему со словами: «Замечательно, Николай Владимирович, Вы здесь, а я голову ломаю, кто будет читать геометрию». А Николай Владимирович в ответ: «Это мне не по чину. Мы с профессором Фабрикантом тут ученики». «Ах, ученики. Следуйте за мной». Привел Ефимова в свой кабинет. Вызвал туда же Фабриканта. Разругал их за дурацкое поведение, сказал, что он этого не допустит. Куда-то позвонил и с кем-то договаривался. Они были направлены в Ташкент, куда был эвакуирован Воронежский Авиатехнический Институт.»

Другое описание этого события не менее интересно. Александра Михайловна Мелёшина, доцент Воронежского университета, в своей книге воспоминаний «Военные записки штатского человека»<sup>1</sup> пишет «Рассказывали о нашем молодом доценте Н.В. Ефимове. Еще в Воронеже, когда формировался Воронежский полк, Николай Владимирович записался в него добровольцем. Новобранцев построили и стали выкрикивать: «Кто имеет образование 4 класса – два шага вперед!»... «Кто имеет образование 7 классов» и т.д. Добрались до 10-го класса, а Н.В. все стоит на уровне строя. «А у тебя какое образование? » недоуменно спрашивает командир. Ефимов смущенно отвечает: «Высшее». Когда выяснили, что он доцент АИ, приказали немедленно убираться и приступить к преподавательской работе.»

Конечно, более правдоподобным является рассказ дочери, хотя бы потому, что она слышала его сама от отца, причем, как она говорит, много раз, но второй рассказ фольклорного типа не менее важен, как свидетельство интереса людей к личности Николая Владимировича и как свидетельство народного уважения к образованному человеку.»

<sup>1</sup>Издательство Воронежского государственного университета, 2005. «≡» ≡ ↺ ↻ ↶ ↷



Через некоторое время, в ноябре 1941 г., Н.В. был отозван из армии и назначен зав.кафедрой теоретической механики в Воронежском авиационном институте, эвакуированном в то время в Ташкент. По приезде в новое место работы он вызвал туда свою жену Розу Яковлевну Берри, находившуюся тогда по эвакуации в Алма-Ате. В Ташкенте в 1942 г. у них родилась дочь Елена.

К сожалению, о ташкентском времени жизни Н.В. известно очень мало. Здесь можно упомянуть только о том, что его пребывание в Ташкенте сыграло весьма положительную роль в математической судьбе Владимира Григорьевича Болтянского. А связь Алма-Атинскими геометрами привела его к знакомству со студентом КазГУ Эдуардом Генриховичем Позняком, ставшем впоследствии его первым учеником.

В Ташкенте он написал свою самую «толстую» книгу «Высшая геометрия». Когда ему говорили, что же ты занимаешься бесполезной работой, ведь все издательства закрыты, он отвечал «Вот война кончится и издательства откроют, ни у кого нет готовой работы, а у меня будет книга, готовая к изданию» (так и получилось — «Высшая геометрия» вышла первым изданием в 1945 г.).



С 1943 г. начинается новый большой период жизни и творчества Николая Владимировича, богатый и насыщенный и по содержанию, и по результатам. В том году он был приглашен заведовать кафедрой высшей математики во вновь образованном Московском лесотехническом институте (МЛТИ, г. Мытищи).

Честной напряженной работой, благожелательным и внимательным отношением к студентам и коллегам, высоким профессионализмом специалиста Николай Владимирович быстро завоевал глубокое уважение и в студенческой среде, и в педагогическом коллективе института.

В эти же годы он активно работал в редакции журнала «Успехи математических наук», по существу был одним из выпускающих редакторов журнала (редколлегия состояла всего из нескольких человек). При такой загруженности он успевал заниматься и общественной работой. В начале 50-х годов он трижды избирался депутатом горсовета Мытищинского района.



