

Локальный подход к теореме Делиня–Римана–Роха

Научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов
2024 года

Д. В. Осипов

20 октября 2024 г.

Статьи по теме доклада

- ❶ Д. В. Осипов, “Формальный коцикл Ботта–Тёрстона и часть формальной теоремы Римана–Роха”, Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина, Труды МИАН, 320, МИАН, М., 2023, 243–277.
- ❷ Д. В. Осипов, “Детерминантное центральное расширение и $\cup$ -произведения 1-коциклов”, УМН, 78:4(472), 2023, 207–208.
- ❸ D. V. Osipov, “Local analog of the Deligne–Riemann–Roch isomorphism for line bundles in relative dimension 1”, Изв. РАН. Сер. матем., 88:5, 2024, 127–173.

Теорема Римана–Роха для кривых

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на гладкой проективной алгебраической кривой C , определенной над полем k . Тогда эйлерова характеристика

$$\chi(C, \mathcal{L}) = \dim_k H^0(C, \mathcal{L}) - \dim_k H^1(C, \mathcal{L})$$

равна (теорема Римана–Роха):

$$\chi(C, \mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) - g(C) + 1,$$

где $\deg(\mathcal{L})$ — степень расслоения, и $g(C)$ — род кривой.

Мультипликативный инвариант

Помимо “аддитивного инварианта”, эйлеровой характеристики расслоения, можно рассмотреть “**мультипликативный инвариант**”

$$\det(C, \mathcal{L}) = \bigwedge_k^{\max} H^0(C, \mathcal{L}) \otimes_k \left(\bigwedge_k^{\max} H^1(C, \mathcal{L}) \right)^*,$$

который есть 1-мерное k -векторное пространство.

Более интересно рассматривать этот инвариант для **семейства алгебраических кривых над базой и расслоения** на этом семействе.

Семейство кривых

Пусть $\pi : X \rightarrow S$ — семейство гладких проективных кривых над базой S , и $\mathcal{E}$ — линейное расслоение на X .

Для каждой точки $p \in S$ рассмотрим 1-мерное k -векторное пространство $\det(\pi^{-1}(p), \mathcal{E}|_{\pi^{-1}(p)})$. Семейство 1-мерных k -векторных пространств

$$p \longmapsto \det(\pi^{-1}(p), \mathcal{E}|_{\pi^{-1}(p)})$$

соответствует линейному расслоению $\det R\pi_* \mathcal{E}$ на базе S .

Семейство кривых

Пусть $\pi : X \rightarrow S$ — семейство гладких проективных кривых над базой S , и $\mathcal{E}$ — линейное расслоение на X .

Для каждой точки $p \in S$ рассмотрим 1-мерное k -векторное пространство $\det(\pi^{-1}(p), \mathcal{E}|_{\pi^{-1}(p)})$. Семейство 1-мерных k -векторных пространств

$$p \longmapsto \det(\pi^{-1}(p), \mathcal{E}|_{\pi^{-1}(p)})$$

соответствует линейному расслоению $\det R\pi_* \mathcal{E}$ на базе S .

Введем линейное расслоение на семействе X :

$$\omega = \omega_{X/S} = T^*X/\pi^*(T^*S),$$

где T^*X и T^*S — расслоения, двойственные к касательным расслоениям.

Теорема Делиня–Римана–Роха

Теорема Делиня–Римана–Роха (сформулированная в окончательном функториальном виде П. Делинем в 1987 г., после относительной теоремы Гротендика–Римана–Роха) для **линейного расслоения $\mathcal{E}$ на семействе кривых $\pi : X \rightarrow S$** утверждает канонический изоморфизм линейных расслоений на базе S :

$$(\det R\pi_* \mathcal{E})^{\otimes 12} \simeq \langle \mathcal{E}, \mathcal{E} \rangle^{\otimes 6} \otimes \langle \mathcal{E}, \omega \rangle^{\otimes -6} \otimes \langle \omega, \omega \rangle$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — **скобка Делиня**, которая каноническим образом строит по двум линейным расслоениям L и M на семействе X линейное расслоение $\langle L, M \rangle$ на базе S . При этом,

$$\langle \mathcal{O}(D_1), \mathcal{O}(D_2) \rangle \simeq \mathcal{O}(\pi_*(D_1 \cdot D_2))$$

для дивизоров D_1 и D_2 в общем положении на семействе X .

