



Общее собрание Отделения математических наук РАН,  
Москва, 9 декабря 2024 года



# **Задачи астродинамики, возникающие при освоении дальнего космоса малыми космическими аппаратами, и их решение методами современной математики**

*М.Ю. Овчинников (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)*



# Астродинамика



- Астродинамика - дисциплина прикладной математики, изучающая орбитальное и вращательное движение космических аппаратов (КА)
- Наследует от небесной механики подходы к описанию естественного (неуправляемого) движения небесных тел - модели (задача двух тел, ограниченная задача трёх тел и т.п.), методы (асимптотические методы теории возмущений, методы теории динамических систем)
- Возможность управления движением КА порождает новые математические задачи
- С математической точки зрения, объектами исследования в астродинамике выступают управляемые динамические системы (ДС)
- С точки зрения текущего доклада объектом исследования являются межпланетные траектории малых космических аппаратов (МКА)



# Объекты и цели



- Объект проекта – МКА с сухой массой до 100 кг (малый не только по массе и размеру, а и по идеологии разработки, диктуемой ограниченным ресурсом управления и высокими рисками миссии)
- Цель проекта – построение межпланетных миссий на базе МКА в кооперации
  - с организациями Роскосмоса
  - с частными отечественными компаниями
- Цель исследования – разработка межпланетной логистики МКА с использованием методов астеродинамики с учетом ограниченности его ресурсов



# Мотивация использования МКА



## Почему МКА?

потребности

+

обстоятельства

+

возможности



научные исследования  
развитие технологий  
поддержание статуса  
освоение планет



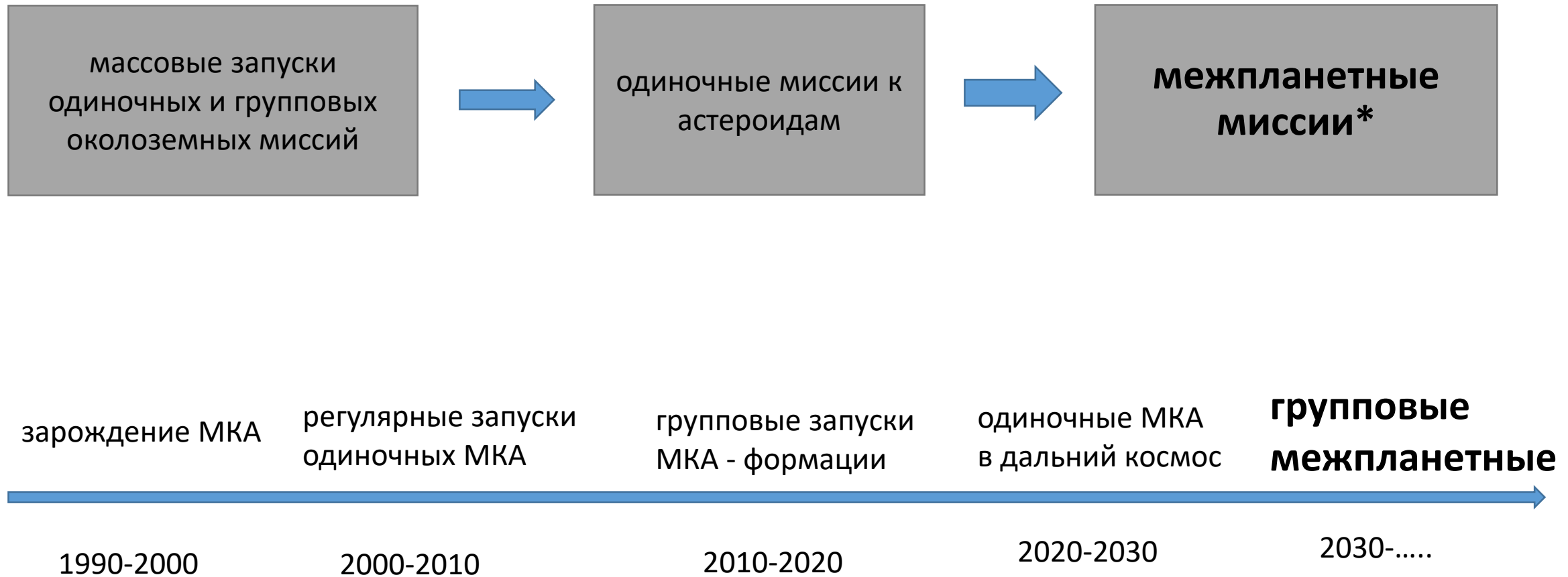
мировая конкуренция  
ограниченность ресурсов  
интерес гос и частных



