Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 10. Монотонность квантовой относительной энтропии. Элементы теории ресурсов. Подалгебры без декогеренции

Теретёнков Александр Евгеньевич

12 ноября 2024 г.

В прошлой лекции...

Теорема. (Монотонность относительной энтропии) Если Φ — канал, а ρ, σ — матрицы плотности, то

$$S(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leqslant S(\rho||\sigma)$$

Квантовая относительная энтропия

Лемма 1.

1. $$S(\rho_1||\rho_2) = -\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}\ln(\rho_2\cdot\rho_1^{-1})\rho_1^{\frac{1}{2}}$$

2. $$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^{\infty}\operatorname{Tr}(\rho_2-\rho_1)(\rho_1\cdot+s\cdot\rho_2)^{-1}(\rho_2-\rho_1)\frac{ds}{(s+1)^2}$$

Доказательство:

2)

$$-\ln w = -(w-1) + \int_0^\infty \frac{(w-1)^2}{w+s}\frac{ds}{(s+1)^2}$$

Поэтому представим энтропию в виде:

$$S(\rho_1||\rho_2) = -\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_0^\infty \frac{ds}{(s+1)^2}\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} - I)(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} + sI)^{-1}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}}$$

Квантовая относительная энтропия

Начнём с первого члена

$$(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} = \rho_2 \rho_1^{-\frac{1}{2}} - \rho_1^{\frac{1}{2}} = (\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{Tr}(\rho_2 - \rho_1) = 1 - 1 = 0$$

Квантовая относительная энтропия

С учётом

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI = \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1) \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

подынтегральный член

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) \rho_1^{\frac{1}{2}} = \\
&= \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \quad \square
\end{aligned}$$

Неравенство Кэдисона

Говорят, что положительное отображение $\Phi^*(I) = I$ удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона (иногда, говорят удовлетворяет неравенству Шварца), если

$$\Phi^*(B^\dagger B) \geqslant \Phi^*(B^\dagger)\Phi^*(B), \qquad \forall B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Упражнение. Доказать, что это утверждение следует из 2-положительности, но строго сильнее положительности (то есть существуют положительные отображения, которые этом неравенству не удовлетворяют.)

$\frac{2k+1}{2}$ — положительные отображения

Если унитальное отображение $\Phi^* \otimes I_{k^2}$ удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона, то будем называть Φ $\frac{2k+1}{2}$-***положительным (сохраняющем след) отображением***.

Утверждение.

$$1 \text{ - пол.} \supset \frac{1}{2} \text{ - пол.} \supset 2 \text{ - пол.} \supset \ldots \supset n \text{ - пол.} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ - пол.} = \text{ вполне}$$

- Chruściński, D. (2022). Dynamical maps beyond Markovian regime. Physics Reports, 992, 1-85. Section 4.5.

Квантовая относительная энтропия

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\operatorname{Tr} A^\dagger(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\operatorname{Tr} A^{\dagger}(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^{\dagger}](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Доказательство: Обозначим $B = (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A]$, $X = (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-\frac{1}{2}} A - (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{\frac{1}{2}} \Phi^*[B]$ и распишем очевидное равенство $\operatorname{Tr} X^{\dagger} X \geqslant 0$.

Квантовая относительная энтропия

$$\operatorname{Tr} X^\dagger X = \operatorname{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A - \operatorname{Tr} A^\dagger \Phi^*[B] -$$
$$- \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger] A + \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger] (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2) \Phi^*[B] \geqslant 0$$

С учётом

$$\operatorname{Tr} A^\dagger \Phi^*[B] + \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger] A = \operatorname{Tr} \Big((\Phi[A])^\dagger B + B^\dagger \Phi[A] \Big) =$$
$$= 2 \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A]$$

мы получаем

$$\operatorname{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] +$$
$$+ \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] - \operatorname{Tr} \Phi^*[B^\dagger] (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2) \Phi^*[B]$$

Квантовая относительная энтропия

Таким образом, осталось показать

$$\operatorname{Tr}\Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A] \geqslant \operatorname{Tr}\Phi^*[B^\dagger](\rho_1\cdot + s\cdot\rho_2)\Phi^*[B]$$

$$\operatorname{Tr}\Phi^*[B^\dagger](\rho_1\cdot + s\cdot\rho_2)\Phi^*[B] =$$

$$= \operatorname{Tr}(\Phi^*[B^\dagger]\rho_1\Phi^*[B] + s\Phi^*[B^\dagger]\Phi^*[B]\rho_2) =$$

$$= \operatorname{Tr}(\Phi^*[B]\Phi^*[B^\dagger]\rho_1 + s\Phi^*[B^\dagger]\Phi^*[B]\rho_2) \leqslant \text{/ Неравенство Кэдисона /}$$

$$\leqslant \operatorname{Tr}(\Phi^*[BB^\dagger]\rho_1 + s\Phi^*[B^\dagger B]\rho_2) =$$

$$= \operatorname{Tr}(BB^\dagger\Phi[\rho_1] + sB^\dagger B\Phi[\rho_2]) = \operatorname{Tr}B^\dagger(\Phi[\rho_1]B + sB\Phi[\rho_2]) =$$

$$= \operatorname{Tr}B^\dagger(\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])B = \backslash B = (\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A]\backslash =$$

$$= \operatorname{Tr}\Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1]\cdot + s\cdot\Phi[\rho_2])^{-1}\Phi[A] \quad \square$$