Одновременно с работой в МЛТИ Николай Владимирович с 1946 г. стал работать профессором физического факультета МГУ, а затем с 1956 г. до своей кончины в августе 1982 г. был заведующим кафедрой математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. В МЛТИ он продолжал работать по совместительству с 1957 г. по 1961 год, оставаясь заведующим кафедрой до 1960 года. После 1961 года он еще год оставался членом ряда Советов института и ездил туда на различные заседания, уже не получая зарплату. Но когда в 1962 г. его выбрали деканом механико-математического факультета МГУ, тогда он формально окончательно ушел из МЛТИ, но, конечно, сохранил со многими коллегами личные дружеские отношения.

С 1962-го по 1969 год Николай Владимирович был деканом мехмата МГУ и эти годы многими считаются временем расцвета факультета, его золотым веком. Многие нынешние крупные математики и механики учились тогда на мехмате как студенты и аспиранты или только начинали свою научную и педагогическую деятельность. Николай Владимирович сумел добиться, чтобы каждый год можно было оставлять на факультете по распределению лучших выпускников аспирантуры. Приток талантливой молодежи имел своим следствием резкое повышение на факультете уровня научной работы и расширение тематики исследований: стали читаться десятки новых спецкурсов, молодыми сотрудниками факультета каждый год защищалось несколько докторских диссертаций, увеличился и омолодился педагогический состав практически каждой кафедры, открылись новые кафедры. Я поступил в аспирантуру мехмата в 1961 году и могу засвидетельствовать, что десятки моих знакомых по аспирантуре в той или иной форме остались связанными с мехматом.

Очень активно работало Московское математическое общество (кстати, Николай Владимирович был членом Правления ММО и заведовал там секцией ВТУзов). На заседаниях ММО в аудитории 16-24 (а иногда в 16-10) присутствовала масса участников, бывали случаи, когда пришедшие на заседание заполняли всю аудиторию и даже сидели на ступеньках боковых лестниц и на подоконниках на самом верху. ММО ежегодно присуждало премию молодым математикам возраста не старше 30 лет, и присуждение этой премии было обсуждаемым и знаменательным событием в математическом сообществе. Все лица из списка тогдашних лауреатов ММО впоследствии стали известными учеными, самые выдающиеся были избраны в академики у нас и в зарубежных странах, многие получили разные престижные международные награды и звания.

В эти же годы расширились международные связи, при активном участии мехматских сотрудников появился новый журнал «Математика» с переводами наиболее интересных статей из зарубежных журналов, в МГУ приезжали известные математики, наших ученых стали приглашать в зарубежные университеты. Николай Владимирович понимал, что без общения с иностранными учеными и без своевременного знакомства с их результатами мы рискуем упустить усвоение и развитие новых направлений в науке, поэтому он старался расширить международные контакты мехмата. При его активном участии в Москве в 1966 году на базе мехмата был проведен очередной XV Международный конгресс математиков, где он сам, кстати, выступил с пленарным докладом по приглашению. Как писал С.С. Демидов, «замечательная организация этого конгресса, ставшего триумфом советской математической школы, закрепившим за ней одно из ведущих мест в мировой математике второй половины XX века, во многом заслуга Николая Владимировича, одно из проявлений его административного гения.» Без преувеличения можно сказать, что таким образом в годы деканства Николая Владимировича мехмат МГУ стал одним из ведущих математических центров мира.



### 3. Что такое геометрия в целом?

После защиты Николаем Владимировичем кандидатской диссертации решающее влияние на выбор им дальнейшей тематики своих научных исследований имела его встреча с эмигрировавшим в 1934 г. в СССР немецким геометром Стефан Эммануэлович Кон-Фоссеном. По воспоминаниям самого Николая Владимировича, встреча была всего один раз, когда Кон-Фоссен приезжал из Ленинграда в Москву (по-видимому, в связи с публикацией известной его большой статьи в УМН) незадолго до своей ранней кончины, но все же Николай Владимирович за полтора часа беседы успел ознакомиться с проблематикой той области геометрии, которая у нас стала называться «геометрия в целом». Хотя С.Э. Кон-Фоссен не был прямым учеником Гильберта, но тесно с ним сотрудничал, поэтому можно сказать, что расцветшая потом в СССР геометрия «в целом» уходит своими корнями через Кон-Фоссена к Гильберту, а через Б.Н. Делоне — к Вороному и Минковскому.

