



Общее собрание Отделения математических наук РАН,
Москва, 9 декабря 2024 года



Задачи астродинамики, возникающие при освоении дальнего космоса малыми космическими аппаратами, и их решение методами современной математики

М.Ю. Овчинников (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)



Астродинамика



- Астродинамика - дисциплина прикладной математики, изучающая орбитальное и вращательное движение космических аппаратов (КА)
- Наследует от небесной механики подходы к описанию естественного (неуправляемого) движения небесных тел - модели (задача двух тел, ограниченная задача трёх тел и т.п.), методы (асимптотические методы теории возмущений, методы теории динамических систем)
- Возможность управления движением КА порождает новые математические задачи
- С математической точки зрения, объектами исследования в астродинамике выступают управляемые динамические системы (ДС)
- С точки зрения текущего доклада объектом исследования являются межпланетные траектории малых космических аппаратов (МКА)



Объекты и цели



- Объект проекта – МКА с сухой массой до 100 кг (малый не только по массе и размеру, а и по идеологии разработки, диктуемой ограниченным ресурсом управления и высокими рисками миссии)
- Цель проекта – построение межпланетных миссий на базе МКА в коопeração
 - с организациями Роскосмоса
 - с частными отечественными компаниями
- Цель исследования – разработка межпланетной логистики МКА с использовании методов астродинамики с учетом ограниченности его ресурсов



Мотивация использования МКА

потребности

Почему МКА?

+ обстоятельства

+ возможности

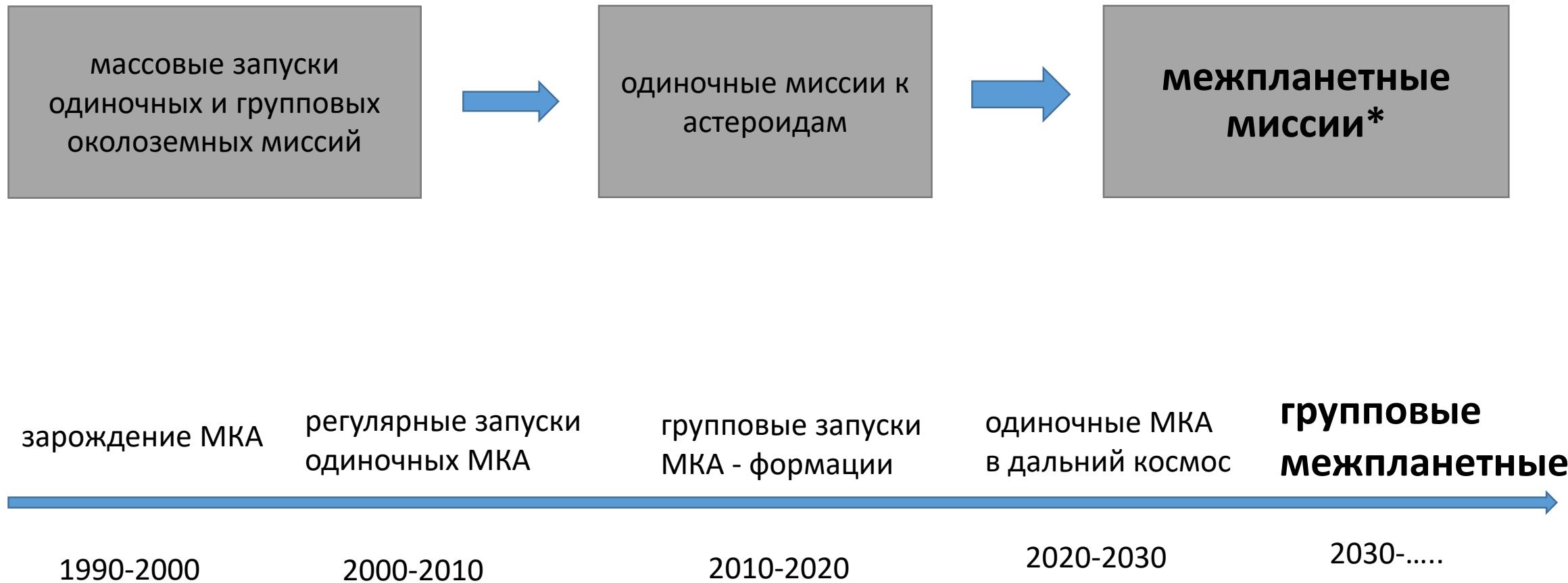
научные исследования
развитие технологий
поддержание статуса
освоение планет

мировая конкуренция
ограниченность ресурсов
интерес гос и частников

миниатюризация
околоземные миссии
математика



Тенденции в развитии миссий на базе МКА





Об использовании методов астродинамики



- существует распространённое мнение, что для прикладных задач нужны более простые, инженерные подходы
- в астродинамике дело обстоит наоборот: чем задача более прикладная, тем больше ограничений и требований необходимо учесть => нужно использовать более сложную модель и/или более эффективные методы => требуется более высокая математическая квалификация
- тем самым, реализован переход инженерных проблем в математические, решение которых потребовало изощренных подходов (аналитика, численные и нетрадиционные методы, позволяющие в итоге получить наглядные результаты)



Гибридная схема миссии



- Этапы гибридной схемы миссии:
 - МКА совместно с основной полезной нагрузкой (ОПН) выводится на низкую околоземную орбиту (*без целевого запуска РН**)
 - после отделения ОПН от РБ межпланетный МКА на резервных остатках топлива с помощью РБ выводится на отлетную траекторию (*без целевого РБ**)
 - ЭРДУ обеспечивает межпланетный перелет и выход на орбиту вокруг планеты назначения (*достаточно экономичного двигателя с малой тяги*)
- Цена гибридной схемы - необходимо глубокое математическое исследование всей баллистической цепочки миссии:
 - с использованием методов оптимизации с жесткими и многочисленными ограничениями (это - цена "малости" КА) на большом количестве параметров (в т.ч. двухуровневая оптимизация),
 - выбором начального приближения (нейросетевой подход для обучения с подкреплением) на большом массиве виртуальных траекторий (построение датасета на многокластерной ЭВМ)



Сложности проектирования миссии к Марсу



- протяженная траектория требует баланса между баллистическими требованиями наряду с вековыми внешними воздействиями и слабой возможностью их выполнения и парирования
- решение оптимизационной задачи (минимизация топлива) требует учета конструкционных и временных ограничений (ограниченное моторное время ЭРД, фиксированное время попутного запуска, орбита попутного запуска, фаза Марса, радиационное воздействие на приборы и т.д.)
- требуется получение хорошего начального приближения (используется разработанный метод виртуальных траекторий, реализованный на многокластерной ЭВМ)



Сложности проектирования миссии к Луне



- использование иерархии моделей разной степени точности/детальности (задача двух тел, круговая ограниченная задача трёх тел, бикруговая ограниченная задача четырёх тел, высокоточная эфемеридная модель)
- многовитковые гравитационные маневры в системе Земля-Луна для увеличения энергии в рамках задачи трех тел и выхода на задачу четырех тел (+Солнце)
- тонкий учет влияния Солнца для использования чувствительного к начальным приближениям метода разведения МКА по рабочим орбитам вокруг Луны при выходе за границу грависферы Земли



Внешний облик и габариты МКА «Марсик»



