Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 11. Подалгебра без декогеренции как коммутант. Канонический вид ГКСЛ-генератора с подалгеброй без декогеренции

Теретёнков Александр Евгеньевич

19 ноября 2024 г.

В прошлой лекции...

Подалгебра без декогеренции $\mathcal{N}$ для однопараметрической вполнеположительной сохраняющей след полугруппы Φ_t — множество таких $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, что $\forall t \geqslant 0$

$$\Phi_t^*(X^\dagger X) = (\Phi_t^*(X))^\dagger \Phi_t^*(X)$$

и

$$\Phi_t^*(XX^\dagger) = \Phi_t^*(X)(\Phi_t^*(X))^\dagger$$

В прошлой лекции...

Утверждение. Подалгебра без декогеренции

1. Инвариантна: $\Phi_t^*(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N} \ \forall t \geqslant 0$
2. $\forall t \geqslant 0$, $X \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow \Phi_t^*(XY) = \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y)$, $\Phi_t^*(YX) = \Phi_t^*(Y)\Phi_t^*(X)$
3. Является $*$-алгеброй

Подалгебры без декогеренции

2) Введём

$$d_t(X,Y) \equiv \Phi_t^*(X^\dagger Y) - \Phi_t^*(X^\dagger)\Phi_t^*(Y)$$

Неравенство Кэдисона

$$d_t(X,X) \geqslant 0, \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Для $X \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ с учётом $d_t(X,X) = 0$, имеем

$$d_t(zX+Y, zX+Y) = \overline{z} d_t(X,Y) + (\overline{z} d_t(X,Y))^\dagger + d_t(Y,Y) \geqslant 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Беря $z \to \pm\infty$ и $z \to \pm i\infty$, получим

$$d_t(X,Y) = 0$$

тогда $d_t(X^\dagger,Y) = 0$.

Подалгебры без декогеренции

3) Аналогично, получаем

$$d_t(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

то есть

$$\alpha X + \beta Y \in \mathcal{N}.$$

$$\Phi_t^*((XY)^\dagger XY) = (\Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y))^\dagger \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y) = (\Phi_t^*(XY))^\dagger \Phi_t^*(XY)$$

Диссипативная функция

Диссипативная функция (carré du champ)

$$\mathcal{L}^*(X^\dagger X) - X^\dagger \mathcal{L}^*(X) - \mathcal{L}^*(X^\dagger) X.$$

Упражнение. Если $\mathcal{L}$ — ГКСЛ-генератор, то

$$\mathcal{L}^*(X^\dagger X) - X^\dagger \mathcal{L}^*(X) - \mathcal{L}^*(X^\dagger) X \geqslant 0,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $[L_j, X] = 0$, $\forall j$.

Подалгебра без декогеренции

Утверждение. Если $X \in \mathcal{N}$

$$\Phi_t^*(X) = e^{iHt} X e^{-iHt}$$

Подалгебра без декогеренции

Доказательство. Дифференцируя

$$\Phi_t^*(X^\dagger X) = (\Phi_t^*(X))^\dagger \Phi_t^*(X),$$

имеем

$$\mathcal{L}^*(X^\dagger X) = X^\dagger \mathcal{L}^*(X) + \mathcal{L}^*(X^\dagger)X.$$

Поэтому в случае, когда X — элемент подалгебры без докегеренции

$$[L_j, X] = 0,$$

тогда

$$\mathcal{L}^*(X) = i[H, X]$$

Подалгебра без декогеренции

В силу инвариантности:

$$\mathcal{L}^*(\Phi_t^*(X)) = i[H, \Phi_t^*(X)]$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*(X) = i[H, \Phi_t^*(X)]$$

Итерируя:

$$\frac{d^k}{dt^k}\Phi_t^*(X) = (i[H, \ \cdot \ ])^k \Phi_t^*(X)$$

"Собирая" ряд Тейлора, получим

$$\Phi_t^*(X) = e^{iHt} X e^{-iHt}$$

Подалгебра без декогеренции

Равенство $[L_j, X] = 0$ выполнено для произвольных H соответствующих одному и тому же генератору ГКСЛ. Аналогично, $\Phi_t^*(X) = e^{iHt} X e^{-iHt}$.

Подалгебра без декогеренции — наибольшая *-алгебра такая, что $\Phi_t^*(X) = e^{iHt} X e^{-iHt}$, если X принадлежит данной алгебре.

Подалгебра без декогеренции как коммутант

Теорема. (Файолы–Реболледо)

$$\mathcal{N} = \{\partial_H^k(L_j), \partial_H^k(L_j^\dagger) | k \geqslant 0, j \geqslant 1\}',$$

где $'$ — коммутант (он не зависит от представления Линдблада), $\partial_H X \equiv -i[H, X]$.

- Fagnola, F., Rebolledo, R. (2008). Algebraic conditions for convergence of a quantum Markov semigroup to a steady state. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 11(03), 467-474.