Уже в 1939-40 г.г. Николай Владимирович получает свой первый выдающийся результат, открыв явление неизгибаемости «в малом» — он доказал, что на аналитической поверхности почти для всякой точки уплощения ее сколь угодно малая окрестность может не допускать изгибаний и даже бесконечно малых (б.м.) изгибаний в аналитическом классе деформаций. Для оценки научного успеха Николая Владимировича следует иметь в виду, что в этой тематике он выступал в роли «догоняющего», так как в 1937–38 годах в Германии уже были публикации Хопфа и Шильта, посвященные близким вопросам. Эти результаты Николая Владимировича составили содержание его докторской диссертации, защищенной им в МГУ в 1940 г., и были опубликованы в 1948 г. отдельным томом в трудах Математического института им. Стеклова. В 1950 г. за этот цикл работ Николай Владимирович был удостоен Академией наук СССР премии им. Лобачевского.

Более детально, результаты Николая Владимировича об изгибаниях поверхности в окрестности точек уплощения состояли в следующем. Классики (Г. Дарбу, Е. Леви и др.) показали, что в окрестности точки, в которой аналитическая поверхность имеет со своей касательной плоскостью касание первого порядка, эта поверхность допускает аналитические по параметру изгиба в классе аналитических же поверхностей, так, что если есть две изометричные поверхности с такими условиями, то они локально *наложимы* одна на другую изгибанием (с возможным добавлением зеркального отражения), т.е. «в малом» понятия изометричности и наложимости изгибанием совпадают.

Вот здесь проявляется одна из ипостасей толкования термина «геометрия в целом» – рассматривать поверхность «в целом» не только в смысле компактного множества с или без границы, но и в смысле изучения свойства поверхности в окрестности *каждой* ее точки, не оставляя без внимания ни одной в каком-то смысле особой точки. Рассматривая окрестность точки уплощения, Ефимов установил: 1) для точек уплощения понятия изометрии и наложимости посредством изгиба<sup>2</sup> являются различными; 2) наличие точки уплощения в общем случае повышает сопротивляемость поверхности ее изгибаниям; 3) существуют аналитические поверхности с точкой уплощения, сколь угодно малая окрестность которой не допускает изгибаний в классе аналитических поверхностей, причем это возможно и для неаналитических по параметру деформаций; 4) в аналитическом классе в окрестности точки уплощения возможна и жесткость относительно аналитических б.м. изгибаний 1-го порядка.

---

<sup>2</sup>Мы под изгибанием *всегда* понимаем непрерывную деформацию поверхности с сохранением ее метрики.

## 4. Н.В. Ефимов и этика в науке

В связи с работами Николая Владимировича о локальной жесткости я хотел бы вспомнить об одном очень поучительном для меня разговоре с ним. На 3-м Всесоюзном симпозиуме по геометрии «в целом», в Петрозаводске в 1969 г., я сделал доклад о локальной жесткости одного класса поверхностей даже в классе деформаций минимально допустимой гладкости  $C^1$ . Я сформулировал теорему, не упомянув про историю вопроса, которую я, честно говоря, и не знал. После доклада Николай Владимирович подошел ко мне, поздравил с хорошим результатом (а я получил этот результат только перед симпозиумом и не успел рассказать о нем на его семинаре) и сказал, что у него ведь тоже есть теоремы о локальной жесткости, и упрекнул меня, что я не упомянул об этом. И чтобы объяснить свои слова, добавил: «Вы ведь прекрасно знаете, что мы, математики, не спим ночами, думаем о своих теоремах, за это нам не дают ничего, не добавляют зарплату, не снижают нагрузку, и единственная награда для нас, это когда в статьях или на конференциях упоминают наши результаты и ссылаются на них как на источник постановки задач или как на основу метода решения».