Размеры платформы (без панелей СБ): **1150 x 800 x 500** мм

Панели СБ: Si ФЭП, 2 крыла по 3 панели **800 x 900** мм

Общая площадь раскрытых панелей СБ: **4.32 м²**

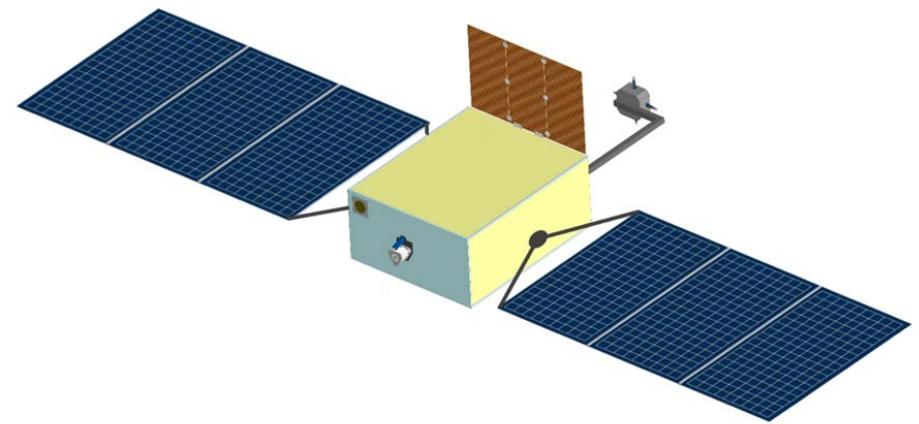
Максимальная мощность, снимаемая с панелей
(с учётом 85% КПД СЭП, но без учёта деградации,
мощность рассчитана АО РКС):

- на орбите Земли **690...738** Вт (в среднем 713 Вт)
- на орбите Марса **257...374** Вт (в среднем 306 Вт)

Сухая масса: **92** кг

Масса полезной нагрузки (ПН), не более: **15** кг

Размера модуля ПН: **800 x 500 x 400** мм



Внешний облик платформы микрокласса

Совместная проработка АО РКС, АО ОКБ Факел, ИКИ РАН, ИПМ РАН, ИМБП РАН



Двухуровневая оптимизация межпланетной траектории



Внешний оптимизатор:

9 параметров – параметры терминальных многообразий

Используется метод внутренней точки (MATLAB fmincon)

Вызывается внутренний оптимизатор на каждом шаге оптимизации

Внутренний оптимизатор:

7 параметров – значения сопряжённых переменных на левом конце

Внешние параметры фиксированы

Используется метод внутренней точки (MATLAB fmincon)

Начальное приближение внешних параметров

Построение оптимальной траектории с фиксированными внешними параметрами

Оптимизация внешних параметров межпланетного перелёта



Оптимальная траектория перелёта Земля–Марс и “скрутка” у Марса



Дата старта: 8 октября 2026 года

Длительность перелёта Земля–Марс: 420 суток

Полная стартовая/сухая масса: 156/92 кг

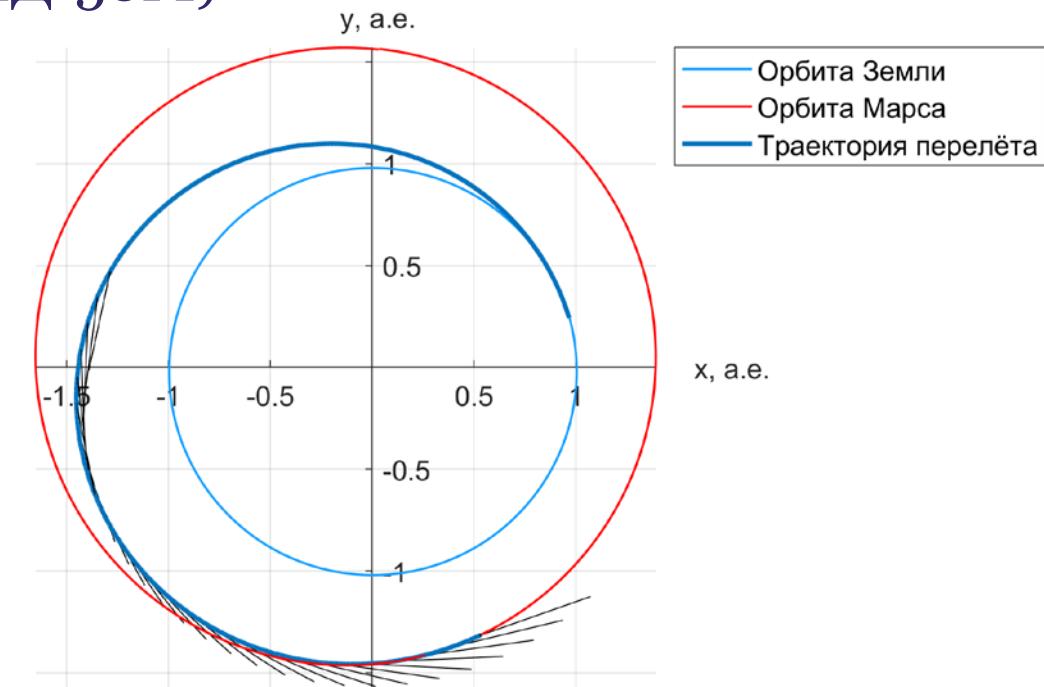
Моторное время: 256+150 суток (2 СПД-50М)

Затраты ксенона: **37.6+23.4** кг (с учётом 30%
на парирование эксцентриситета тяги СПД-50М)

Отлётный импульс на орбите 200 км: **3 579** м/с

Гиперболический избыток скорости при отлёте
МКА от Земли: **2 812** м/с

Рабочая орбита у Марса: **300 x 10 000** км, **86.3°**





Два типа попутных перелётов малых аппаратов к Луне



Прямой перелёт (*direct lunar transfer*):

- Малый аппарат отделяется от основной полезной нагрузки (ПН) на быстрой (4–6 суток) траектории перелёта к Луне, но, не имея возможности выполнить большой тормозной манёвр, выходит на высокоэллиптическую околоземную орбиту и выполняет один или несколько лунных гравитационных манёвров, чтобы обеспечить условия баллистического захвата аппарата Луной

Обходной перелёт (*Sun-assisted/ballistic lunar transfer*):

- Малый КА отделяется от основной ПН и выходит на обходную (3–6 месяцев) траекторию перелёта к Луне: в области апогея гравитационное возмущение от Солнца обеспечивает условия баллистического захвата КА Луной (подъём перигея орбиты и изменение наклонения)



Попутный прямой перелёт: миссия EQUULEUS (JAXA)



