Характер Черна квантуемого пучка

Владимир Барановский

Университет Калифорнии - Ирвайн

21 ноября 2024 г.

Оглавление

Результат (совместно с В. Гинзбургом)

X - гладкое алгебраическое симплектическое многообразие над полем характеристики 0;

E - когерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей с носителем на подмногообразии $Y \subset X$ (например возникающий из векторного расслоения на Y);

$\mathcal{O}_\hbar$ - деформационное квантование функций на X с классом

$$c(\mathcal{O}_\hbar) = \frac{1}{\hbar}\omega + \omega_0 + \hbar\omega_1 + \ldots \in \frac{1}{\hbar}H^2_{dR}(X)[[\hbar]].$$

Если E допускает деформационное квантование $E_\hbar$ над $\mathcal{O}_\hbar$, то однородные компоненты степени $2r$ характеристического класса

$$\tau_Y(E, \mathcal{O}_\hbar) := ch_Y(E) \cdot \widehat{A}(T_X) \cdot e^{c(\mathcal{O}_\hbar)} \in H^\bullet_Y(X)[\hbar^{-1}, \hbar]]$$

(где $H^\bullet_Y(X) = H^\bullet_{dR}(X, X \setminus Y)$) равны нулю при

$$0 \leq r < \dim(X) - \dim(Y); \qquad \frac{1}{2}\dim(X) < r \leq \dim(X).$$

Деформационное квантование

Определения

Пусть $\omega \in H^0(X, \Omega_X^2)$ - алгебраическая симплектическая форма на X с индуцированной скобкой Пуассона $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ на пучке $\mathcal{O}_X$ регулярных функций на X.

Деформационное квантование $\mathcal{O}_X$ это пучок $\mathcal{O}_\hbar$ ассоциативных плоских $\mathbb{C}[[\hbar]]$ алгебр (полных и отделимых в $\hbar$-адической топологии), вместе с изоморфизмом пучков алгебр $\sigma : \mathcal{O}_\hbar/(\hbar) \simeq \mathcal{O}_X$, таким что

$$\sigma\left(\tfrac{1}{\hbar}(ab - ba)\right) = \{\sigma(a), \sigma(b)\}, \qquad \forall a, b \in \mathcal{O}_\hbar.$$

Деформационное квантование когерентного пучка E модулей над $\mathcal{O}_X$ это плоский над $\mathbb{C}[[\hbar]]$ пучок $E_\hbar$ модулей над $\mathcal{O}_\hbar$ (полных и отделимых в $\hbar$-адической топологии), вместе с изоморфизмом пучков $\mathcal{O}_X$ модулей $\sigma_E : E_\hbar/\hbar E_\hbar \simeq E$.

Существование

В алгебраической ситуации, Безрукавников и Каледин [BK, 2004] определили алгебраический аналог класса Деліня-Федосова

$$c(\mathcal{O}_\hbar) = \frac{1}{\hbar}\omega + \omega_0 + \hbar\omega_1 + \ldots \in \frac{1}{\hbar}H^2_{dR}(X)[[\hbar]].$$

и доказали, что при $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X)$ отображение $\mathcal{O}_\hbar \mapsto c(\mathcal{O}_\hbar)$ индуцирует биекцию между множеством классов эквивалентности деформационных квантований и аффинным пространством $\frac{1}{\hbar}\omega + H^2_{dR}(X)[[\hbar]]$.

Если E - прямой образ расслоения на гладком подмногообразии $Y \subset X$ из теоремы Габбера следует, что для существования квантованного пучка $E_\hbar$ его носитель Y должен быть коизотропным (то есть $\{I_Y, I_Y\} \subset I_Y$, где I_Y-идеал функций, зануляющихся на Y). Это необходимое, но не достаточное условие.