Я тогда и вправду не знал или не очень вникнул в важность и пионерскую сущность его первых исследований в этой области, но понял и принял его объяснение, и на всю жизнь запомнил его слова и теперь всегда стараюсь тщательно проследить, чтобы в каждой моей статье не пропустить ссылки на тех авторов, чьи работы как-то на меня повлияли – в математическом или психо-эмоциональном смысле. Уважайте и цените тех, кто вас вдохновляет! (Кстати, то, что Николай Владимирович на меня на самом деле нисколько не обиделся и уважительно оценил мой результат, проявилось в том, что когда он поехал в середине 70-х годов в Ростовский университет на юбилейные мероприятия, посвященные 100-летию со дня рождения Д.Д. Мордухай-Болтовского, и параллельно с этим прочитал там курс лекций по теории бесконечно малых изгибаний, он включил эту мою работу в свой курс как отдельную лекцию.) Теперь, конечно, отношение к цитированию первоисточников в научном, точнее, околонаучном, обществе сильно изменилось. Как сказал поэт, «Вот и все: смежили очи гении... Нету их – и все разрешено».

## 5. Звездные достижения Николая Владимировича

Следующий этап научного творчества Николая Владимировича связан с решением им труднейшей проблемы о невозможности существования в трехмерном пространстве регулярной полной поверхности с отделенной от нуля отрицательной гауссовой кривизной. Достаточно сказать, что эта задача восходит еще к Гильберту, доказавшему несуществование такой поверхности лишь при дополнительном условии постоянства ее кривизны, а возможностью ее обобщения на случай переменной отрицательной кривизны интересовались такие крупные математики, как Хольмгрен, Кон-Фоссен, С.Н. Бернштейн и другие. История решения Николаем Владимировичем этой задачи – пример упорства, целеустремленности и даже одержимости в стремлении достигнуть поставленной цели; психологически проблема состояла не только в объективной трудности самой задачи, но и в том, что на ее решение уходили драгоценные годы жизни, окончательного результата все не получалось, а рядом были другие задачи, которые можно было бы решать с почти 100% гарантией успеха.

Но после почти полутора десятка лет работы Николай Владимирович в 1963 г. все же доказал, что таких поверхностей нет, и его пленарный часовой доклад на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. вызвал огромный интерес геометров всего мира. По свидетельству П.С. Александрова, один из крупнейших геометров того времени Г. Хопф сопоставил эту теорему Ефимова с соответствующей теоремой Гильберта и квалифицировал ее как одно из значительнейших геометрических открытий нашего времени. С тех пор эта его теорема стала называться не иначе, как «знаменитая теорема Ефимова»; появились многочисленные ее модификации в  $\mathbb{R}^3$  и обобщения по размерности, а само доказательство теоремы было переизложено с некоторыми упрощениями в специальной большой статье американского математика Тиллы Клотц-Милнор, переведенной потом в УМН. Заслуженной оценкой этого выдающегося достижения Николая Владимировича было присуждение ему в 1966 г. Ленинской премии.



