А. Н. ШИРЯЕВ

О монографии

“БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ
и
ВИНЕРОВСКАЯ МЕРА”

1. Монография вышла в двух томах:

Том 1 (2023 г.), 527 стр. (104 параграфа);

Том 2 (2024 г.), 636 стр. (117 параграфов).

Содержит 39 глав:

в первом томе - 20 глав;

во втором томе - 19 глав.

В аннотации сказано:

В книге излагаются физические предпосылки броуновского движения, математическое изучение которого привело к значительным результатам в теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, математическое физике...

Два тома охватывают как классический, так и современный материал по броуновскому движению и связанной с ним винеровской мере, являющейся первым примером вероятностной меры на функциональном пространстве $C[0, \infty)$.

Дается также обзор аналитических методов и средств, необходимых для изложения основного материала.
К их числу относятся элементы векторного анализа, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений, теории мартингалов и др.

2. Ведущей мыслью автора при написании настоящей книги было, прежде всего, издание

> `значительно расширенного курса лекций по теме`
> `“броуновское движение и винеровская мера”,`

имеющей широкие связи

> `с дифференциальными уравнениями в частных производных, комплексным анализом, теорией функций, математической физикой...`

Автор в течение ряда лет читал по этой теме лекции для студентов и аспирантов механико-математического факультета МГУ, слушателей научно-образовательного центра в МИАНе и Школы анализа данных в Яндексе.

Существенную часть книги составляет материал, который автор планировал прочитать и который, вообще говоря, следовало бы читать в продвинутых вероятностных курсах.

Некоторый материал докладывался автором на различных научных мероприятиях – конференциях, симпозиумах, специальных семинарах. Исследователи в области теории вероятностей и ее применений, а также представители других математических дисциплин, думается, найдут в книге много нового для себя и своей работы.

По теме книги существует огромная литература – статьи, монографии, препринты, записки лекций, в том числе и в электронном виде. Многие из них указаны в библиографии к книге, в тексте дается большое число ссылок на используемые материалы.

3. Броуновское движение (винеровский процесс) $(B_t)_{t\geq 0}$ – это случайный процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и обладающий следующими свойствами:

1) $B_0(\omega) = 0$, $\omega \in \Omega$;

2) $\mathsf{Law}(B_{t+h} - B_t) = \mathcal{N}(0, 1)$;

3) приращения $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$, независимы;

4) процесс $(B_t(\omega))_{t\geq 0}$ имеет непрерывные (или P-почти наверное непрерывные) траектории.

Величины $B_{t+s} - B_t$ имеет гауссовское распределение с плотностью

$$\boxed{\varphi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}}, \qquad s > 0,$$

которая удовлетворяет уравнению теплопроводности (Фурье, рукопись 1807 г. “Sur la propagation de la chaleur” и книга 1822 г. “Théorie analytique de la chaleur”).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и

$$\xi_1 = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } 1/2, \\ -1 & \text{с вероятностью } 1/2. \end{cases}$$

Полагая $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $n \geq 1$, и

$$P_n(k) = \mathsf{P}(S_n = k), \qquad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

получаем

$$P_{n+1}(k) = \frac{1}{2}\,[P_n(k+1) + P_n(k-1)],$$

откуда следует, что

$$\underbrace{P_{n+1}(k) - P_n(k)}_{\substack{\text{первая} \\ \text{``производная''} \\ \text{по времени}}} = \underbrace{\frac{1}{2}\Big[P_n(k+1) - 2P_n(k) + P_n(k-1)\Big]}_{\substack{\text{вторая} \\ \text{``производная''} \\ \text{по состояниям}}}.$$

Аналогично, делая замены

$$n \longrightarrow n\Delta t, \qquad x \longrightarrow x\Delta x,$$

и полагая $\Delta t = (\Delta x)^2$, получаем уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

4. Винеровская мера μ в пространстве $C[0,\infty)$ получается в результате продолжения конечномерных распределений броуновского движения

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathsf{P}(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n).$$

В силу предположений о гауссовости и независимости приращений $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ находим, что

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n)$$
$$= C_n \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)} - \cdots - \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

μ можно продолжить на борелевские множества $A \in \mathbb{R}^n$, а затем (теорема Колмогорова) ее можно продолжить на

$$(C_0[0,\infty), \mathcal{B}(C_0[0,\infty))).$$

Эта мера и есть **ВИНЕРОВСКАЯ МЕРА**.