миниатюризация  
околоземные миссии  
**математика**



# Тенденции в развитии миссий на базе МКА





# Об использовании методов астродинамики



- существует распространённое мнение, что для прикладных задач нужны более простые, инженерные подходы
- в астродинамике дело обстоит наоборот: чем задача более прикладная, тем больше ограничений и требований необходимо учесть => нужно использовать более сложную модель и/или более эффективные методы => требуется более высокая математическая квалификация
- тем самым, реализован переход инженерных проблем в математические, решение которых потребовало изощренных подходов (аналитика, численные и нетрадиционные методы, позволяющие в итоге получить наглядные результаты)



# Гибридная схема миссии



- Этапы гибридной схемы миссии:
  - МКА совместно с основной полезной нагрузкой (ОПН) выводится на низкую околоземную орбиту (*без целевого запуска РН\**)
  - после отделения ОПН от РБ межпланетный МКА на резервных остатках топлива с помощью РБ выводится на отлетную траекторию (*без целевого РБ\**)
  - ЭРДУ обеспечивает межпланетный перелет и выход на орбиту вокруг планеты назначения (*достаточно экономичного двигателя с малой тяги*)
- Цена гибридной схемы - необходимо глубокое математическое исследование всей баллистической цепочки миссии:
  - с использованием методов оптимизации с жесткими и многочисленными ограничениями (это - цена “малости” КА) на большом количестве параметров (в т.ч. двухуровневая оптимизация),
  - выбором начального приближения (нейросетевой подход для обучения с подкреплением) на большом массиве виртуальных траектории (построение датасета на многокластерной ЭВМ)



# Сложности проектирования миссии к Марсу



- протяженная траектория требует баланса между баллистическими требованиями наряду с вековыми внешними воздействиями и слабой возможностью их выполнения и парирования
- решение оптимизационной задачи (минимизация топлива) требует учета конструкционных и временных ограничений (ограниченное моторное время ЭРД, фиксированное время попутного запуска, орбита попутного запуска, фаза Марса, радиационное воздействие на приборы и т.д.)
- требуется получение хорошего начального приближения (используется разработанный метод виртуальных траекторий, реализованный на многокластерной ЭВМ)



# Сложности проектирования миссии к Луне



- использование иерархии моделей разной степени точности/детальности (задача двух тел, круговая ограниченная задача трёх тел, бикруговая ограниченная задача четырёх тел, высокоточная эфемеридная модель)
- многовитковые гравитационные маневры в системе Земля-Луна для увеличения энергии в рамках задачи трех тел и выхода на задачу четырех тел (+Солнце)
- тонкий учет влияния Солнца для использования чувствительного к начальным приближениям метода разведения МКА по рабочим орбитам вокруг Луны при выходе за границу грависферы Земли



# Внешний облик и габариты МКА «Марсик»



Размеры платформы (без панелей СБ): **1150 x 800 x 500 мм**

Панели СБ: Si ФЭП, 2 крыла по 3 панели **800 x 900 мм**

Общая площадь раскрытых панелей СБ: **4.32 м<sup>2</sup>**

Максимальная мощность, снимаемая с панелей (с учётом 85% КПД СЭП, но без учёта деградации, мощность рассчитана АО РКС):