Дата старта: 16 ноября 2022 года

Выход на гало-орбиту вокруг EM L2:
не выполнен из-за потери связи с МКА

Отлётная энергия (C3): $-2.0 \text{ км}^2/\text{с}^2$

Стартовая масса КА (6U кубсат): 10.5 кг

Масса топлива (вода): 1.2 кг

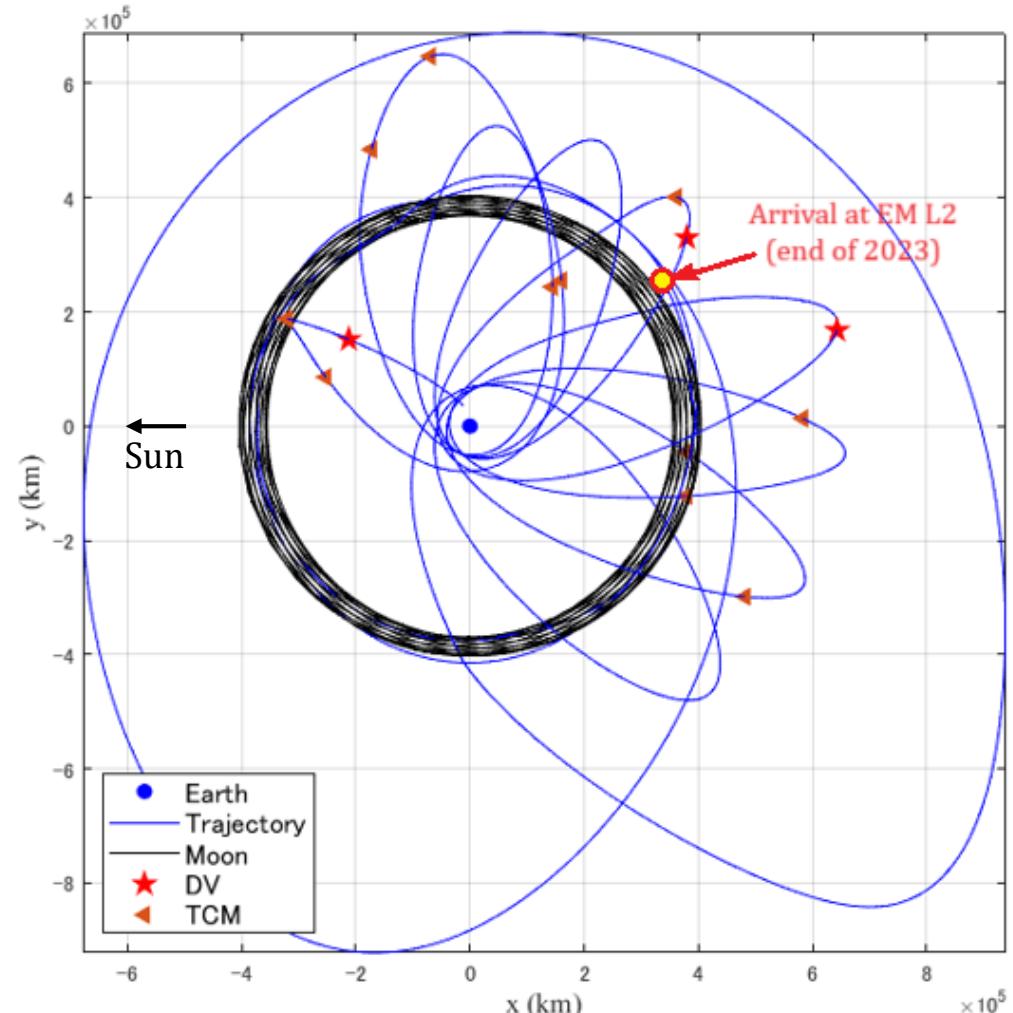
Запас характеристической скорости: 80 м/с

Затраты ΔV на перелёт Земля–EM L2: 17 м/с

Двигательная установка:

2 x 2 мН маршевые двигатели

4 x 2 мН для разгрузки маховиков



Номинальная траектория перелёта EQUULEUS



Попутный обходной перелёт: миссия CAPSTONE (NASA)



Дата старта: **28 июня 2022 года**

Выход на гало-орбиту вокруг EM L2 (NRHO 9
13 ноября 2022 года

Отлётная энергия (C3): $-0.6 \text{ км}^2/\text{с}^2$

Стартовая масса КА (12U кубсат): 27 кг

Масса топлива (гидразин): 3.25 кг

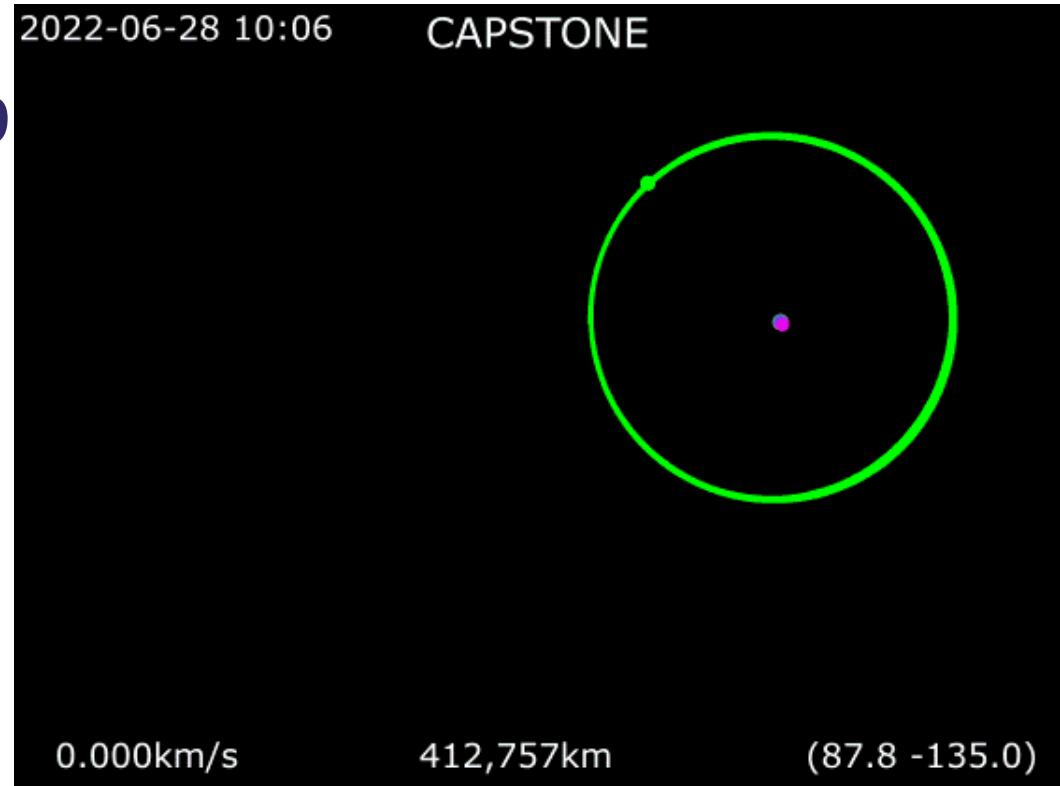
Запас характеристической скорости: 240 м/с

Затраты ΔV на перелёт Земля–NRHO: 94 м/с

Двигательная установка:

4 x 0.25 Н для управления орбитальным и угловым движением

4 x 0.25 Н для управления угловым движением и разгрузки маховиков



Номинальная траектория перелёта CAPSTONE



Решение задачи оптимизации при построение обходной траектории к Луне



- **Начальные условия:**

- ССО с высотой 832 км и наклонением 98.8 градусов (типичная орбита)
- Отлетный импульс не более 3.2 км/с (типичное значение для SALT)
- Масса аппарата: $108 \text{ кг} = 92 \text{ кг (сухая)} + 16 \text{ кг (топливо)}$

- **Целевые условия:**

- Окололунная орбита с большой полуосью 11738 км (есть проекты)
- Эксцентриситет не выше 0.5 для избегания столкновения с Луной