Доказательство (Теоремы): Так как

$$\frac{1}{(s+1)^2} > 0, s \in \mathbb{R}_+$$

то по леммам 1 и 2 (полагая $A = \rho_2 - \rho_1$)

$$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1}(\rho_2 - \rho_1)\frac{ds}{(s+1)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty \mathrm{Tr}(\Phi[\rho_2] - \Phi[\rho_1])(\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1}(\Phi[\rho_2] - \Phi[\rho_1])\frac{ds}{(s+1)^2} =$$

$$= S(\Phi[\rho_1]||\Phi[\rho_2]) \quad \square$$

Монотонность энтропии фон Неймана

Упражнение. Если Φ — бистохастический канал, ρ — матрица плотности, то

$$S(\Phi(\rho)) \geqslant S(\rho).$$

Квантовая относительная энтропия

Квантовые относительные энтропии Реньи

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = (\alpha - 1)^{-1} \ln \left(\mathrm{Tr}(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^\alpha \right)$$

В частности,

$$S_{\frac{1}{2}}(\rho||\sigma) = -2 \ln F(\rho, \sigma),$$

где

$$F(\rho, \sigma) = \left(\mathrm{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \right)^2$$

— фиделити.

Теорема. $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, Φ — канал

$$S_\alpha(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leqslant S_\alpha(\rho||\sigma)$$

- Frank, R. L., Lieb, E. H. (2013). Monotonicity of a relative Rényi entropy. Journal of Mathematical Physics, 54(12).

Каталитические температурные операции (Catalytic Thermal Operations)

Задан H_S

1. Свободные (бесплатные, free) состояния:

$$\tau_R^\beta \equiv \frac{1}{Z_R^\beta} e^{-\beta \hat{H}_R}, \qquad Z_R^\beta = \mathrm{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_R})$$

Катализатор:
Дополнительное конечно-мерное квантовое состояние ω_C системы с гамильтонианом $\hat{H}_C$, которое мы обязуемся вернуть в начальное состояние.

2. Свободные (бесплатные, free) операции:
Унитарные операторы U_{SRC} такие, что $[U_{SRC}, \hat{H}_{SRC}] = 0$, где $\hat{H}_{SRC} = \hat{H}_S + \hat{H}_C + \hat{H}_R$.

2. Свободные (бесплатные, free) операции:
Унитарные операторы U_{SRC} такие, что $[U_{SRC}, \hat{H}_{SRC}] = 0$, где $\hat{H}_{SRC} = \hat{H}_S + \hat{H}_C + \hat{H}_R$.
Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\text{Catalytic}}(\rho_S) \equiv \mathrm{Tr}_{RC}\left[U_{SRC}\left(\rho_S \otimes \tau_R^{\beta} \otimes \omega_C\right)U_{SRC}^{\dagger}\right]$$

такие, что

$$\mathrm{Tr}_{R}\left[U_{SRC}\left(\rho_S \otimes \tau_R^{\beta} \otimes \omega_C\right)U_{SRC}^{\dagger}\right] = \rho_S' \otimes \omega_C$$

Элементы теории ресурсов

3. Какими условиями монотонности характеризуется возможность перевести $\rho_S \to \rho'_S$ (то есть существование некоторого $\mathcal{E}_{\mathrm{Catalytic}}(\rho_S) = \rho'_S$)?

3. Какими условиями монотонности характеризуется возможность перевести $\rho_S \to \rho'_S$ (то есть существование некоторого $\mathcal{E}_{\text{Catalytic}}(\rho_S) = \rho'_S$)?

Необходимое условие $\rho_S \to \rho'_S$ посредством каталитических температурных операций

$$S_\alpha(\rho_S||\tau_S^\beta) \geqslant S_\alpha(\rho'_S||\tau_S^\beta)$$

- Ng N. H. Y., Woods M. P. Resource theory of quantum thermodynamics: Thermal operations and second laws //Thermodynamics in the quantum regime: Fundamental aspects and new directions. – Cham : Springer International Publishing, 2019. – P. 625-650.