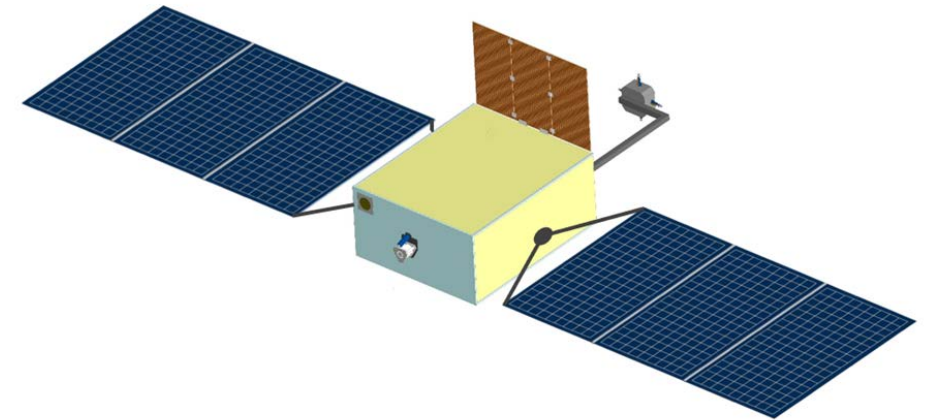
- на орбите Земли **690...738 Вт** (в среднем 713 Вт)
- на орбите Марса **257...374 Вт** (в среднем 306 Вт)

Сухая масса: **92 кг**

Масса полезной нагрузки (ПН), не более: **15 кг**

Размера модуля ПН: **800 x 500 x 400 мм**

**Совместная проработка АО РКС, АО ОКБ Факел, ИКИ РАН, ИПМ РАН, ИМБП РАН**



*Внешний облик платформы микрокласса*



# Двухуровневая оптимизация межпланетной траектории



## Внешний оптимизатор:

9 параметров – параметры терминальных многообразий

Используется метод внутренней точки (MATLAB fmincon)

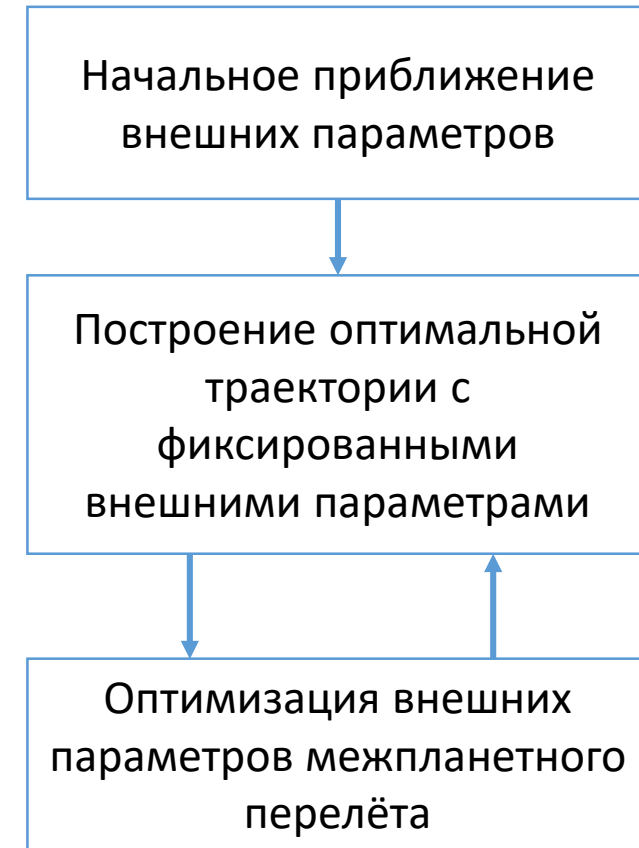
Вызывается внутренний оптимизатор на каждом шаге оптимизации