ТОМ 1

Гл. 1. Броуновское движение, или винеровский процесс

Гл. 2. О существовании математического броуновского движения

Гл. 3. Недифференцируемость, немонотонность
и другие свойства броуновского движения

Гл. 4. Фильтрованные пространства. Моменты остановки,
марковские моменты. Прогрессивная измеримость

Гл. 5. Марковское и строго марковское свойства броуновского движения

Гл. 6. Закон повторного логарифма и законы арксинуса и арктангенса

Гл. 7. Броуновский мост. Применения в математической статистике

Гл. 8. Опциональность, равномерная интегрируемость. Дискретное время

Гл. 9. Опциональные теоремы. Непрерывное время

Гл. 10. Мартингальные свойства и характеризация броуновского движения.
Мартингальные неравенства

Гл. 11. О вероятностных свойствах некоторых моментов выхода броуновского движения

Гл. 12. Броуновское движение и стохастический анализ

Гл. 13. Возвратность и невозвратность случайного блуждания и броуновского движения. Время пребывания. Функция Грина броуновского движения

Гл. 14. Аналитические и вероятностные аспекты теории потенциала. Гармонические функции

Гл. 15. Векторный анализ и векторное исчисление в теории потенциала

Гл. 16. Фундаментальные решения и функции Грина

Гл. 17. Стохастическая динамика Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека

Гл. 18. Процессы Бесселя

Гл. 19. О стохастических представлениях по броуновскому движению

Гл. 20. О плоском (двумерном) броуновском движении и его связи с комплексным анализом

ТОМ 2

Гл. 31. Некоторые приложения исчисления Маллявэна

Гл. 32. Некоторые применения исчисления Маллявэна в финансовой математике

Гл. 33. Исчисление Маллявэна и метод Стейна в гауссовской аппроксимации распределений вероятностей функционалов на винеровском пространстве

Гл. 34. Диффузия и стохастические дифференциальные уравнения

Гл. 35. Обратные стохастические дифференциальные уравнения

Гл. 36. Некоторые применения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Нелинейные и сублинейные ожидания. Меры риска

Гл. 37. О принципах вариационного исчисления и обратных уравнениях в детерминистических и стохастических системах

Гл. 38. Размерности Минковского и Хаусдорфа. Применение к броуновскому движению

Гл. 39. О подходах к основаниям квантовой механики. Вероятностная интерпретация

5. ОДИН ПРИМЕР. Следуя сербскому астроному и климатологу Миланковичу (1879–1958), можно выделить

ТРИ ЦИКЛА,

которые влияют на количество солнечной энергии, поступающей на Землю и определяющей ее температурный режим. Эти три цикла связаны со следующими явлениями:

изменение ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА,
изменение УГЛА НАКЛОНА земной оси,
ПРЕЦЕССИЯ.

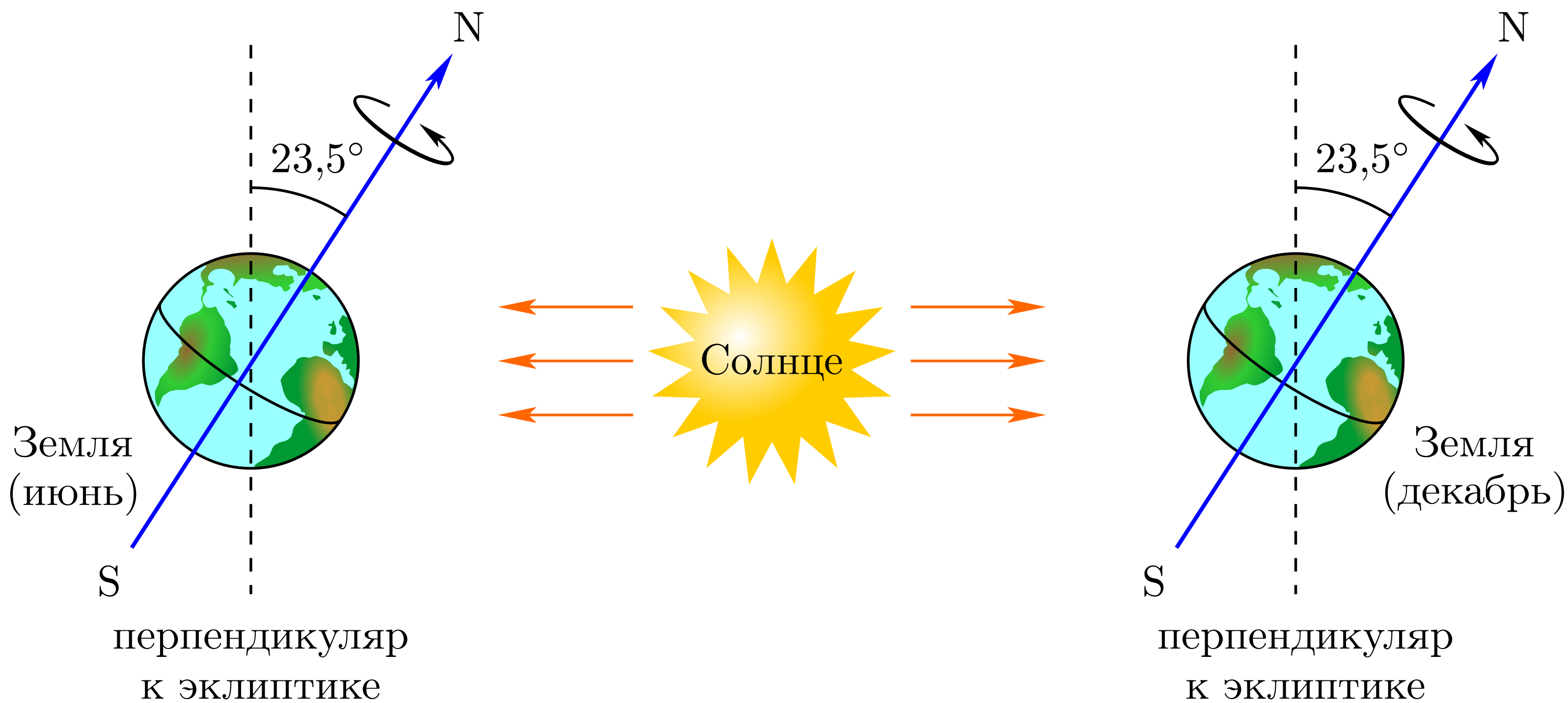
(а) **Эксцентриситет** земной орбиты (являющейся эллипсом, в одном из фокусов которого расположено Солнце):

