Лемма Фекете в банаховых пространствах

Куликов Алексей

Классическая лемма Фекете утверждает, что если последовательность чисел a_n удовлетворяет неравенству $a_{n+m} \le a_n + a_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, то предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ существует. В данном докладе мы обсудим обобщения этой леммы на случай, когда a_n являются элементами некого банахова пространства. Основным результатом, доказательство которого будет представлено, является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X равномерно выпуклое банахово пространство и $a_n \in X$ – последовательность векторов такая, что $||a_{n+m}|| \le ||a_n + a_m||$ выполнено для всех $n, m \in \mathbb{N}$, то предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ существует.*

При этом условие равномерной выпуклости существенно – если X не выпукло (то есть, если единичная сфера содержит отрезок), то несложно убедиться, что теорема неверна, но даже для выпуклых, но не равномерно выпуклых банаховых пространств могут найтись контрпримеры.

Если останется время, мы также обсудим обобщения леммы Фекете, которые ограничивают множество пар (n, m) для которых неравенство верно. Оказывается, некоторые из них перестают быть верными уже для двухмерных пространств X.

Доклад основан на совместной работе с Feng Shao.