

О супремальных неравенствах Харди ¹

В.Д. Степанов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: stepanov@mi-ras.ru

Семинар Лаборатории № 45

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. Москва, 28 ноября 2024 г.)

Аннотация

Обозначим $\mathfrak{M}(I)$ класс всех функций на $I := (0, \infty)$, измеримых по Лебегу, $\mathfrak{M}^+(I) \subset \mathfrak{M}(I)$ - подмножество неотрицательных функций. В 1925 Г. Г. Харди доказал неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty [f(t)]^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^+(I), \quad (1)$$

которое выполняется для всех $1 < p < \infty$ и где константа $p' := \frac{p}{p-1}$ наилучшая из возможных. Неравенство (1) обобщалось во многих направлениях и оно имеет эквивалентную дифференциальную форму

$$\left(\int_0^\infty \frac{|u(x)|^p}{x^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p' \left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

где u локально абсолютно непрерывная функция на I ($u \in AC(I)$) такая, что $\liminf_{t \rightarrow 0} |u(t)| = 0$.

В работе

[FLW] R. L. Frank, A. Laptev, T. Weidl, An improved one-dimensional Hardy inequality, J. Math. Sci. 263 (2022) 323–342

рассмотрено следующее улучшение неравенства (2)

$$\left(\int_0^\infty \max \left\{ \sup_{0 < s \leq x} \frac{|u(s)|^p}{x^p}, \sup_{x \leq s < \infty} \frac{|u(s)|^p}{s^p} \right\} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p' \left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

Неравенство (3) эквивалентно одновременному выполнению двух неравенств

$$\left(\int_0^\infty \sup_{0 < s \leq x} \frac{|u(s)|^p}{x^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p' \left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4)$$

и

$$\left(\int_0^\infty \sup_{x \leq s < \infty} \frac{|u(s)|^p}{s^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p' \left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

В статье [FLW] показано, что (4) и (5) эквивалентны (6) и (7), соответственно, где

$$\int_0^\infty W(s) |u(s)|^p ds \leq (p-1)[p']^p \left(\sup_{s>0} s^{p-1} \int_s^\infty W(t) dt \right) \int_0^\infty |u'(x)|^p dx \quad (6)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект 24-11-00170.

и

$$\int_0^\infty W(s)|u(s)|^p ds \leq [p']^p \left(\sup_{s>0} s^{-1} \int_0^s t^p W(t) dt \right) \int_0^\infty |u'(x)|^p dx, \quad (7)$$

где $W \in \mathfrak{M}^+(I)$. Доказательство основано на специфических неравенствах типа Гельдера. Именно, (4) $\Rightarrow$ (6) следует применением

$$\int_0^\infty f(s)g(s)ds \leq (p-1) \left(\int_0^\infty \operatorname{ess\,sup}_{0<s\leq x} f(s) \frac{dx}{x^p} \right) \left(\sup_{t>0} t^{p-1} \int_t^\infty g(s)ds \right) \quad (8)$$

для всех $f, g \in \mathfrak{M}^+(I)$. Также авторы [FLW] получают двухвесовые обобщения неравенств Харди и формулируют проблему: характеризовать

$$J(g) := \sup_{0 \neq f \in \mathfrak{M}^+(I)} \frac{\int_0^\infty f(s)g(s)ds}{\int_0^\infty \max \left\{ \frac{1}{x^p} \operatorname{ess\,sup}_{0<s\leq x} f(s), \operatorname{ess\,sup}_{x\leq s\leq \infty} \frac{f(s)}{s^p} \right\} dx}, \quad g \in \mathfrak{M}^+(I). \quad (9)$$

В докладе дается решение указанной проблемы и обобщения для $L_p - L_q$ неравенств Харди, когда $1 < p < q < \infty$.