Необходимое и достаточное условие для некогерентных матриц плотности и произвольной конечной точности

$\hat{H}_S$, ρ_S, ρ'_S такие, что $[\rho_S, \hat{H}_S] = [\rho'_S, \hat{H}_S] = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1) $S_\alpha(\rho_S || \tau_S^\beta) \geqslant S_\alpha(\rho'_S || \tau_S^\beta)$, $\forall \alpha \in (-\infty, \infty)$.
2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ каталитическая температурная операция $\rho_S \to {\rho'_S}^\varepsilon$, такие что $d(\rho'_S, \rho'^\varepsilon_S) \leqslant \varepsilon$,

где $d(\rho, \sigma)$ — следовое расстояние $d(\rho, \sigma) \equiv \operatorname{Tr} |\rho - \sigma|$, $S_\alpha(\rho || \sigma)$ — классические энтропии Реньи в энергетическом базисе, то есть $S_\alpha(\rho || \sigma) = S_\alpha(\operatorname{eig} \rho || \operatorname{eig} \sigma)$ и

$$S_\alpha(p||q) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\sum_i p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} \right), & \forall \alpha \geqslant 0 \\ \frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\sum_i p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} \right), & \forall \alpha < 0 \end{cases}$$

(в предельном смысле, когда не определены).

Подалгебры без декогеренции

Будем говорить, что $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$ — ***(матричная)*** $*$-***алгебра***, если

1. $\forall X, Y \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in \mathcal{A}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$
3. $\forall X \in \mathcal{A} \Rightarrow X^\dagger \in \mathcal{A}$

Подалгебры без декогеренции

Подалгебра без декогеренции $\mathcal{N}$ для однопараметрической вполнеположительной сохраняющей след полугруппы Φ_t — множество таких $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, что $\forall t \geqslant 0$

$$\Phi_t^*(X^\dagger X) = (\Phi_t^*(X))^\dagger \Phi_t^*(X)$$

и

$$\Phi_t^*(XX^\dagger) = \Phi_t^*(X)(\Phi_t^*(X))^\dagger$$

Подалгебры без декогеренции

Подалгебра без декогеренции $\mathcal{N}$ для однопараметрической вполнеположительной сохраняющей след полугруппы Φ_t — множество таких $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, что $\forall t \geqslant 0$

$$\Phi_t^*(X^\dagger X) = (\Phi_t^*(X))^\dagger \Phi_t^*(X)$$

и

$$\Phi_t^*(X X^\dagger) = \Phi_t^*(X)(\Phi_t^*(X))^\dagger$$

Замечание В отличие от общего случая неравенство Кэдисона

$$\Phi_t^*(X^\dagger X) \geqslant \Phi_t^*(X^\dagger)\Phi_t^*(X)$$

Подалгебры без декогеренции

Утверждение. Подалгебра без декогеренции

1. Инвариантна: $\Phi_t^*(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N} \ \forall t \geqslant 0$
2. $\forall t \geqslant 0$, $X \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathbb{C}^{n\times n} \Rightarrow \Phi_t^*(XY) = \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y)$, $\Phi_t^*(YX) = \Phi_t^*(Y)\Phi_t^*(X)$
3. Является $*$-алгеброй

Подалгебры без декогеренции

1) $X \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}\Phi_s^*((\Phi_t^*(X))^\dagger \Phi_t^*(X)) &= \Phi_s^*(\Phi_t^*(X^\dagger)\Phi_t^*(X)) \\ &= \Phi_s^*(\Phi_t^*(X^\dagger X)) = \Phi_{t+s}^*(X^\dagger X) \\ &= \Phi_{t+s}^*(X^\dagger)\Phi_{t+s}^*(X) = \Phi_s^*(\Phi_t^*(X^\dagger))\Phi_s^*(\Phi_t^*(X))\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\Phi_s^*(\Phi_t^*(X)(\Phi_t^*(X))^\dagger) = \Phi_s^*(\Phi_t^*(X))\Phi_s^*(\Phi_t^*(X^\dagger))$$

Таким образом, $\Phi_t^*(X) \in \mathcal{N}$

Подалгебры без декогеренции

2) Введём

$$d_t(X,Y) \equiv \Phi_t^*(X^\dagger Y) - \Phi_t^*(X^\dagger)\Phi_t^*(Y)$$

Неравенство Кэдисона

$$d_t(X,X) \geqslant 0, \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Для $X \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$d_t(zX+Y, zX+Y) = \overline{z}d_t(X,Y) + (\overline{z}d_t(X,Y))^\dagger + d_t(Y,Y) \geqslant 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Беря $z \to \pm\infty$ и $z \to \pm i\infty$, получим

$$d_t(X,Y) = 0$$

тогда $d_t(X^\dagger,Y) = 0$.