Подалгебра без декогеренции как коммутант

Доказательство: В силу инвариантности и свойств алгебры как линейного пространства

$$X \in \mathcal{N} \Rightarrow \Phi_t^*(X) \in \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{L}^*(X) = \lim_{t \to +0} \frac{1}{t}(\Phi_t^*(X) - X) \in \mathcal{N},$$

тогда в силу $\mathcal{L}^*(X) = i[H, X]$ для $X \in \mathcal{N}$ имеем

$$\partial_H X \equiv -i[H, X] = -\mathcal{L}^*(X) \in \mathcal{N},$$

то есть

$$\partial_H \mathcal{N} \in \mathcal{N}$$

и

$$[L_j, \mathcal{N}] = 0, \qquad [L_j^\dagger, \mathcal{N}] = 0$$

— база индукции для $[\partial_H^k L_j, \mathcal{N}] = 0$, $[\partial_H^k L_j^\dagger, \mathcal{N}] = 0$.

Подалгебра без декогеренции как коммутант

Шаг индукции: В силу тождества Якоби

$$[\partial_H^{k+1} L_j, \mathcal{N}] = \partial_H [\partial_H^k L_j, \mathcal{N}] - [\partial_H^k L_j, \partial_H \mathcal{N}] = 0$$

Аналогично, $[\partial_H^{k+1} L_j^\dagger, \mathcal{N}]$, поэтому

$$\mathcal{N} \subseteq \{\partial_H^k (L_j), \partial_H^k (L_j^\dagger) | k \geqslant 0, j \geqslant 1\}'$$

Подалгебра без декогеренции как коммутант

В обратную сторону: если $X \in \{\partial_H^k(L_j),\partial_H^k(L_j^\dagger)|k \geqslant 0, j \geqslant 1\}'$, то
$$[L_j, X] = 0, \qquad [L_j^\dagger, X] = 0,$$
поэтому
$$\mathcal{L}^*(X) = -\partial_H X$$
далее аналогичная индукция с помощью тождества Якоби даёт $(\mathcal{L}^*)^k(X) = (-\partial_H)^k X$.

Пример: двухуровневая система

$$H = \omega_0 \sigma^+ \sigma^-$$

$$\{L_1, L_2, L_3\} = \{\sqrt{\gamma_0 (N+1)} \sigma_-, \sqrt{\gamma_0 N} \sigma_+, \sqrt{\gamma_{\mathrm{ph}}} \sigma_z\}$$

$$\partial_H L_1 = -i\omega_0 L_1, \qquad \partial_H L_1^\dagger = i\omega_0 L_1^\dagger$$

$$\partial_H L_2 = i\omega_0 L_2, \qquad \partial_H L_2^\dagger = -i\omega_0 L_1^\dagger$$

$$\partial_H L_3 = 0$$

Пример: двухуровневая система

При $\gamma_0 > 0$, $\gamma_{\mathrm{ph}} > 0$

$$\{\partial_H^k(L_j),\partial_H^k(L_j^\dagger)|k \geqslant 0, j \geqslant 1\}' = \{\sigma_-, \sigma_+, \sigma_z\}' = \{cI : c \in \mathbb{C}\}$$

При $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{\mathrm{ph}} > 0$

$$\{\partial_H^k(L_j),\partial_H^k(L_j^\dagger)|k \geqslant 0, j \geqslant 1\}' = \{\sigma_z\}' = \{c_1 I + c_2 \sigma_z : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

Пример: случай генератора ГКСЛ общего положения

$$L_{ij} = \sqrt{\gamma_{ij}}|i\rangle\langle j|,\ \gamma_{ij} \geqslant 0$$

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(|i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| - \frac{1}{2}|j\rangle\langle j|\rho - \frac{1}{2}\rho|j\rangle\langle j| \right)$$

$$H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$$

$$\partial_H L_{ij} = -i(\varepsilon_i - \varepsilon_j) L_{ij}$$

$$\begin{aligned}\{\partial_H^k(L_{ij}), \partial_H^k(L_{ij}^\dagger) | k \geqslant 0, j \geqslant 1\}' &= \{L_{ij}, L_{ij}^\dagger | i, j \geqslant 1\}' \\ &= \{|i\rangle\langle j|, |j\rangle\langle i| : \gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0\}'\end{aligned}$$

Пример: случай генератора ГКСЛ общего положения

$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0$

$$X|i\rangle\langle j| = |i\rangle\langle j|X$$
$$X|i\rangle = |i\rangle\langle j|X|j\rangle,$$

— не зависит от j, поэтому если $\forall i_k \in \mathcal{C}_k$, где $\mathcal{C}_k$ — множество вершин, которые можно соединить переходами $i - j$, что $\gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0$

$$X|i_k\rangle = x_{\mathcal{C}_k}|i_k\rangle$$

Пример: случай генератора ГКСЛ общего положения

$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0$

$$X|i\rangle\langle j| = |i\rangle\langle j|X$$
$$X|i\rangle = |i\rangle\langle j|X|j\rangle,$$

— не зависит от j, поэтому если $\forall i_k \in \mathcal{C}_k$, где $\mathcal{C}_k$ — множество вершин, которые можно соединить переходами $i - j$, что $\gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0$

$$X|i_k\rangle = x_{\mathcal{C}_k}|i_k\rangle$$

Сюда попадут все $|i\rangle$, кроме тех, которые изолированы от других, то есть для которых $\gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 0, \forall j$ (включая $j = i$). Обозначим их Iso.

