

Воротов Алексей
 Доклад на семинаре
 "Стохастика"
 17 февраля 2012 г.

Закон нуля или единицы в $\mathbb{Z}^d$ для модуля проекции на фиксированный вектор. Закон больших чисел.

Основные обозначения

Разные авторы обычно обозначают основные объекты, касающиеся случайных блужданий в случайной среде, немного по-разному. Поэтому, дабы не возникало путаницы, приведем обозначения, которых мы будем придерживаться.

Ω обозначает множество сред, отдельную среду обычно будем обозначать ω .

Случайное блуждание обозначаем (X_n) .

P_ω^x – мера на пространстве траекторий в фиксированной среде ω с условием $P_\omega^x(X_0 = x) = 1$.

P – мера на пространстве сред.

Мера $\mathbb{P}^x$ определяется как полупрямое произведение мер P и P_ω^x (т.е. $\mathbb{P}^x(F \times G) = \int_F P_\omega^x(G) P(d\omega)$).

Далее мы будем рассматривать блуждания по $\mathbb{Z}^d$ и предполагать, что среда является *i.i.d.*

Мера P на средах называется равномерно эллиптической, если существует $\varepsilon > 0$ (константа эллиптичности), т.ч. P -п.в. $\omega(x, x + e) > \varepsilon$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d$, $|e|=1$.

Предположение равномерной эллиптичности немного упрощает последующее изложение (см. [1, стр. 25–34]), однако мы будем придерживаться более общего случая, требуя лишь $\omega(x, x + e) > 0$.

Для данного вектора $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ обозначим: $A_l := \{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n l = \infty\}$; $T_u := \inf\{n \geq 0 | X_n l \geq u\}$, $D := \inf\{n \geq 0 | X_n l < X_0 l\}$, $H(x) := \inf\{n \geq 0 | X_n l = x\}$. Интерпретация каждого из обозначений не нуждается в комментариях.

Закон нуля или единицы.

Данный раздел в основном будет опираться на работу [2, стр. 3–5].

Теорема (Закон 0 или 1). $\mathbb{P}^o(A_l \cup A_{-l}) \in \{0, 1\}$.

Замечание. При $d = 2$ можно доказать, что $\mathbb{P}^o(A_l) \in \{0, 1\}$ (см. [2]), то есть имеет место закон нуля или единицы не только для модуля, но и для самой проекции на фиксированный вектор.

При $d > 2$ есть неэллиптический контрпример для этого утверждения.

Вопрос о том, справедлив ли закон нуля или единицы в таком виде при $d > 2$ и предположении равномерной эллиптичности до сих пор остается открытым.

Схема доказательства теоремы:

Для наглядности можно считать, что l совпадает с первым базисным вектором e_1 , но мы будем просто предполагать, что $le_1 > 0$.

Далее нам понадобится следующая важная лемма.

Лемма 1. $\mathbb{P}^o(\#\{n \geq 0 | X_n l \geq u\} = \infty, T_v = \infty) = 0$.

Смысл леммы заключается в том, что блуждание не может бесконечно часто посещать полосу и при этом не выходить за одну из ее границ.

Схема доказательства леммы:

В предположении равномерной эллиптичности доказательство почти очевидно, однако в общем случае оно оказывается достаточно техническим.

Через $S := \{x | u \leq xl < v\}$ обозначим полосу.

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, для которого $(x + Ne_1)l \geq v$ для всех $x \in S$.

Поскольку если блуждание бесконечно часто посещает S , то либо некоторые точки посещаются бесконечное число раз, либо посещается бесконечное число точек, либо выполнено и то, и то. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^o(\#\{n \geq 0 | X_n l \geq u\} = \infty, T_v = \infty) &\leq \sum_{x \in S} \mathbb{P}^o(\#\{n \geq 0 | X_n = x\} = \infty, T_v = \infty) + \\ &+ \mathbb{P}^o(\#\{x \in S | H(x) < \infty\} = \infty, T_v = \infty).\end{aligned}$$

Докажем, что оба слагаемых равны нулю.

а) *Первое слагаемое.*

Фиксируем $x \in S$. Введем $\sigma_0 := H(x)$, $\sigma_k := \inf\{n > \sigma_{k-1} + N | X_n = x\}$.

Легко видеть, что $\mathbb{P}^o(\#\{n \geq 0 | X_n = x\} = \infty, T_v = \infty) \leq \inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\sigma_k < T_v)$.

Используя строго марковское свойство, получаем $\mathbb{P}^o(\sigma_k < T_v) \leq \mathbb{P}^o(\sigma_{k-1} < T_v) P_\omega^x(N < T_v)$. Беря $\inf$, имеем $\inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\sigma_k < T_v) \leq \inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\sigma_k < T_v) P_\omega^x(N < T_v)$.