- **Оптимизируемая функция:**

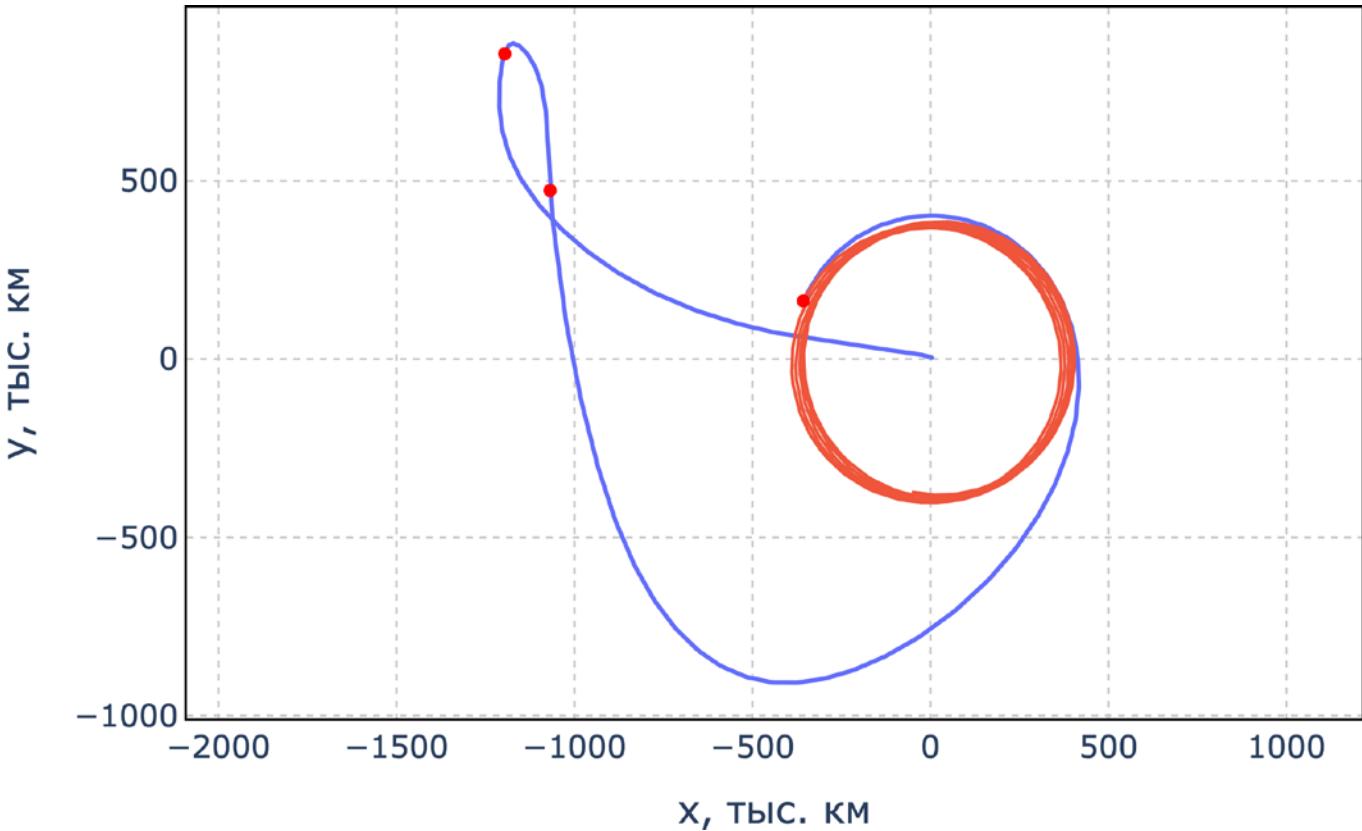
- Сумма модулей двух импульсов управления в глубоком космосе и одного импульса у Луны (равносильно минимизации затрат топлива)



Траектория перелета и ее характеристики



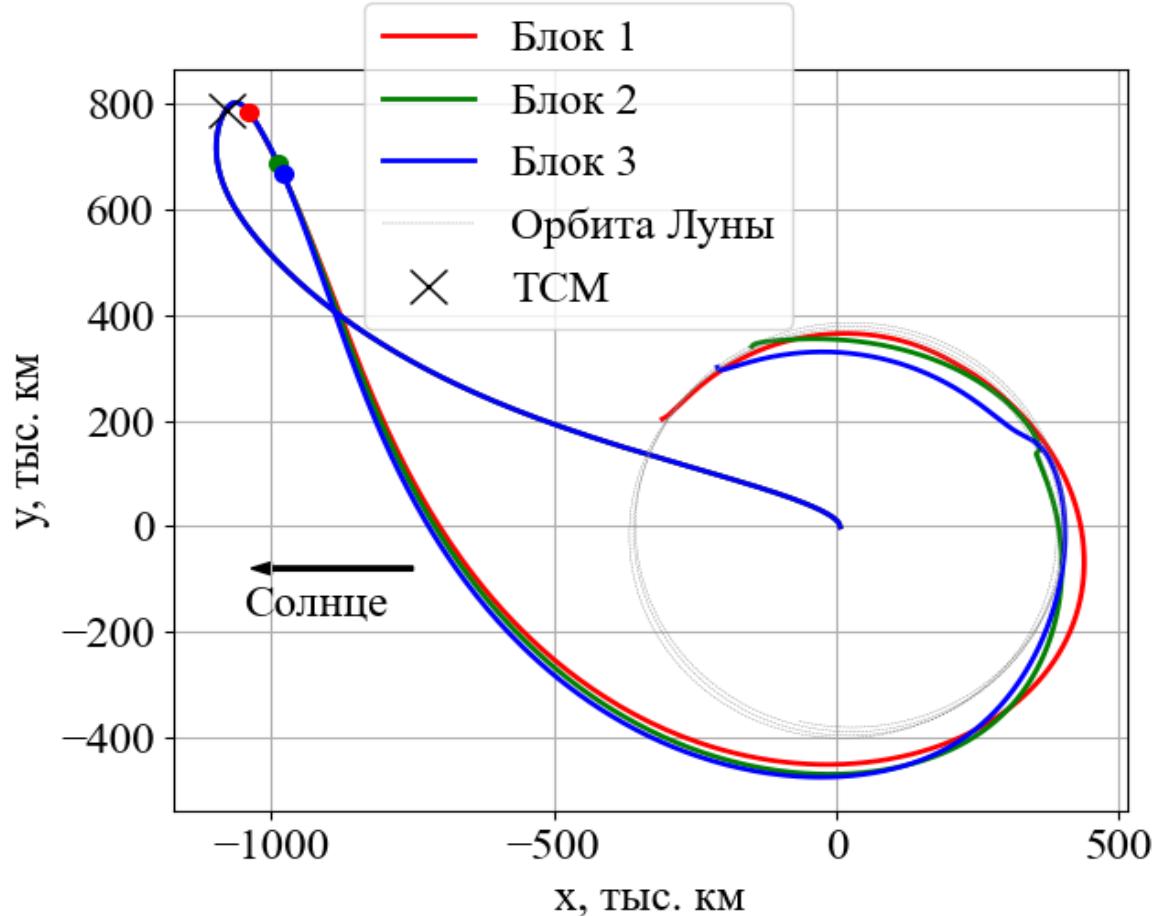
- Околоземная орбита:
 - 832 км, 98.8 градусов
- Окололунная орбита:
 - Большая полуось: 11738 км
 - Эксцентриситет: 0.49
 - Наклонение: 92.5 градусов
- Затраты скорости:
 - Старт (РБ): 3.18 км/с
 - Импульс №1: 51.2 м/с (0.4 кг)
 - Импульс №2: 28.1 м/с (0.3 кг)
 - Тормозной импульс: 161.9 м/с (1.28 кг)
- Время полета: 168 дней



Траектория перелета во врачающейся системе координат Солнце-Земля, импульсы и лунная орбита



Пример развёртывания созвездия с тремя орбитальными плоскостями



Траектории перелёта блоков МКА во вращающейся геоцентрической системе координат Солнце–Земля

Параметры финальных орбит:

| Параметр | Блок 1 день 48 | Блок 2 день 56 | Блок 3 день 57 |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| a , км | 4400 | 4400 | 4400 |
| i , град. | 84.1 | 83.0 | 84.1 |
| Ω , град. | 51.0 | 167.6 | -72.4 |

Затраты характеристической скорости:

| Импульс | Блок 1 день 48 | Блок 2 день 56 | Блок 3 день 57 |
|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Δv_{dep} , м/с | 10.0 | 10.0 | 11.0 |
| Δv_{LOI} , м/с | 391.2 | 416.5 | 376.9 |
| Δv_{circ} , м/с | 126.9 | 81.8 | 143.5 |
| Δv_{tot} , м/с | 528.1 | 507.6 | 531.4 |



Заключение



- Разработаны прецизионные динамические модели и алгоритмы управления с использованием современных математических методов, которые применены для конструирования межпланетных миссий на базе МКА
- Предложена и математически обоснована *гибридная схема*, позволяющая до минимума снизить стоимость миссии, сократить время ее разработки и запуска (у партнеров по проекту имеются комплектующие, ЭРДУ, попутный запуск, наземный комплекс управления)
- Оперативная реализация гибридных МКА-миссий на Марс и Луну будет способствовать укреплению статуса России в межпланетных исследованиях, органично дополняя разрабатываемые “большие” межпланетные миссии
- Освоение *обходных* траекторий к Луне расширяет возможности по созданию окололунной инфраструктуры и должно быть востребовано для организации грузового трафика по маршруту между Землей и Луной



Апробация & благодарности



- результаты доложены на конгрессах и симпозиумах IAF, национальном съезде по теоретической и прикладной механике, симпозиумах ЦНИИМаш, Чтениях по космонавтике
- опубликованы в Aerospace, Applied Sciences, Cosmic Research, препринах ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
- обсуждены в рамках объединения с АО РКС, АО ОКБ Факел, ИКИ РАН, ИМБП РАН; обсуждены с ООО СТЦ
- теоретические аспекты поддержаны грантами РНФ №19-11-00256 и № 24-11-00038, прикладные - контрактами с АО РКК Энергия
- благодарю сотрудников Отдела № 7 ИПМ за вклад в разработку представленного проекта



Спасибо за внимание!