Примененные Николаем Владимировичем методы оказались настолько сильными и содержательными, что с их помощью ему удалось дать еще более глубокое описание свойств полных поверхностей отрицательной кривизны  $K$ ; в частности, он показал, что на них обязательно  $\sup |\operatorname{grad} k| = +\infty$ , где  $-k^2 = 1/K$ . Все эти результаты являются предельно точными, что подтверждается примерами. Например, для метрики  $ds^2 = dx^2 + B^2(x)dy^2$ ,  $B = (1 + x^2)^p$  при  $2p - 1 > 0$  можно добиться (за счет соответствующего выбора  $p$ ), чтобы  $\sup |\operatorname{grad} k|$  был сколь угодно большим, тем не менее изометрического погружения этой метрики в  $R^3$  нет в силу конечности верхней грани, а при  $2p - 1 = 0$  верхняя грань равна  $+\infty$  и погружение уже, оказывается, существует. Такая же точность имеет место и для обобщения теоремы Гильберта — она доказана Николаем Владимировичем для поверхностей класса гладкости  $C^2$ , а уже в классе  $C^{1,1}$  она не верна (для обоих случаев примеры построены его учеником Эмилем Ренольдовичем Розендорном).

Кроме того, эти же идеи позволили Николаю Владимировичу получить признаки непогружаемости в  $\mathbb{R}^3$  ряда областей, неполных относительно метрики отрицательной кривизны, в частности, в 1975 г. он доказал непогружаемость в  $\mathbb{R}^3$  полуплоскости Лобачевского. По пути к доказательству своей знаменитой теоремы Ефимов сначала исследовал ее частные случаи, а именно, он дал оценки размеров области  $D$  на плоскости  $(x, y)$ , над которой может существовать поверхность вида  $z = z(x, y)$  с отделенной от нуля отрицательной кривизной. Для этого он нашел новые методы исследования уравнения Монжа-Ампера гиперболического типа

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = (1 + z_x^2 + z_y^2)^2 \varphi(x, y) < 0$$

установив, что если область  $D$  – квадрат и  $\varphi \leq C < 0$ , то для длины стороны квадрата существует верхняя оценка, зависящая от  $|C|$ , в частности, если у поверхности кривизна  $K \leq -1$ , то длина стороны квадрата не больше 19, и тем самым он еще в 1953 г. доказал, что такая поверхность не может существовать над всей плоскостью (здесь он тоже опередил немецких геометров: двумя годами позже Е. Хайнц получил аналогичный результат для поверхностей над кругом).

Характерной чертой математического творчества Николая Владимировича было сочетание глубокой геометрической интуиции и умения использовать мощные методы математического анализа. Почти в каждой его работе по ходу получения конкретного геометрического утверждения фактически доказывалась какая-нибудь новая теорема математического анализа. Я вспоминаю, на последнем этапе доказательства своей знаменитой теоремы ему нужно было установить поведение некоторого ряда (не помню, была ли важна сходимость или расходимость этого ряда). Он получил то, что ему хотелось, но многих своих знакомых просил проверить, нет ли ошибки в его рассуждениях, а то, говорил он, может, я получу новый признак сходимости или расходимости ряда, а он окажется совершенно бесполезным в приложении. Можно сказать, что Николаю Владимировичу был более близок не алгебраический или синтетический, а аналитический подход к геометрии, восходящий еще к Монжу. Недаром, по свидетельству С.М. Никольского, А.Н. Колмогоров считал Ефимова одним из самых сильных аналитиков.

С точки зрения математической эстетики та теорема красива, которая имеет краткую формулировку и справедлива при минимальных ограничениях на ее условия. Теорема Ефимова как раз и подходит под такое определение красивой теоремы: она короткая по формулировке и верна для поверхностей с минимальным классическим пониманием их регулярности на класс регулярности поверхности. Позже Николай Владимирович нашел и другие признаки несуществования полных поверхностей отрицательной кривизны уже без условия отделенности от нуля кривизны метрики, а именно, если допустить, что существует полная поверхность отрицательной кривизны, тогда ее кривизна должна стремиться к нулю достаточно быстро, т.е. если кривизна полной метрики отрицательна и не стремится к нулю достаточно быстро, тогда поверхности с такой метрикой не существует. Этот признак невозможности существования полной поверхности с отрицательной кривизной принадлежит полностью Ефимову, так как он предложен и доказан им независимо от каких-либо источников. Его можно считать и новым доказательством обобщения теоремы Гильберта, так как при условии отделенности отрицательной кривизны от нуля кривизна вообще не стремится к нулю.