Но $P_\omega^x(N < T_v) \leq 1 - \omega(x, x + e_1) \dots \omega(x + (N-1)e_1, x + Ne_1) < 1$.

Значит, $\inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\sigma_k < T_v) = 0$, откуда и вытекает требуемое.

б) *Второе слагаемое.*

Для $y \in \mathbb{Z}^{d-1}$ введем $M_y := \{z = (x, y) | z \in S\}$; $\tau_0 := H(S)$, $\tau_k := \inf\{n > \tau_{k-1} + N | \exists y \in \mathbb{Z}^{d-1} : n = H(M_y)\}$.

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^o(\#\{x \in S | H(x) < \infty\} = \infty, T_v = \infty) &\leq \inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\tau_k < T_v) \leq \inf_{k \geq 1} \sum_x E[\mathbb{P}^o(\tau_{k-1} < T_v, X_{\tau_{k-1}} = x) P_\omega^x(N < T_v)] \leq \\ &\leq \inf_{k \geq 1} \sum_x E[\mathbb{P}^o(\tau_{k-1} < T_v, X_{\tau_{k-1}} = x)(1 - \omega(x, x + e_1) \dots \omega(x + (N-1)e_1, x + Ne_1))]\end{aligned}$$

Поскольку при фиксированном $x \in M_y$ первый множитель, стоящий под математическим ожиданием, зависит только от $\omega(z, \cdot)$ с $z \notin M_y$ и $zl < v$, а второй только от $\omega(z, \cdot)$ с $z \in M_y$ или $zl \geq v$, получаем, что последнее не превосходит $(\inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\tau_{k-1} < T_v))(1 - [E(\omega(0, e_1))]^N) < \inf_{k \geq 1} \mathbb{P}^o(\tau_k < T_v)$, откуда и вытекает требуемое.

Таким образом, лемма доказана.

Продолжение доказательства теоремы:

Предположим, что $\mathbb{P}^o(A_l) > 0$.

Тогда легко проверить, что $\mathbb{P}^o(D = \infty) > 0$.

Рассмотрим событие $\mathcal{O}_l$, заключающееся в том, что $X_n l$ меняет знак бесконечно часто.

Докажем, что $\mathbb{P}^o(\mathcal{O}_l) = 0$.

Пусть $M := \sup_n X_n l$. По лемме достаточно доказать, что $\mathbb{P}^o(\mathcal{O}_l^\infty) = 0$ для $\mathcal{O}_l^\infty := \mathcal{O}_l \cap \{M = \infty\}$.

Определим следующие случайные моменты: $S_0 := 0$, $R_k := \inf\{n \geq S_k | X_n l < 0\}$, $S_{k+1} := \inf\{n \geq R_k | X_n l > \max_{m < n} X_m l\}$. На $\mathcal{O}_l^\infty$ все они конечны.

В момент S_k блуждание выходит в новую для него часть пространства, среда в которой не зависит от той, которая была раньше. Поэтому у блуждания есть шанс $\mathbb{P}^o(D = \infty)$ туда не вернуться. Отсюда по индукции получаем $\mathbb{P}^o(R_k < \infty) \leq \mathbb{P}^o(D < \infty)^k$. Устремляя k к бесконечности, получаем $\mathbb{P}^o(\mathcal{O}_l^\infty) = 0$.

Таким образом, мы доказали, что если $\mathbb{P}^o(A_l) > 0$, то $\mathbb{P}^o(\mathcal{O}_l) = 0$.

Предположим, что $\mathbb{P}^o(A_l \cup A_{-l}) < 1$. Тогда найдется $v > 0$, т.ч. бесконечно частое посещение полосы $\{x | -v \leq xl \leq v\}$ имеет положительную вероятность. Отсюда по лемме $\mathbb{P}^o(\mathcal{O}_l) > 0$, а значит $\mathbb{P}^o(A_l) = 0$. Аналогично доказывается и $\mathbb{P}^o(A_{-l}) = 0$.

□

Закон больших чисел

Закон больших чисел для случайных блужданий в случайной среде является достаточно нетривиальным утверждением. По существу он состоит из двух отдельных частей: баллистического и небаллистического случаев, весьма различных по способу доказательства. Первый разбирается в оригинальной статье [3], второй в [4], на которые мы и будем опираться далее. В

чуть более сжато и немного переработанном виде закон больших чисел также можно найти в [1, стр. 28–34].

Теорема (Закон больших чисел). Существуют неслучайные векторы v_l и v_{-l} , т.ч.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n l}{n} = v_l \mathbf{1}_{A_l} + v_{-l} \mathbf{1}_{A_{-l}} \quad \mathbb{P}^o\text{-п.н.}$$

Следствие. Если $\mathbb{P}^o(A_l) \in \{0, 1\}$ для всех $l \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, то существует неслучайный вектор v , т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \quad \mathbb{P}^o\text{-п.н.}$

Следствие вытекает из теоремы, примененной ко всем базисным векторам.