Случай гладкого Лагранжевого подмногообразия

Пусть Y - гладкое Лагранжево подмногообразие ($\dim(Y) = \frac{1}{2}\dim(X)$, $\omega|_Y = 0$) и E - прямой образ расслоения ранга e на Y (обозначим его тоже E). Пусть $E_\hbar$ существует и $J_Y := \sigma^{-1}(I_Y) = \hbar\mathcal{O}_\hbar + I_Y \subset \mathcal{O}_\hbar$. Тогда $J_Y \cdot E_\hbar \subset \hbar E_\hbar$ и потому получаем отображение

$$(J_Y/J_Y^2) \times E \to \hbar E_\hbar/\hbar^2 E_\hbar \simeq E$$

Theorem

Формула $[a,b] = \frac{1}{\hbar}(ab - ba)(mod\ J_Y^2)$ индуцирует скобку Ли на пучке J_Y/J_Y^2 и построенное выше отображение индуцирует морфизм пучков алгебр Ли:

$$J_Y/J_Y^2 \to At_{\mathcal{O}_Y}(E)$$

где алгебра Атьи $At_{\mathcal{O}_Y}(E)$ - пучок алгебрачеських дифференциальных операторов 1 порядка на E со скалярным символом. В $H^\bullet_{DR}(Y)$ имеем

$$\frac{1}{e}c_1(E) = \omega_0|_Y + \frac{1}{2}c_1(K_Y), \qquad ch(E) = e \cdot exp(\frac{1}{e}c_1(E))$$

Для ранга $e = 1$ результат доказан в [VB-Ginzburg-Kaledin-Pecharich, 2016], для общего e в [VB-Chen, 2017]. Для пучка J_Y/J_Y^2 имеется точная последовательность

$$0 \to \hbar\mathcal{O}_Y \to J_Y/J_Y^2 \to I_Y/I_Y^2 \simeq T_Y \to 0,$$

его действие на E индуцирует плоскую структуру на $\mathbb{P}(E)$, а класс $\tau_Y(E, \mathcal{O}_\hbar)$ является прямым образом $e \cdot [Y] \in H^0(Y)$.

Если Y - гладкое коизтропное, проективно плоская связность имеется только вдоль нуль слоения $I_Y/I_Y^2 \simeq N^* \hookrightarrow T_Y$. [VB, 2024]

Гомологии категорий

Определения

Пусть A алгебра с единицей над полем k и $\overline{A} = A/k \cdot 1$. Определим комплекс $C(A)$ с компонентами $A \otimes (\overline{A})^{\otimes n}$ в когомологической степени $(-n)$ и дифференциалами Хохшильда и Конна

$$b : A \otimes (\overline{A})^{\otimes n} \to A \otimes (\overline{A})^{\otimes (n-1)}, \qquad B : A \otimes (\overline{A})^{\otimes n} \to A \otimes (\overline{A})^{\otimes (n+1)}$$

заданными обычными формулами

$$b(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$$

$$B(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{in} 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}$$

Вводя формальную переменную u степени 2, имеем тождество $(b + uB)^2 = 0$ и определены две версии циклических гомологий

$$HC_\bullet^- = H^{-\bullet}(C(A)[[u]], b+uB), \quad HC_\bullet^{per} = H^{-\bullet}(C(A)[u^{-1}, u]], b+uB).$$

Определения

Эти определения можно обобщить в нескольких направлениях

- Заменить A на k-линейную категорию, понимая a_i как морфизмы, а $a_i a_{i+1}$ и $a_n a_0$ - их композиции (корректно определённые)
- Заменить A на dg алгебру или dg-категорию, учитывая градуировку и подправив b на внутренний дифференциал
- Рассмотреть версию для производных категорий с оснащением. Например, начать с категории ограниченных комплексов конечно порождённых проективных A-модулей, и отфакторизовать по подкатегории ацикличных комплексов. Использовать конус морфизма, индуцированного вложением подкатегории в категорию.
- Для пучка $\mathcal{A}$ алгебр над полем k на топологическом пространстве X построить комплексы пучков и вычислить их гиперкогомологии.

Определения

Эти определения согласованы: циклические гомологии k-алгебры A изоморфны циклическим гомологиям категории проективных модулей над A и производной категории совершенных комплексов над A (McCarthy 1994, Keller 1998). Для случая структурного пучка $\mathcal{O}_X$ на гладком алгебраическом многообразии X гомологии, построенные по категории конечных комплексов векторных расслоений, совпадают с гиперкогомологиями пучковизации стандартной конструкции, применённой к $\mathcal{O}_X$ (Keller, 1998).