Наконец, в бесконечномерном анализе Ефимову совместно с Сергеем Борисовичем Стечкиным принадлежит цикл работ, посвященный введенным ими так называемым чебышевским множествам в банаховых пространствах. Введенные в этих работах понятия и полученные результаты послужили основой многочисленных их приложений в теории приближений и в геометрии бесконечномерных пространств. В творчестве Н.В. его совместная с С.Б. деятельность стоит особняком в том смысле, что все другие его работы относятся к поверхностям в трехмерном пространстве. В связи с этим я вспоминаю, как я однажды передал Н.В. слова С.Б. Стечкина «настоящая геометрия должна быть  $n$ -мерной». На это Н.В. сказал мне следующее: «Мы живем в трехмерном пространстве, и пока на Земле есть разумные существа, они будут интересоваться трехмерной геометрией». Таким образом, можно сказать, что практически ни одна научная тропа Николая Владимировича не заросла травой забвения — все его работы нашли многочисленных продолжателей и у нас, и за рубежом, в чем мы убедились по многим докладам на Международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», с успехом прошедшей в 2010 году в Москве.

## 6. Педагогическая и общественная деятельность Николая Владимировича

Николай Владимирович был основателем семинара по геометрии «в целом», который продолжал работать в МГУ вплоть до последнего времени. В каком-то смысле семинар был его воистину второй семьей. Дело в том, что у Николая Владимировича долго не было постоянных учеников, которые оставались бы с ним вместе и были бы его помощниками. Учеников воронежского и ташкентского периода забрала у него война, они все исчезли в пучине войны и в тяготах послевоенной разрухи. В МЛТИ с ним были сильные, но уже состоявшиеся, как математики, коллеги, а среди студентов лесоведов и лесотехников он, конечно, не мог найти учеников для математических исследований. Украшением и гордостью его был А.В. Погорелов, официально бывший его аспирантом-заочником в МГУ в первые послевоенные годы. Тему для научных занятий Алексею Васильевичу давал А.Д. Александров, а постоянным его консультантом и заботливым руководителем был Николай Владимирович.

Сам Алексей Васильевич называл А.Д. «мой дорогой учитель», а Н.В. он называл «мой любимый учитель». С началом работы в МГУ у Николая Владимировича появился первый ученик в МГУ — Эдуард Генрихович Позняк. Сам Э.Г. вспоминал, что где-то в 1948 или 1949 году они решили организовать семинар, в первую очередь не для выступлений со своими результатами, а для изучения того, что сделано. Их было двое, и они по очереди каждую неделю делали друг другу реферативные сообщения о новых работах. Постепенно семинар разросся. Семинаром, совместно с Николаем Владимировичем руководили в разные годы И.Н. Векуа и Э.Г. Позняк. Семинар был одним из признанных центров геометрических исследований в СССР и выступить на нем с докладом молодым геометрам считалось большой честью. Для студентов и аспирантов, участников семинара, не было и вопроса о том, что его заседания можно пропустить, мы ходили туда как на большое и важное событие, потому что каждый раз на нем узнавали от Николая Владимировича что-то ценное в математическом плане, часто слышали и какой-нибудь остроумный анекдот, а если повезет и задашь докладчику хороший вопрос или сделаешь умное замечание, то удавалось получить и публичную похвалу.





На семинар часто приезжали докладчики из многих городов СССР, были и зарубежные геометры. Из числа участников семинара вышло более 10 докторов и около 20 кандидатов наук. Особо следует отметить, что в тематике семинара важное место занимали вопросы приложений геометрии в теоретической физике, что обеспечивалось участием в нем учеников и коллег Э.Г. Позняка, работавшего на кафедре высшей математики физического факультета МГУ. Одно время семинар даже назывался межфакультетским.