Как уже отмечалось выше, вопрос, всегда ли верна посылка следствия, на данный момент открыт.

Схема доказательства теоремы:

Для упрощения обозначений будем считать, что $l = e_1$.

Как и анонсировалось, доказательство состоит из разбора двух весьма разных случаев.

1) $\mathbb{P}^o(A_l \cup A_{-l}) = 1$ (баллистический случай).

Будем предполагать, что $\mathbb{P}^o(A_l) > 0$.

Рассмотрим следующие величины: $\bar{S}_0 := 0$, $M_0 := X_0 l$; $\bar{S}_{k+1} := T_{M_{k+1}}$, $\bar{R}_{k+1} := D \circ \theta_{\bar{S}_{k+1}} + \bar{S}_{k+1}$, $M_{k+1} := \sup\{X_m l \mid 0 \leq m \leq \bar{R}_{k+1}\}$ ($k \geq 0$), где θ обозначает сдвиг по времени.

По ним определим $K := \inf\{k \geq 1 \mid \bar{S}_k < \infty, \bar{R}_k = \infty\}$, $\tau_1 := S_k$. τ_1 называется моментом восстановления. После τ_1 ($X_n l$) уже не заходит левее $X_{\tau_1} l$.

Далее определим $\tau_{k+1} := \tau_k(X) + \tau_1(X_{\tau_k+} - X_{\tau_k})$ — моменты, когда блуждание заходит в новое полупространство, после чего из него не выходит.

Несложно проверить, что $\mathbb{P}^o(A_l \cap \{\tau_k = \infty\}) = 0$.

Рассмотрим теперь $\mathbb{Q}^o(\cdot) := \mathbb{P}^o(\cdot | A_l)$.

Можно показать (выкладки опускаем, подробности см. в [3, стр. 1858–1859] или в [1, стр. 30]), что относительно $\mathbb{Q}^o$: $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$ являются i.i.d.-случайными величинами, распределение которых задается формулой $\mathbb{Q}^o(X_{\tau_2} - X_{\tau_1} \in C_1, \tau_2 - \tau_1 \in C_2) = \mathbb{P}^o(X_{\tau_1} \in C_1, \tau_1 \in C_2 \mid \{D = \infty\})$.

Нам также потребуется еще одна техническая лемма (доказательство см. там же).

Лемма 2 (Цернер). $\mathbb{E}^o(X_{\tau_1} l \mid \{D = \infty\}) = \frac{1}{\mathbb{P}^o(D = \infty)}$.

По закону больших чисел:

$$\frac{\tau_k}{k} \rightarrow \mathbb{E}^o(\tau_1 \mid \{D = \infty\}) \quad (\leq \infty),$$

$$\frac{X_{\tau_k} l}{k} \rightarrow \mathbb{E}^o(X_{\tau_1} l \mid \{D = \infty\}) \quad (< \infty \text{ и } \neq 0 \text{ по Лемме Цернера}) \quad \mathbb{Q}^o\text{-п.н.}$$

Далее необходимо разобрать два варианта:

а) $\mathbb{E}^o(\tau_1 \mid \{D = \infty\}) < \infty$.

Рассмотрим последовательность (k_m) , т.ч. $\tau_{k_m} \leq T_m < \tau_{k_m+1}$.

Тогда по определению τ_k : $X_{\tau_{k_m}} l \leq X_{T_m} l < X_{\tau_{k_m+1}} l$.

Деля на k_m и беря $m \rightarrow \infty$, получаем $\frac{k_m}{m} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}^o(X_{\tau_1} l \mid \{D = \infty\})}$ ($\mathbb{Q}^o$ -п.н.)

Отсюда $\frac{T_m}{m} \rightarrow \frac{\mathbb{E}^o(\tau_1 \mid \{D = \infty\})}{\mathbb{E}^o(X_{\tau_1} l \mid \{D = \infty\})}$ ($\mathbb{Q}^o$ -п.н.), что вместе со следующей леммой и аналогичными рассуждениями на A_{-l} доказывает теорему.

Лемма 3. Если $\frac{T_n}{n} \rightarrow \alpha < \infty$, то $\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.

Доказательство леммы можно найти в первом докладе.

б) $\mathbb{E}^o(\tau_1 \mid \{D = \infty\}) = \infty$.

Возьмем последовательность (k_m) , т.ч. $\tau_{k_m} \leq m < \tau_{k_m+1}$.

Тогда $\frac{k_m}{m} \rightarrow 0$. Отсюда $\frac{X_m l}{m} \leq \frac{X_{\tau_{k_m+1}} l}{k_m + 1} \cdot \frac{k_m + 1}{m} \rightarrow 0$ ($\mathbb{Q}^o$ -п.н.)