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

(b – малая полуось эллипса, а a – его большая полуось; сейчас $\varepsilon \approx 0.0167$). Эллипс – вследствие гравитационного влияния других планет Солнечной системы – меняет свою форму (происходит это с периодичностью 10^5 лет), что приводит, конечно же, к изменениям количества поступающей на Землю солнечной энергии.

[В среднем расстояние от Земли до Солнца равно 149.6 млн км (около 147.09 млн км в перигелии – ближайшая к Солнцу точка земной орбиты и 152.1 млн км в апогелии, или афелии, – в этой точке орбиты расстояние от Земли до Солнца является максимальным).]

(b) Наклон оси вращения – определяется как угол между осью вращения Земли и ее орбитальной осью. Сейчас наклон равен примерно 23.5°. Этот угол меняется с периодом примерно 41 000 лет в пределах от 21.5° до 24.5°.



(c) Прецессия – явление кругового движения тела, при котором мгновенная ось вращения меняет свое направление в пространстве (пример – гироскоп).

Земля совершает подобное движение, и полный оборот оси вращения происходит за 26 000 лет.

6. Период эксцентриситета (период изменения формы эллипса) и период глобального изменения климата на Земле примерно одинаковы (около 10^5 лет), и **можно было бы думать, что**

изменение формы эллипса – основная причина
переходов от ледникового состояния
к неледниковому и обратно.

Однако изменение количества поступающей на Землю солнечной энергии, вызываемое изменением формы эллипса, слишком мало – порядка 0.1 %.

Таким образом,

одним только изменением эксцентриситета
НЕЛЬЗЯ ОБЪЯСНИТЬ
чередование климатических эпох на Земле.

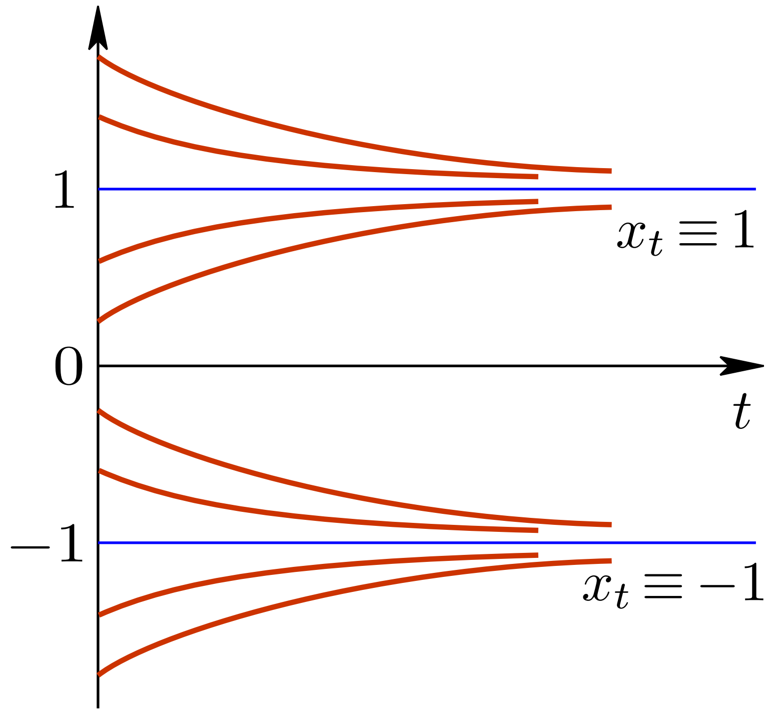
7. Обозначим через x_t некоторую "усредненную" земную температуру в момент t.