Для $A = k$ имеется естественный класс $[1] \in HC_0^-(k)$. Рассматривая объект $P \in Ob(\mathcal{C})$ в k-линейной категории $\mathcal{C}$ как функтор $(\cdot) \otimes_k P$, из категории k модулей в $\mathcal{C}$, определим характер Черна $ch(P)$ как образ $[1]$ в $HC_0^-(\mathcal{C})$. Такую версии конструкции характера Черна использовали Бресслер, Нест и Цыган в [BNT, 1997]. Часто рассматривают образ характера Черна в HC_0^{per}, поскольку с этой группой чуть проще работать.

Теорема Хохшильда-Костанта-Розенберга и варианты

Коммутативный случай

Комплекс $(C(A), b, B)$ с дифференциалами степеней 1 и -1, соответственно, можно рассомтреть как dg модуль над dg алгеброй $\Lambda = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ с нулевым дифференциалом и переменной ε степени -1. Для алгебры A функций на гладком афинном многообразии отображение $a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \mapsto a_0 da_1 \wedge \ldots \wedge da_n$ индуцирует квазиизоморфизм dg модулей над Λ (теорема Хохшильда-Костанта-Розенберга):

$$(C(A), b, B) \simeq (\Omega_A^\bullet, 0, d_{dR})$$

Для общего гладкого многообразия X и комплексов расслоений с носителем на $Y \subset X$, имеется обобщение [Weibel, 1997]:

$$HC_{0,Y}^{-}(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{0 \leq r \leq \dim(X)} H_Y^{2r}(X, \Omega_X^{\geq r})$$

$$HC_{0,Y}^{per}(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{0 \leq r \leq \dim(X)} H_Y^{2r}(X).$$

Квантование (В. Гинзбург, В.Б.)

Theorem

Пусть $\mathcal{O}_\hbar$ деформационное квантование структурного пучка $\mathcal{O}_X$ гладкого алгебраического симплектического многообразия (X, ω), $C(\mathcal{O}_\hbar, b, B)$ смешанный комплекс $\mathcal{O}_\hbar$ и $\pi = \omega^{-1}$ - бивектор Пуассона. Существует квазиизоморфизм смешанных комплексов

$$(C(\mathcal{O}_\hbar), b, B) \simeq (\Omega_X^{-\bullet}((\hbar)), \hbar L_\pi, d_{DR}).$$

Для замкнутого подмногообразия $Y \subset X$ и локализации $\mathcal{O}_{(\hbar)}$ пучка $\mathcal{O}_\hbar$ по $\hbar$ индуцируются изоморфизмы (ко)гомологий с носителями на Y:

$$HC^{-}_{0,Y}(X, \mathcal{O}_{(\hbar)}) \simeq \bigoplus_{0 \le r \le \frac{1}{2}\dim(X)} H_Y^{2r}(X)((\hbar))$$

$$HC^{per}_{0,Y}(X, \mathcal{O}_{(\hbar)}) \simeq \bigoplus_{0 \le r \le \dim(X)} H_Y^{2r}(X)((\hbar))$$

Голоморфный случай этого утверждения можно вывести из результатов [Bressler-Nest-Tsygan, 2002] хотя он не сформулирован там явно. Методы вычислений в конечно счёте опираются на вычисление циклческих гомологий полиномиальной алгебры Вейля, проделанное в работе Фейгина и Цыгана.

Прямым следствием является тот факт, что для любого квантования $E_\hbar$ с носителем в Y, образ характера Черна $ch(E_\hbar)$ в $HC^{per}_{0,Y}$ имеет нулевые компоненты при $r = \frac{1}{2}\dim(X) + 1, \ldots, \dim(X)$.

Осталось лишь посчитать этот класс через $ch(E)$ и инварианты пары $(X, \mathcal{O}_\hbar)$. Ответ уже известен из работ Федосова и Неста-Цыгана, где этот класс использовался в теореме об индексе.

Характер Черна: коммутативный и квантовый

Коммутативный случай

Для когерентного пучка E модулей над $\mathcal{O}_X$ с носителем на $Y \subset X$ (или комплекса алгебраических расслоений с когомологиями на Y) Иверсен определил в [Iv, 1976] характер Черна $ch_Y(E)$ с носителем на Y, принимающий значения в $\bigoplus H_Y^{2r}(X)$. Это определение согласовано с обычным определением для $X = Y$ и такое продолжение на когомологии с носителем единственно.

Поскольку для $Y = X$ характер Черна, определённый через циклические гомологии [Toën-Vezzozi, 2015], совпадает с классическим, это же верно для версии с носителем в $Y \subset X$.