Многочисленные ученики Николая Владимировича живут и работают во многих регионах России и СНГ — в Украине, Казахстане, Узбекистане, Таджикистане. Это относится только к его прямым ученикам по научной деятельности. Если же иметь в виду тех геометров, которые выступали на его семинаре, и которым он помог конструктивной критикой и добрым советом, то таких можно найти, по-видимому, почти в каждом университете и педагогическом институте бывшего СССР.

На протяжении всей жизни научное творчество Николая Владимировича тесно переплеталось с его педагогической и учебно-воспитательной работой. Его учебники и учебные пособия «Высшая геометрия» (1945), «Краткий курс аналитической геометрии» (1950), «Квадратичные формы и матрицы» (1962), «Линейная алгебра и многомерная геометрия» (1970, совместно с Э.Р. Розендорном), «Введение в теорию внешних форм» (1973) отличаются высоким научным уровнем, мастерством изложения и методически удачным выбором содержания и расположения материала. При написании этих книг Николай Владимирович опирался на свой богатый опыт преподавания математики в университетах и технических вузах страны. О популярности его учебников свидетельствует тот факт, что они вышли общим тиражом около 2 млн. экземпляров, переизданы много раз, а некоторые из них переведены практически на все основные языки мира. В 1973 г. за учебник «Краткий курс аналитической геометрии» Николай Владимирович был награжден Золотой медалью ВДНХ. Некоторые его учебники переиздавались и много лет спустя после его кончины.

Значителен вклад Николая Владимировича в постановку математического образования в вузах и в целом по стране; он был председателем секции втузов Московского математического общества, членом секции математики, механики и астрономии Научно-технического Совета, а затем председателем секции университетов и педвузов Научно-методического Совета по математике при Минвузе СССР, много лет был председателем экспертной комиссии ВАК.

Авторитет Николая Владимировича как ученого проявился и в его активной редакционно-издательской деятельности. С 1946 года до конца жизни он был членом редколлегии журнала «Успехи математических наук»; особенно напряженной была его работа в этом журнале в первые послевоенные годы, а также в 1951–55 годы, когда он был заместителем главного редактора УМН. С 1961 по 1974 год он входил в редколлегию журнала «Математический сборник», активно участвовал в издании многотомной «Математической энциклопедии», много лет был членом редакционно-издательского совета Московского университета.

Математический и педагогический талант Николая Владимировича счастливо сочетался в нем с высокими человеческими качествами: благородный, щедрый, отзывчивый на человеческое внимание, необычайно скромный в жизни и лишенный всякого тщеславия, строго требовательный к себе, он был полон самого доброжелательного отношения к окружающим, всегда готовый поддержать другого в трудную минуту. Доброта была неотъемлемой чертой его человеческой сущности.

Подводя итог, с полным основанием можно сказать, что Николай Владимирович был одним из выдающихся геометров XX века. Он остался в истории математики как один из создателей геометрии «в целом», так как практически в каждом направлении исследований в этой науке есть его основополагающий вклад или в виде конкретных результатов и методов, или в виде публикаций установочного характера, не говоря уже о воодушевляющем влиянии его необыкновенно светлой личности на многих начинающих математиков. Будущие историки, несомненно, найдут еще время и возможность более полно оценить его вклад в развитие математики и математической культуры.

- [1] САБИТОВ И.Х. Краткий очерк жизни и творчества Николая Владимировича Ефимова (1910-1982) // М.: Макс-Пресс, 2010, 25 с.
- [2] ВСПОМИНАЕМ НИКОЛАЯ ВЛАДИМИРОВИЧА ЕФИМОВА...  
Реакторы-оставители В.М. Тихомиров, И.Х. Сабитов. М.: МЦНМО, 2014. -128 с.
- [3] САБИТОВ И.Х. Николай Владимирович Ефимов – ученый, педагог, человек. Москва: МАКС-Пресс, 2023 - 48 с.