Пространства модулей

Теорема Делиня–Римана–Роха переформулируется как равенство двух линейных расслоений на пространстве (стеке) модулей пар $(C, \mathcal{L})$, где C — проективная кривая, $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на кривой C .

Пространства модулей

Теорема Делиня–Римана–Роха переформулируется как равенство двух линейных расслоений на пространстве (стеке) модулей пар $(C, \mathcal{L})$, где C — проективная кривая, $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на кривой C .

Рассмотрим расширенное пространство модулей $\mathcal{M}$, параметризующее объекты $(C, \mathcal{L}, x, t, e)$, где C — проективная кривая, $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на кривой C , x — гладкая точка на кривой C , t — формальный локальный параметр в точке x , e — тривиализация расслоения $\mathcal{L}$ в формальной окрестности точки x .

Пространства модулей

Теорема Делиня–Римана–Роха переформулируется как равенство двух линейных расслоений на пространстве (стеке) модулей пар $(C, \mathcal{L})$, где C — проективная кривая, $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на кривой C .

Рассмотрим **расширенное пространство модулей** $\mathcal{M}$, параметризующее объекты $(C, \mathcal{L}, x, t, e)$, где C — проективная кривая, $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на кривой C , x — гладкая точка на кривой C , t — формальный локальный параметр в точке x , e — тривиализация расслоения $\mathcal{L}$ в формальной окрестности точки x .

На пространстве модулей $\mathcal{M}$ действует почти свободно и транзитивно группа (групповая инд-схема) $\mathcal{G}$, связанная с **формальным проколотым диском**.

Элементы группы $\mathcal{G}$ “**переклеивают**” кривую и расслоение в проколотой формальной окрестности точки x .

Формальный проколотый диск

Группа $\mathcal{G}$ — это **полупрямое произведение** группы обратимых функций на формальном проколотом диске и группы автоморфизмов этого диска.

Формальный проколотый диск

Группа $\mathcal{G}$ — это **полупрямое произведение** группы обратимых функций на формальном проколоте диске и группы автоморфизмов этого диска.

Если зафиксировать коммутативное кольцо A , которое есть кольцо регулярных функций на базе S , то группа (A -точек) $\mathcal{G}(A)$ описывается так:

$$\mathcal{G}(A) = A((t))^* \rtimes \operatorname{Aut} A((t)),$$

где $A((t))^*$ — **группа обратимых элементов** кольца рядов Лорана $A((t))$ над кольцом A , и $\operatorname{Aut} A((t))$ — **группа непрерывных A -автоморфизмов** A -алгебры $A((t))$ (в t -адической топологии).

Детерминантное центральное расширение группы $\mathcal{G}$

Локальная теорема Делиня–Римана–Роха есть утверждение про равенство двух центральных расширений группы $\mathcal{G}$ при помощи мультипликативной группы $\mathbb{G}_m$, где $\mathbb{G}_m(A) = A^*$.

Детерминантное центральное расширение группы $\mathcal{G}$

Локальная теорема Делиня–Римана–Роха есть утверждение про равенство двух центральных расширений группы $\mathcal{G}$ при помощи мультипликативной группы $\mathbb{G}_m$, где $\mathbb{G}_m(A) = A^*$. Одно из них, **детерминантное центральное расширение**,

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1$$

определяется группой $\tilde{\mathcal{G}}(A)$, которая состоит из множества пар (g, s) , где $g \in \mathcal{G}(A)$, и s порождает следующий свободный A -модуль ранга 1:

$$\mathrm{Hom}_A \left(\bigwedge_A^{\max} (g(A[[t]])/t^l A[[t]]), \bigwedge_A^{\max} (A[[t]]/t^l A[[t]]) \right),$$

где число l удовлетворяет условию $t^l A[[t]] \subset (g(A[[t]]) \cap A[[t]])$.