Хотелось бы иметь при всех значениях t уравнение для x_t.

Понятно, что это уравнение **не может быть линейным**.

Имея в виду, что должно быть **ДВА состояния** ("ледниковое" и "нормальное"), рассмотрим уравнение

$$\boxed{dx_t = x_t(1 - x_t^2)\,dt, \qquad x_0 \in \mathbb{R}} \tag{1}$$



У этого уравнения **ДВА аттрактора:** $x = -1$ и $x = 1$, а нуль – неустойчивая точка.

При этом при $t \to \infty$

- все траектории с начальным состоянием $x_0 \in (0, \infty)$ сходятся к $x \equiv 1$,
- а траектории с $x_0 \in (-\infty, 0)$ сходятся к $x \equiv -1$.

Так что переходов из области $(0, \infty)$ в область $(-\infty, 0)$ и наоборот не будет.

Однако если ввести в правую часть уравнения для x_t случайную составляющую типа “**белого шума**” (“производная” броуновского движения), то получим возможность перехода из $(0, \infty)$ в область $(-\infty, 0)$ и наоборот. Иначе говоря, рассмотрим уравнение

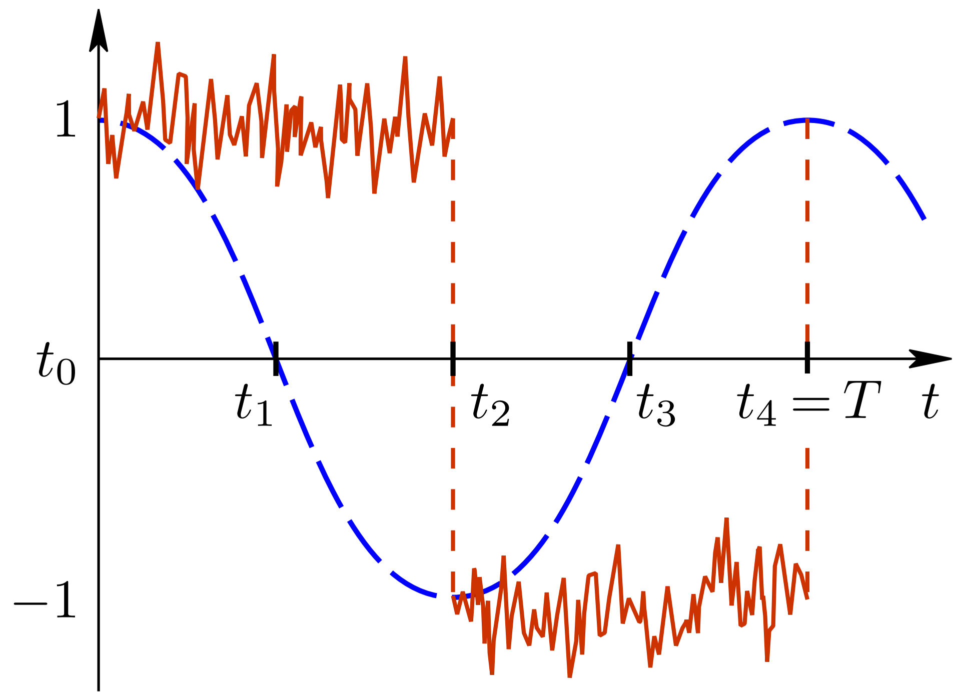
$$\boxed{dx_t = x_t(1 - x_t^2)\, dt, + \sigma\, dB_t}$$

Оказывается, что среднее время перехода из состояния $x > 0$ в левую область $(-\infty, 0)$ при малых $\sigma > 0$ имеет вид

$$\boxed{m(x) \approx \sqrt{2}\,\pi \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\right\} \quad \textbf{(формула Крамерса)}}$$

Введем в предыдущее уравнение еще одну составляющую:

$$\varepsilon \cos \omega t, \qquad \text{где} \quad \omega = \frac{2\pi}{10^5}.$$



Тогда решения уравнения

$$\boxed{dx_t = \left[x_t(1 - x_t^2) + \varepsilon \cos \omega t\right] dt + \sigma \, dB_t}$$

будут при подходящем $\sigma > 0$

вести себя "ПОЧТИ" СИНХРОННО с $\cos \omega t$

Это подходящее значение σ трудно найти аналитически, но численно такое значение находится (детали см. в гл. 34, § 10).