Бэкап-слайды



Аппараты класса микро и нано за пределами околоземной орбиты



Попутный запуск с миссией InSight (2018) – MarCO-A и MarCO-B

Марс

Попутный запуск с миссией DART (2021) – LICIACube

астероид Дидим

Целевой запуск ракетой Electron/Photon (2022) – CAPSTONE

гало-орбита EM L2

Попутный запуск с миссией Artemis (2022):

ArgoMoon

высокоэллиптическая околоземная орбита

BioSentinel

гелиоцентрическая орбита

CuSP

гелиоцентрическая орбита

LunIR

гелиоцентрическая орбита

Team Miles

гелиоцентрическая орбита

LunaH-Мар

окололунная орбита

Lunar IceCube

окололунная орбита

OMOTENASHI

столкновение с Луной

EQUULEUS

гало-орбита EM L2

NEA Scout

астероид 2020 GE

Электростатическая ионная ЭРДУ (йод)

Электростатическая ионная ЭРДУ (йод)

Электростатическая ионная ЭРДУ (йод)

Электронагревная ЭРДУ (вода)



Миссии в дальний космос с ЭРДУ



Луна

SMART-1 (2003–2006)

Холловский ЭРДУ 67 мН, 1540 с, полная стартовая масса КА 370 кг, запас ксенона 82 кг

Астероиды

Deep Space 1 (1998–2001) – астероид Брайль и комета Борелли

Электростатический ионный ЭРДУ 90 мН, 3100 с, полная стартовая масса КА 486 кг, запас ксенона 82 кг

Dawn (2007–2018) – астероиды Веста, Церера

3 электростатических ионных ЭРДУ 90 мН, 3100 с, полная стартовая масса КА 1218 кг, запас ксенона 425 кг

Hayabusa 1 (2003–2010) – астероид Итокава

3+1 электростатических ионных ЭРДУ 7.6 мН, 3056 с, полная стартовая масса КА 510 кг, запас ксенона 66 кг

Hayabusa 2 (2014–2018) – астероид Рюгю

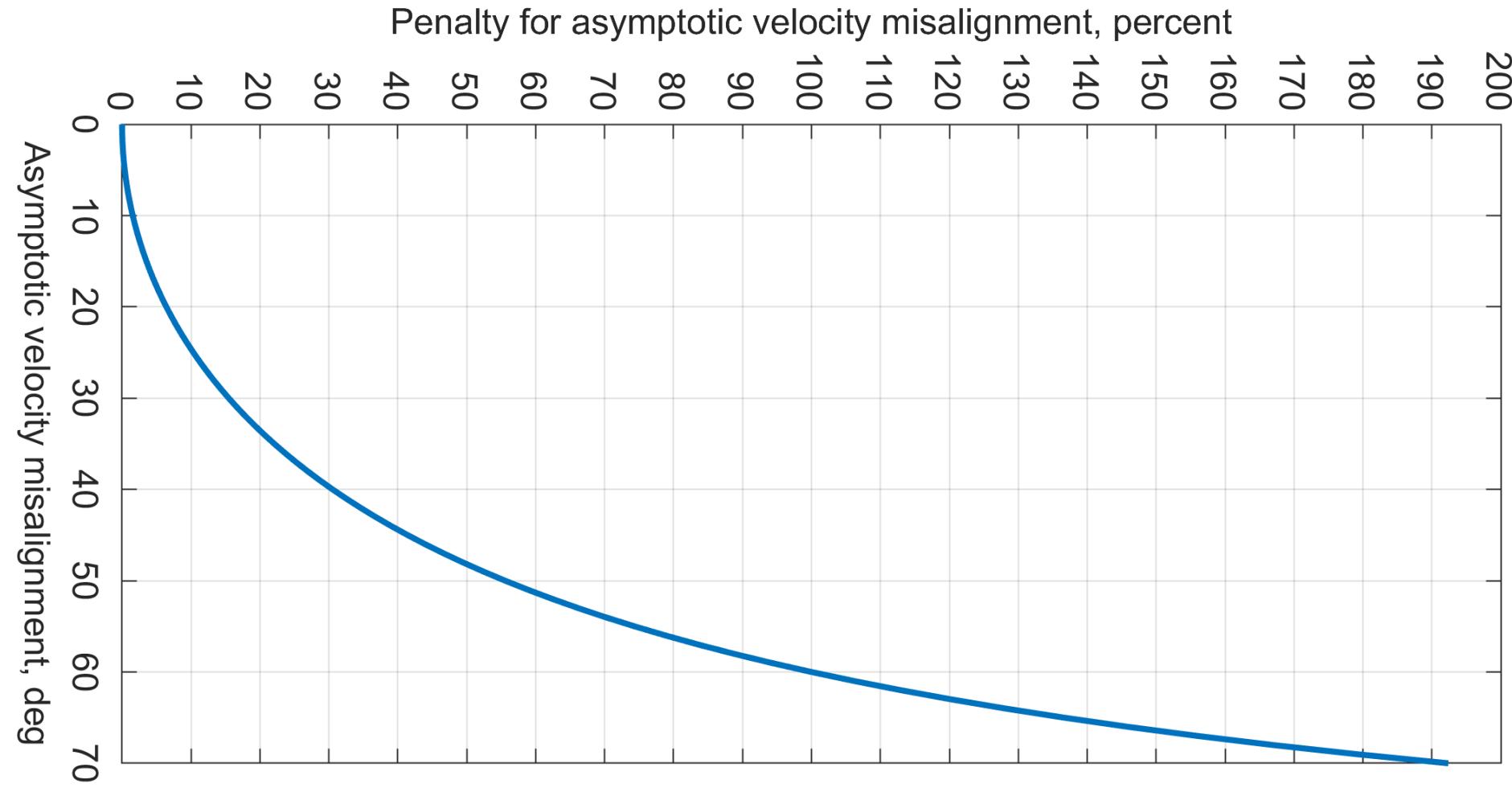
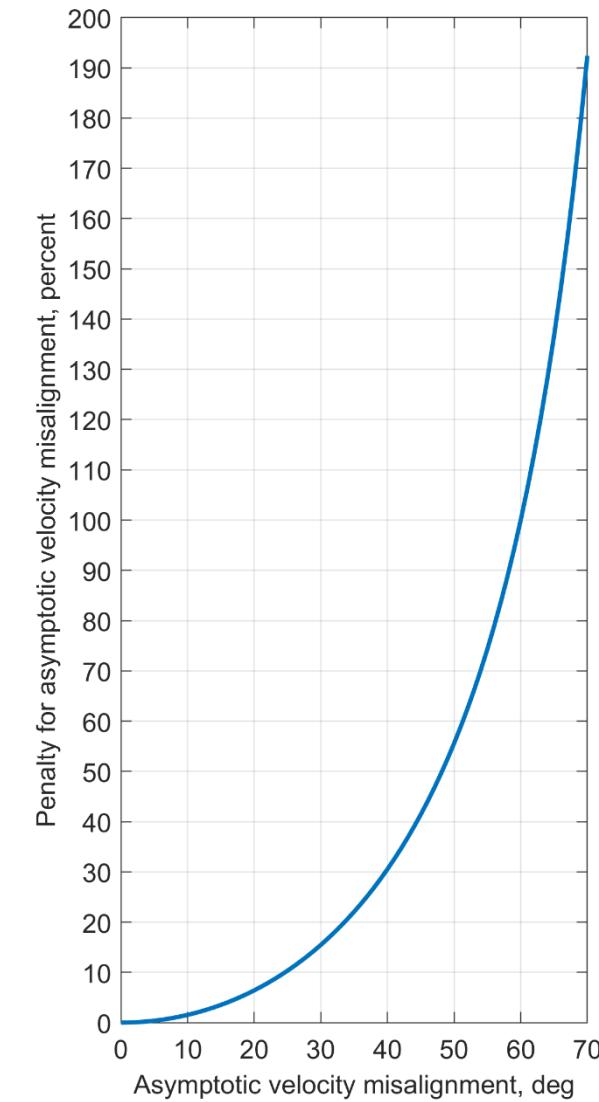
3+1 электростатических ионных ЭРДУ 10.5 мН, 2877 с, полная стартовая масса КА 600 кг, запас ксенона 66 кг