Пример: случай генератора ГКСЛ общего положения

$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0$

$$X|i\rangle\langle j| = |i\rangle\langle j|X$$

$$X|i\rangle = |i\rangle\langle j|X|j\rangle,$$

— не зависит от j, поэтому если $\forall i_k \in \mathcal{C}_k$, где $\mathcal{C}_k$ — множество вершин, которые можно соединить переходами $i - j$, что $\gamma_{ij} + \gamma_{ji} > 0$

$$X|i_k\rangle = x_{\mathcal{C}_k}|i_k\rangle$$

Сюда попадут все $|i\rangle$, кроме тех, которые изолированы от других, то есть для которых $\gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 0, \forall j$ (включая $j = i$). Обозначим их Iso.

Таким образом, $X \in \mathcal{N}$ имеет вид

$$X = \sum_k x_{\mathcal{C}_k} \sum_{i_k \in \mathcal{C}_k} |i_k\rangle\langle i_k| + \sum_{ij \in \mathrm{Iso}} X_{ij}^{\mathrm{Iso}} |i\rangle\langle j|.$$

Канонический вид *-алгебры и коммутанта

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ — матричная $*$-алгебра содержащая I_n и $\mathcal{A}'$ - её коммутант, тогда

1. $\mathcal{A}'$ — матричная $*$-алгебра
2. Центры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ совпадают и равны $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$.
3. $\exists$ унитарная матрица U

$$\mathcal{A} = U \left(\bigoplus_{k=1}^{K} \mathbb{C}^{n_k \times n_k} \otimes I_{m_k} \right) U^\dagger$$

$$\mathcal{A}' = U \left(\bigoplus_{k=1}^{K} I_{n_k} \otimes \mathbb{C}^{m_k \times m_k} \right) U^\dagger$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = U \left(\bigoplus_{k=1}^{K} \mathbb{C} I_{n_k} \otimes I_{m_k} \right) U^\dagger$$

- S. Moudgalya, O. I. Motrunich. Hilbert space fragmentation and commutant algebras. Phys. Rev. X 12.1 (2022): 011050.

Канонический вид ГКСЛ-генератора с подалгеброй без декогеренции

Теорема. Если представить алгебру без декогеренции в каноническом виде

$$\mathcal{N} = U\left(\bigoplus_{k=1}^{K} \mathbb{C}^{n_k \times n_k} \otimes I_{m_k}\right)U^{\dagger}, \quad U \in U(n),$$

то для любого вида Линдблада генератора ГКСЛ

$$H = U\left(\bigoplus_{k=1}^{K} \tilde{H}_k \otimes I_{m_k} + I_{n_k} \otimes H_k\right)U^{\dagger},$$

где $\tilde{H}_k = \tilde{H}_k^{\dagger} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}, H_k = H_k^{\dagger} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}$

$$L_l = U\left(\bigoplus_{k=1}^{K} I_{n_k} \otimes L_{l,k}\right)U^{\dagger}, \qquad L_{l,k} \in \mathbb{C}^{m_k \times m_k}.$$

Канонический вид ГКСЛ-генератора с подалгеброй без декогеренции

Более того, если определить

$$\tilde{H} \equiv U \left(\bigoplus_{k=1}^{K} \tilde{H}_k \otimes I_{m_k} \right) U^\dagger$$

и разложить

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\mathrm{df}} + \mathcal{L}^{\mathrm{da}}, \qquad \mathcal{L}^{\mathrm{df}} = -i[\tilde{H}, \cdot\,],$$

то

$$e^{\mathcal{L}t} = e^{\mathcal{L}^{\mathrm{df}}t} e^{\mathcal{L}^{\mathrm{da}}t} = e^{\mathcal{L}^{\mathrm{da}}t} e^{\mathcal{L}^{\mathrm{df}}t},$$

$$e^{(\mathcal{L}^{\mathrm{da}})^* t} \mathcal{N} = \mathcal{N}, \quad e^{(\mathcal{L})^* t} \mathcal{N} = e^{i[\tilde{H}, \cdot\,]t} \mathcal{N}$$

- Deschamps, J., Fagnola, F., Sasso, E., Umanità, V. (2016). Structure of uniformly continuous quantum Markov semigroups. Rev. Math. Phys., 28(01), 1650003.