Так как $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{X_m l}{m} \geq 0$ (поскольку на A_l : $\tau_1 < \infty$), то $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{X_m l}{m} = 0$ ($\mathbb{Q}^o$ -п.н.), что и доказывает теорему.

II) $\mathbb{P}^o(A_l \cup A_{-l}) = 0$ (небаллистический случай).

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n l}{n} = 0$.

Рассмотрим $H_m := \{z | z_l = m\}$; $\tau_m^o := T_m$, $\tau_m^{i+1} := \min\{n > \tau_m^i | X_n l = m\}$.

Фиксируем $L \in \mathbb{N}$.

Определим $h_{m,L} := \sup_{i \geq 0} \{\tau_m^i - \tau_m^o | \tau_m^i < T_{m+L}\}$ – время между первым и последним до попадания в $m+L$ посещениями H_m .

Для $c > 0$ определим $F_{M,L} := \frac{\#\{0 \leq m \leq M | h_{m,L} \leq c\}}{M+1}$.

Предположим, что $\mathbb{P}^o(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n l}{n} > 0) > 0$.

Тогда можно проверить, что найдется $c > 0$, для которого $\mathbb{P}^o(\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} F_{M,L}(c) > 0) > 0$.

При $h_{m,L} \leq c$ точка последнего до T_{m+L} посещения H_m находится на расстоянии не более c от X_{T_m} и посещается не более c раз. Таким образом, найдутся $z \in H_0$, $|z| \leq c$ и r , $1 \leq r \leq c$ такие, что r -ое посещение X_{T_m+z} происходит до момента T_{m+L} , после чего блуждание уже не попадает в H_m . Последнее событие обозначим $B_{m,L}^1(z, r)$.

Поскольку $F_{M,L}(c) \leq \frac{1}{M+1} \sum_{z \in H_0, |z| \leq c} \sum_{r=1}^c \sum_{m=0}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}^1(z, r)}$, найдутся z и r (теперь считаем их зафиксированными), что $\mathbb{P}^o(\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}^1(z, r)} > 0) > 0$.

События $\{B_{m,L}^1(z, r)\}_m$ не независимы, и приходится прибегнуть к некому трюку.

Построим независимые копии случайных блужданий Y^y , начинающиеся из всех точек (при фиксированной среде). Другими словами, определим $\widetilde{P}_\omega^o := P_\omega^o \otimes \bigotimes_{y \in \mathbb{Z}^d} P_\omega^y$ на $(\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N} \times ((\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N})^{\mathbb{Z}^d}$; $\widetilde{\mathbb{P}}^o := P \times \widetilde{P}_\omega^o$.

Положим $B_{m,L}^2(z, r) := \{r\text{-ое попадание в } X_{T_m+z} \text{ происходит уже после } T_{m+L} \text{ и } D(Y^{X_{T_m+z}}) \geq T_{m+L}(Y^{X_{T_m+z}})\}$.

$B_{m,L}(z, r) := B_{m,L}^1(z, r) \cup B_{m,L}^2(z, r)$.

Можно доказать, что при фиксированном $i \leq L-1$ события $\{B_{jL+i,L}(z, r)\} + j$ независимы и $\widetilde{\mathbb{P}}^o(B_{jL+i,L}(z, r)) = \mathbb{P}^o(D \geq T_L)$.

Так как $B_1 \in B$, то

$$0 < \widetilde{\mathbb{P}}^o(\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \mathbf{1}_{B_{m,L}(z, r)} > 0) = \widetilde{\mathbb{P}}^o(\overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{\lfloor M/L \rfloor} \mathbf{1}_{B_{jL+i,L}(z, r)} > 0)$$

Применяя к внутренней сумме закон больших чисел, получаем $\mathbb{P}^o(D = \infty) = \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}^o(D \geq T_L) > 0$.

Но по лемме 1: $\mathbb{P}^o(A_l) \geq \mathbb{P}^o(D = \infty) > 0$. Противоречие.

Значит $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n l}{n} \leq 0$ ($\mathbb{P}^o$ -п.н.).

Повторяя те же рассуждения для $(-l)$, приходим к доказательству теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zeitouni O. Random walks in random environment – a guided tour, 2003
- [2] Zerner M. Merkl F. A zero-one law for planar random walks in random environment, The Annals of Probability, 2001, Vol. 29, No. 4, 1716-1732
- [3] Sznitman A. and Zerner M. A law of large numbers for random walks in random environment, The Annals of Probability, 1999, Vol. 27, No. 4, 1851-1869
- [4] Zerner M. A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment, The Electronic Communications in Probability, 2002, Vol. 7, No. 19, 191-197