Psyche (5 октября 2023–...) – астероид Психея

4 холловских ЭРДУ 280 мН, 1800 с, полная стартовая масса КА 2608 кг, запас ксенона 922 кг



Штраф за промах по направлению асимптотической скорости





Максимальная масса МКА к Марсу при попутном запуске с РБ Фрегат



Сценарий «Кондор»

Основная ПН

Кондор-ФКА-М

Масса основной ПН

2000 кг

Рабочая орбита основной ПН

ССО 500–550 км, MLTAN ~6:30/7:00

Разгонный блок (РБ)

Фрегат

Максимальный запас топлива РБ

5235 кг

Конечная масса РБ

945 кг

Масса адаптера

425 кг

Максимальная масса МКА

1016 кг для $v_\infty = 3.0$ км/с

873 кг для $v_\infty = 3.5$ км/с



Максимальная масса МКА к Луне при попутном запуске с РБ Фрегат



Сценарий «Метеор»

Основная ПН

Метеор-М

Масса основной ПН

3250 кг

Рабочая орбита основной ПН

ССО 800–850 км, MLTAN ~15:00/21:00

Разгонный блок (РБ)

Фрегат

Максимальный запас топлива РБ

5235 кг

Конечная масса РБ

945 кг

Масса адаптера

425 кг

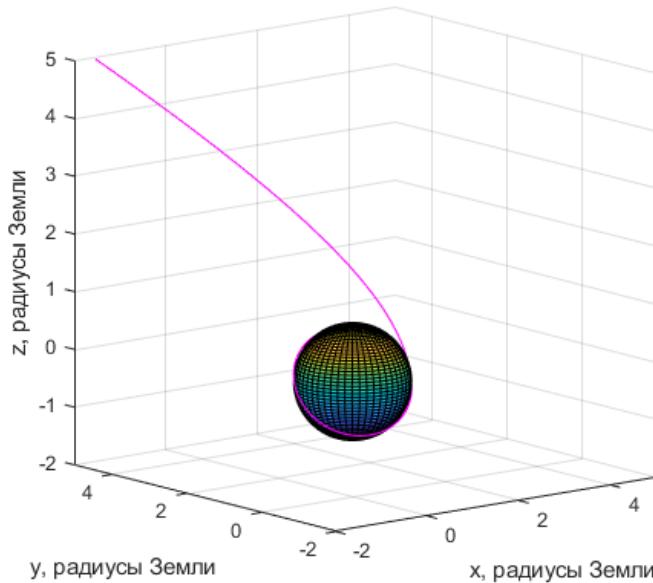
Максимальная масса МКА

1379 кг для $C_3 = -2.0 \text{ км}^2/\text{с}^2$

1293 кг для $C_3 = -0.6 \text{ км}^2/\text{с}^2$



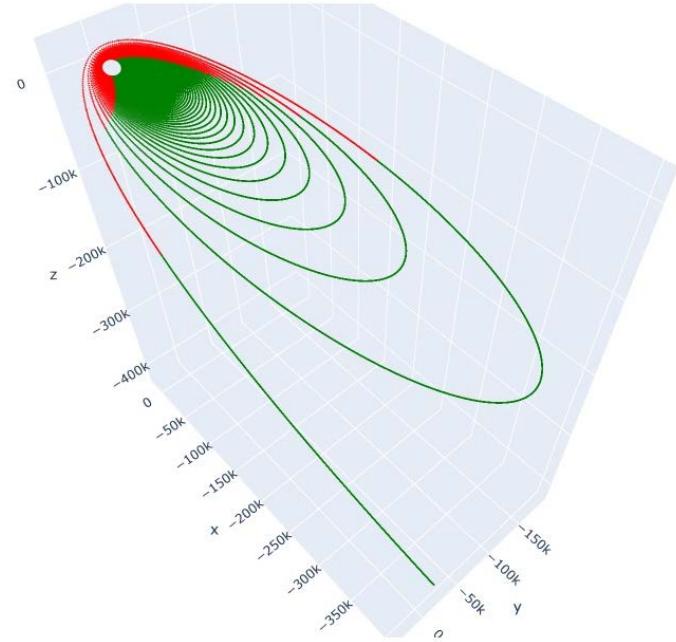
Этапы миссии к Марсу с использованием РБ и ЭРДУ