Случай квантования (В. Гинзбург, В.Б.)

Чтобы сформулировать теорему сравнения с коммутативным случаем, напомним определение $\widehat{A}$-рода расслоения F с корнями Чженя $\xi_1, \ldots, \xi_f$, где $f = rk(F)$:

$$\widehat{A}(F) := \prod_{i=1}^{f} \det\left(\frac{\xi_i/2}{e^{\xi_i/2} - e^{-\xi_i/2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem

Пусть $E_\hbar$ - деформационное квантование пучка E. Тогда образ $ch(E_\hbar)$ в

$$HC^{per}_{0,Y}(X, \mathcal{O}_{(\hbar)}) \simeq \bigoplus_{0 \le r \le \dim(X)} H^{2r}_Y(X)((\hbar))$$

даётся выражением

$$\tau_Y(E, \mathcal{O}_\hbar) := ch_Y(E) \cdot \widehat{A}(T_X) \cdot e^{c(\mathcal{O}_\hbar)}$$

О доказательствах

- Согласование разных версий циклических когомология для $\mathcal{O}_\hbar$ доказывается имитируя рассуждение Келлера для $\mathcal{O}_X$.
- Сначала вычисления проводятся в локальном случае, для квантования алгебры формальных степенных рядов (алгебры Вейля). Затем доказывается их версия для классов когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$ формальных дифференцирования алгебры Вейля - все локальные утверждения уже доказаны в [Bressler-Nest-Tsygan, 2002], [Nest-Tsygan, 1995] и [Shoikhet, 2003].
- Вычисления глобализуются, используя подход торсоров Хариш-Чандры, как в [Bezrukavnikov-Kaledin, 2004], и отображение Гельфанда-Фукса.

Источники

Источники

[B] V. Baranovsky: *Chern classes of quantizable coisotropic bundles*, Journal of Noncommutative Geometry, **18** (2023), 37–59.

[BC] V. Baranovsky, T. Chen, *Quantization of Vector Bundles on Lagrangian Subvarieties*, International Math. Res. Notices **12** (2017).

[BGKP] V. Baranovsky, V. Ginzburg, D. Kaledin, J. Pecharich, *Quantization of line bundles on lagrangian subvarieties.* Selecta Math. **22** (2016), 1–25.

[BK] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, *Fedosov quantization in algebraic context.* Mosc. Math. J. **4** (2004), 559–592.

[BNT] P. Bressler, R. Nest, B. Tsygan, *Riemann-Roch theorems via deformation quantization* II. Adv. Math. **167** (2002), 26-73.

Источники

[DTT] V. Dolgushev, D. Tamarkin, B. Tsygan, *Formality theorems for Hochschild complexes and their applications.* Lett. Math. Phys. **90** (2009), 103–136.

[FFS] B. Feigin, G. Felder, B. Shoikhet, *Hochschild cohomology of the Weyl algebra and traces in deformation quantization*, Duke Math. Journal **127** (2005), 487–517.

[GKN] A. Gorokhovsky, N. Kleijn, R. Nest, *Equivariant Algebraic Index Theorem.* J. Institute of Mathematics of Jussieu **20** (3) 2017.

[Iv] B. Iversen, *Local Chern classes.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), 155–169.

[Ke] B. Keller, *On the cyclic homology of Ringed Spaces and Schemes.* Doc. Math. **3** (1998), 231–259.

Источники

[Lo] J.-L. Loday, *Cyclic homology*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **301**, Springer-Verlag, 1998.

[NT] R. Nest, B. Tsygan, *Algebraic index theorem.* Comm. Math. Phys. **172** (1995), 223–262.

[Sh] B. Shoikhet, *A proof of the Tsygan formality conjecture for chains.* Adv. Math. **179** (2003), 7–37.

[TV] B. Toën, G. Vezzosi, *Caractéres de Chern, traces équivariantes et géométrie algébrique dérivée.* Selecta Math. **21** (2015), 449–554.

[VdB] M. Van den Bergh, *On global deformation quantization in the algebraic case.* J. Algebra. **315** (2007), 326–395.

[We] C. Weibel, *The Hodge filtration and cyclic homology.* K-Theory. **12** (1997), 145–164.

Спасибо за внимание!