$\cup$ -произведения 1-коциклов

Другое центральное расширение приходит из $\cup$ -произведения 1-коциклов. Пусть

$$\lambda_i : \mathcal{G}(A) \longrightarrow A((t))^*, \quad i = 1, 2$$

групповые 1-коциклы, где группа $\mathcal{G}(A)$ действует на группе $A((t))^*$ через гомоморфизм в группу $\text{Aut } A((t))$.

Определим 2-коцикл группы $\mathcal{G}(A)$ со значением в группе A^* :

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \text{CC} \circ (\lambda_1 \cup \lambda_2),$$

где $\lambda_1 \cup \lambda_2$ — отображение из $\mathcal{G}(A) \times \mathcal{G}(A)$ в $A((t))^* \otimes_{\mathbb{Z}} A((t))^*$,
и

$$\text{CC} : A((t))^* \otimes_{\mathbb{Z}} A((t))^* \longrightarrow A^*$$

есть **символ Конту-Каррера**, связанный с алгебраической геометрией, арифметикой и алгебраической К-теорией.

Специальные 1 и 2-коциклы

Имеются **специальные 1-коциклы** Λ и Ω на группе $\mathcal{G}(A)$ со значениями в группе $A((t))^*$:

$$\Lambda((h, \varphi)) = h \quad \text{и} \quad \Omega((h, \varphi)) = d\varphi(t)/dt = \varphi(t)',$$

где $(h, \varphi) \in \mathcal{G}(A) = A((t))^* \rtimes \text{Aut } A((t))$.

Из них получаем **специальные 2-коциклы** на группе $\mathcal{G}$ с коэффициентами в группе $\mathbb{G}_m$ (на группе $\mathcal{G}(A)$ с коэффициентами в группе A^*):

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle, \quad \langle \Lambda, \Omega \rangle, \quad \langle \Omega, \Omega \rangle.$$

Локальная теорема Делиня–Римана–Роха

Локальная теорема Делиня–Римана–Роха (полученная мной) утверждает, что (после ограничения на $\mathbb{Q}$ -алгебры A) класс изоморфизма 12-ой степени детерминантного центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ совпадает с классом изоморфизма центрального расширения, заданного следующим 2-коциклом группы $\mathcal{G}$ с коэффициентами в группе $\mathbb{G}_m$ (в мультипликативной записи):

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle^6 \cdot \langle \Lambda, \Omega \rangle^{-6} \cdot \langle \Omega, \Omega \rangle .$$

Локальная теорема Делиня–Римана–Роха

Локальная теорема Делиня–Римана–Роха (полученная мной) утверждает, что (после ограничения на $\mathbb{Q}$ -алгебры A) класс изоморфизма 12-ой степени детерминантного центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ совпадает с классом изоморфизма центрального расширения, заданного следующим 2-коциклом группы $\mathcal{G}$ с коэффициентами в группе $\mathbb{G}_m$ (в мультипликативной записи):

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle^6 \cdot \langle \Lambda, \Omega \rangle^{-6} \cdot \langle \Omega, \Omega \rangle.$$

Доказательство этой теоремы не использует глобальную теорему Делиня–Римана–Роха, а использует технику работы с кольцами $A((t))$, а также явные вычисления в пространстве вторых когомологий алгебры Ли группы $\mathcal{G}$, из которых, в частности, видна причина появления “загадочных” коэффициентов 12, 6 и -6 в теореме Делиня–Римана–Роха.