Отлёт от Земли



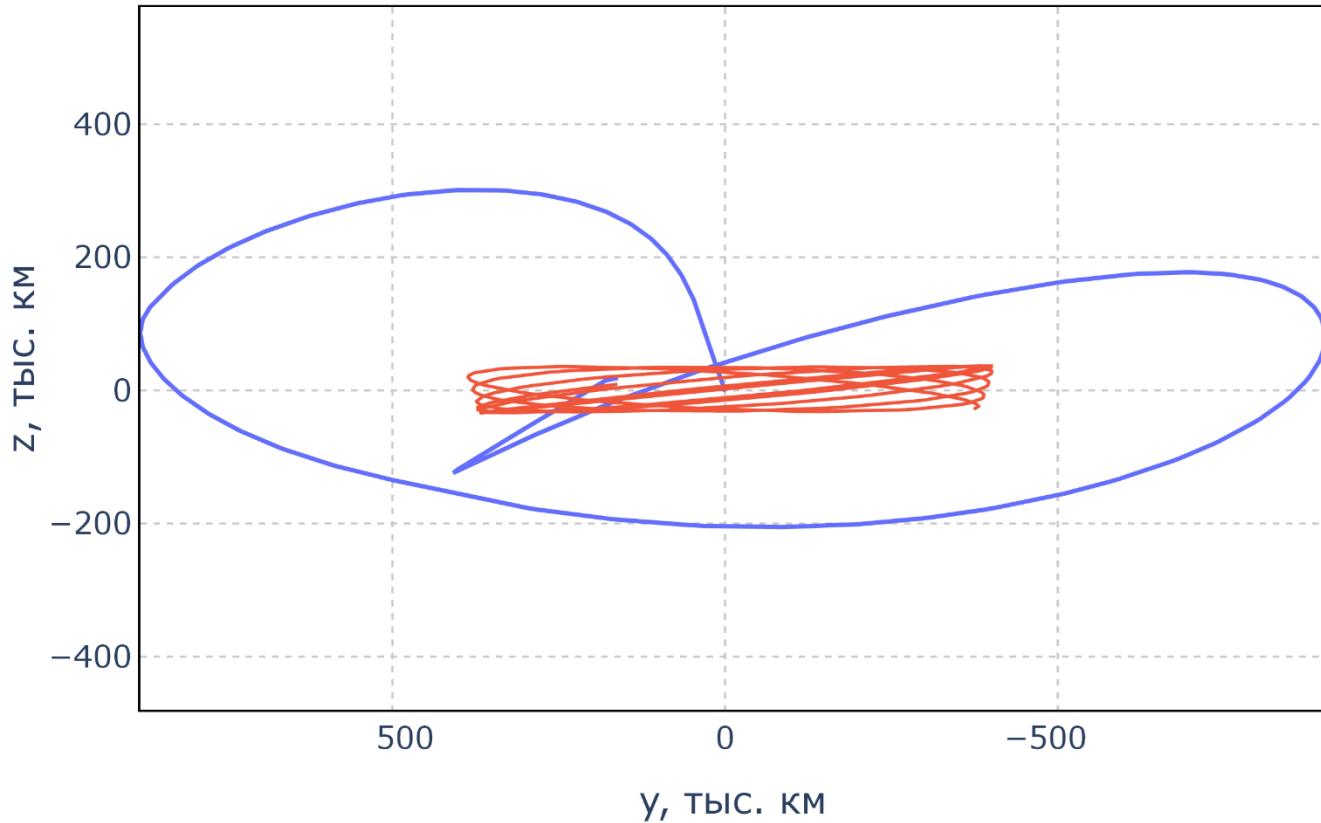
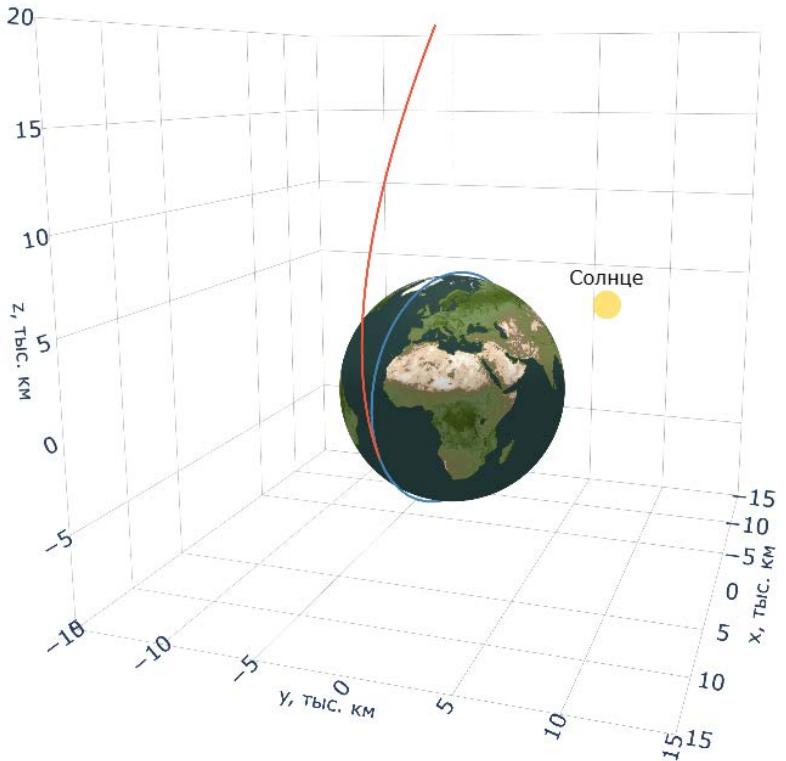
Межпланетный перелёт



Выход на целевую орбиту



Попутный обходной перелёт: старт с полярной опорной орбиты



Дата старта: **26 августа 2028 года**

Выход на HLO 10 тыс. км: **11 февраля 2029 года**

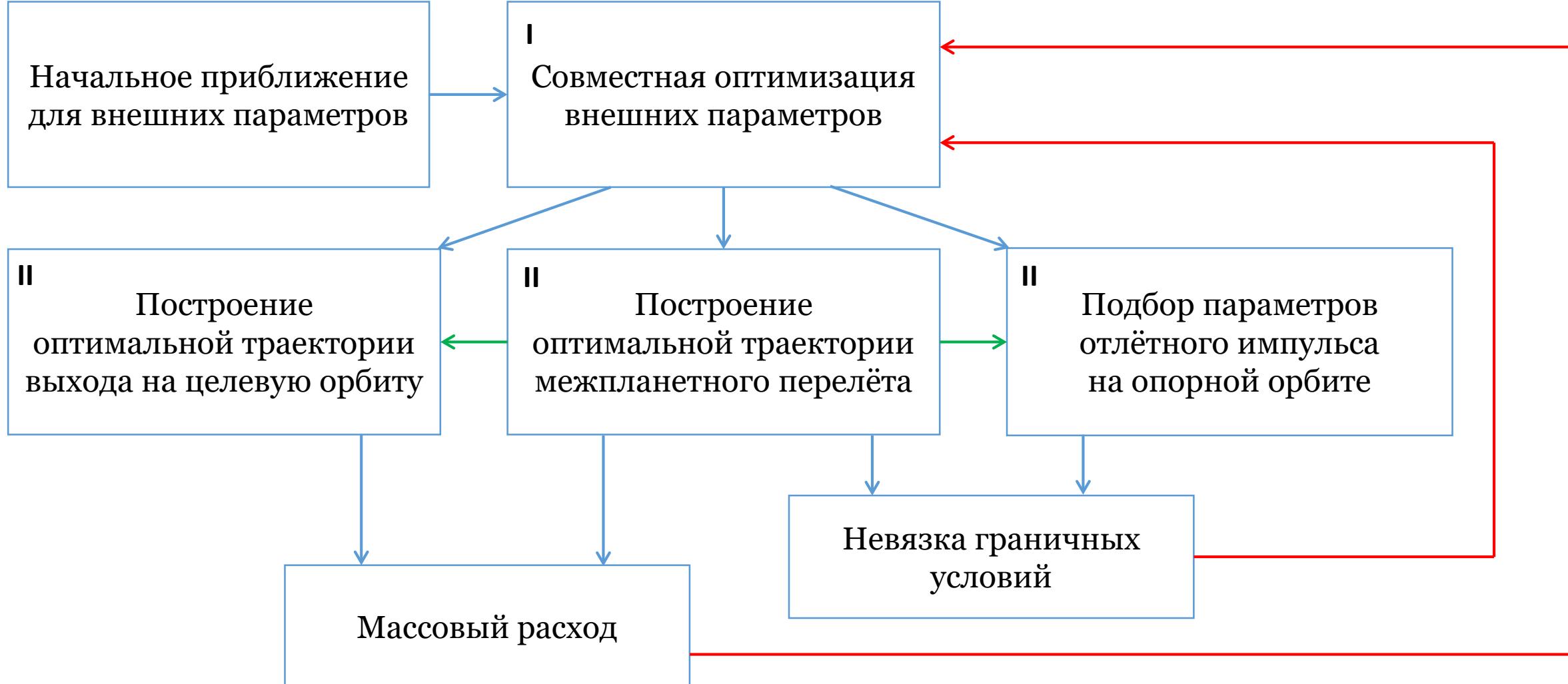
Отлётный импульс (с опорной орбиты 200 км): **3 193 м/с**

Затраты ΔV на перелёт LEO–HLO: **79 м/с (TCM+DSM) + 215 м/с (LOI) = 294 м/с**

*Обходная траектория перелёта LEO–HLO
во вращающейся геоцентрической
системе координат Солнце–Земля*



Двухуровневая схема оптимизации





Постановка задачи оптимизации межпланетного участка траектории



Уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a},$$

$$\dot{m} = -1.3 \dot{m}_s (N)$$

\mathbf{r} – положение,

\mathbf{v} – скорость,

m – масса,

N – мощность,

μ – грав. параметр,

m_s – массовый расход
в секунду

Управление:

$\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$ – реактивное ускорение,

где $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, m)^T$ – фазовый вектор

Функционал:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \dot{m}_s(t, \mathbf{x}) dt \rightarrow \min$$

Границные условия:

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{\delta 1} \quad \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{\delta 1}$$

$$\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{\delta 2} \quad \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{\delta 2}$$

\mathbf{r}_1 – положение Земли в t_1

\mathbf{r}_2 – положение Марса в t_2

\mathbf{v}_1 – положение Земли в t_1

\mathbf{v}_2 – положение Марса в t_2

$\mathbf{r}_{\delta 1}$ – положение относительно Земли

$\mathbf{r}_{\delta 2}$ – положение относительно Марса

$\mathbf{v}_{\delta 1}$ – скорость относительно Земли

$\mathbf{v}_{\delta 2}$ – скорость относительно Марса

Концы $\mathbf{r}_{\delta 1}$ и $\mathbf{r}_{\delta 2}$ лежат на границе сфер
действия Земли и Марса соответственно



Параметризация терминальных многообразий



Параметризация левого конца:

t_1 – дата старта ($08.10.2026 \pm 50$ дней) (1)

$\mathbf{r}_{\delta 1}$ – положение относительно Земли:

$$\mathbf{r}_{\delta 1} = \mathbf{r}_{\delta 1}(\alpha, \delta), \quad (2,3)$$

$$\|\mathbf{r}_{\delta 1}\| = r_{SOI}^{Earth},$$

r_{SOI} – радиус сферы действия
Земли (929 тыс. км),

α – угол восхождения,

δ – наклонение

$\mathbf{v}_{\delta 1}$ – скорость относительно Земли:

$$\mathbf{v}_{\delta 1} = \mathbf{v}_{\delta 1} \frac{\mathbf{p}_v(t_1)}{p_v(t_1)}, \quad (4)$$

$v_{\delta 1}$ – величина относительной
скорости

Параметризация правого конца:

Δt_1 – время перелёта

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1 \quad (5)$$

$\mathbf{r}_{\delta 2}$ – положение относительно Марса:

$$\mathbf{r}_{\delta 2} = \mathbf{r}_{\delta 2}(\alpha, \delta), \quad (6,7)$$

$$\|\mathbf{r}_{\delta 2}\| = r_{SOI}^{Mars},$$

r_{SOI} – радиус сферы действия
Марса (578 тыс. км),

$\mathbf{v}_{\delta 2}$ – скорость относительно Марса: (8,9)

$$\mathbf{v}_{\delta 2} = \mathbf{v}_{\delta 2}(\alpha, \delta),$$

$$\|\mathbf{v}_{\delta 2}\| = v_{\text{par}},$$

Условие:

$$i(\mathbf{r}_{\delta 2}, \mathbf{v}_{\delta 2}) = 86.3^\circ$$

v_{par} – вторая космическая скорость
относительно Марса

итого 9 параметров



Связь между параметрами ЭРДУ



Реактивная тяга выражается через массовый расход и скорость истечения рабочего тела

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{F}{m_0 - m_s(t)} \mathbf{e} = \frac{\dot{m}_s u}{m_0 - m_s(t)} \mathbf{e},$$

\mathbf{F} – сила реактивной тяги

F – величина силы тяги

\mathbf{e} – направление силы тяги

u – скорость истечения рабочего тела

Электрическая мощность, доступная ЭРДУ, зависит от расстояния до Солнца, учитывает деградацию и необходимый запас мощности для других систем МКА

$$N = N(t, r) = N_{au} \left(\frac{r_{au}}{r} \right)^{1.7} (1 - k_d t) - N_M$$

Тяга и скорость истечения являются функциями от мощности

$$F = F(N) = F(t, r),$$

$$u = g_0 I_{sp}(N) = g_0 I_{sp}(t, r).$$

N – мощность, подаваемая на двигатель

N_{au} – мощность на расстоянии r_{au}

r_{au} – 1 астрономическая единица

k_d – коэффициент деградации СБ (10% в год)

N_M – запас мощности

I_{sp} – удельный импульс

g_0 – стандартное грав. ускорение



Общий вид оптимального управления



Записывается функция Гамильтона-Понtryгина

$$H = -\dot{m}_s + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{f}_i = -\dot{m}_s + \mathbf{p}_v \cdot \left(\mathbf{e} \frac{u \dot{m}_s}{m_0 - m_s} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + 1.3 p_m \dot{m}_s$$

Из условия максимизации функции Гамильтона-Понtryгина

$$H = \left(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e} \frac{u}{(m_0 - m_s)} + 1.3 p_m - 1 \right) \dot{m}_s + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{r}$$

$$H \rightarrow \max_{\mathbf{e}, \dot{m}_s}$$

Оптимальное управление принимает вид

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad \dot{m}_s = \begin{cases} \dot{m}_{s \max}, & \kappa > 0 \\ 0, & \kappa \leq 0 \end{cases}, \quad \kappa = p_v \frac{u}{(m_0 - m_s)} + 1.3 p_m - 1$$

функция переключения



Расширенная система уравнений движения



Расширенная система уравнений движения МКА

Уравнения
движение

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}, \\ \dot{m} = -\dot{m}_s (\kappa) \cdot 1.3, \end{array} \right.$$

Сопряжённые
уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}}, \\ \dot{p}_m = -\frac{\partial H(\mathbf{a})}{\partial m}. \end{array} \right.$$

Управление определяется сопряжёнными
переменными \mathbf{p} в момент времени t

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$$

Начальное значение вектора сопряжённых
переменных неизвестно, его требуется найти

$$\mathbf{p}(t_1) = ? \quad \text{7 параметров}$$



Математическая постановка задачи оптимизации перелета к Луне (1)



Для решения поставленной задачи используется метод параллельной пристрелки с оптимизацией промежуточных импульсов. Вводится оптимизируемый вектор параметров:

$$\mathbf{p} = [t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{10n}$$

содержит моменты времени, фазовые состояния и управляющие воздействия. Определяются индексы точек с импульсами:

$$\mathcal{I}_{\text{imp}} = \{i_1, i_2, i_3\}, \quad 1 < i_1 < i_2 < i_3 \leq n$$

Вводится фазовый поток

$$\varphi(t; \tau, \mathbf{y}) = [\mathbf{r}(t; \tau, \mathbf{y}), \mathbf{v}(t; \tau, \mathbf{y})]$$

системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}$$



Математическая постановка задачи оптимизации перелета к Луне (2)



Постановка задачи математического программирования:

$$J(\mathbf{p}) = |\mathbf{u}_{i_1}| + |\mathbf{u}_{i_2}| + |\mathbf{u}_{i_3}| \rightarrow \min$$

при ограничениях общего вида на крайние точки (старт и прибытие)

$$\psi_1(\mathbf{p}) \geq 0, \psi_n(\mathbf{p}) \geq 0,$$

ограничениях на непрерывность траектории

$$\mathbf{r}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{r}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

ограничениях на гладкость траектории

$$\mathbf{v}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{v}_i = 0, \quad i \notin \mathcal{I}_{\text{imp}}$$

$$\mathbf{v}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}_{\text{imp}}$$

и ограничениях на времена

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$$



Алгоритм решения задачи оптимизации



- Задача математического программирования характеризуется
 - большим числом переменных (порядка 500)
 - всюду гладкими функциями ограничений
 - почти всюду гладкой целевой функцией (но в точке оптимума гладкость)
 - разреженными градиентом целевой функции и якобианом ограничений
- Эффективным для решения является сочетание
 - алгоритма внутренней точки (interior-point approach)
 - метода доверительной области (trust-region methods)
 - и расчета производных аналитически и через уравнения в вариациях
- Используются свободные реализации алгоритма оптимизации



О начальном приближении

- Алгоритм оптимизации требует начальное приближение
- Алгоритм сходится к локальному решению вблизи начального приближения, поэтому важно построить подходящее начальное приближение
- Нами разработана методика расчета таких первых приближений:

Tselousova A., Trofimov S., Shirobokov M., Ovchinnikov M. Geometric Analysis of Sun-Assisted Lunar Transfer Trajectories in the Planar Bicircular Four-Body Model // Applied Sciences, 2023. Vol. 13, No. 8, pp. 1–24. URL: <https://doi.org/10.3390/app13084676>

- Другая методика может основываться на глубоких классических исследованиях эволюции орбит искусственных спутников планет:

Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли, 1961. Вып. 8, С. 5-45.



Вариации наклонения и долготы восходящего узла в зависимости от вариаций импульса скорости в глубоком космосе