## Внутренний оптимизатор:

7 параметров – значения сопряжённых переменных на левом конце

Внешние параметры фиксированы

Используется метод внутренней точки (MATLAB fmincon)





# Оптимальная траектория перелёта Земля–Марс и “скрутка” у Марса



Дата старта: 8 октября 2026 года

Длительность перелёта Земля–Марс: 420 суток

Полная стартовая/сухая масса: 156/92 кг

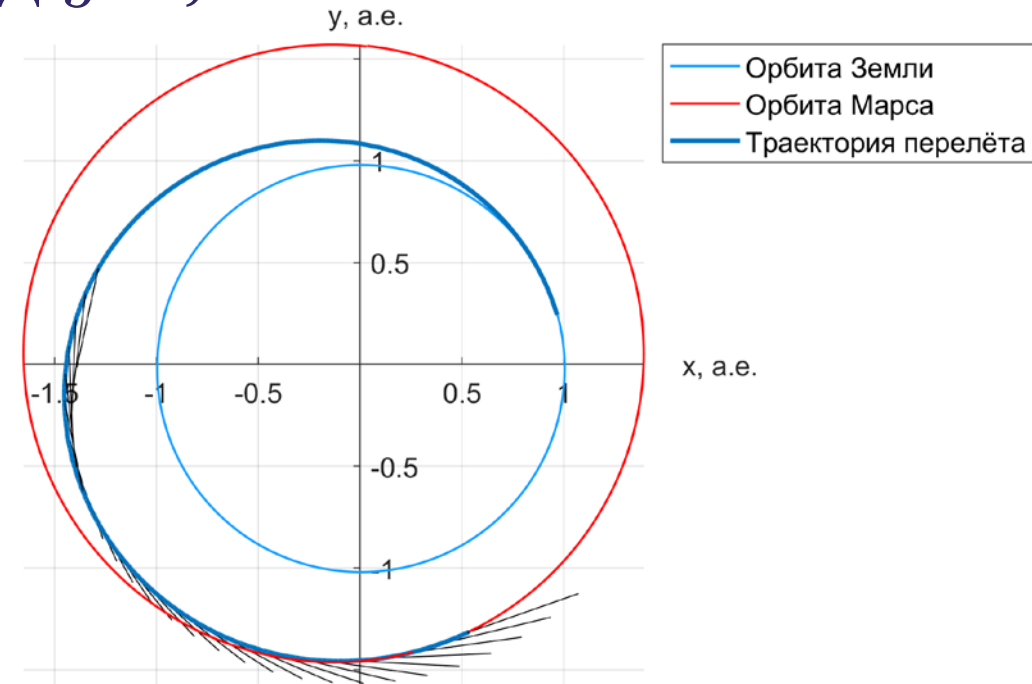
Моторное время: 256+150 суток (2 СПД-50М)

Затраты ксенона: **37.6+23.4 кг** (с учётом 30%  
на парирование эксцентриситета тяги СПД-50М)

Отлётный импульс на орбите 200 км: **3 579 м/с**

Гиперболический избыток скорости при отлёте  
МКА от Земли: **2 812 м/с**

Рабочая орбита у Марса: **300 x 10 000 км, 86.3°**





# Два типа попутных перелётов малых аппаратов к Луне



## ***Прямой перелёт (direct lunar transfer):***

- Малый аппарат отделяется от основной полезной нагрузки (ПН) на быстрой (4–6 суток) траектории перелёта к Луне, но, не имея возможности выполнить большой тормозной манёвр, выходит на высокоэллиптическую околоземную орбиту и выполняет один или несколько лунных гравитационных манёвров, чтобы обеспечить условия баллистического захвата аппарата Луной

## ***Обходной перелёт (Sun-assisted/ballistic lunar transfer):***

- Малый КА отделяется от основной ПН и выходит на обходную (3–6 месяцев) траекторию перелёта к Луне: в области апогея гравитационное возмущение от Солнца обеспечивает условия баллистического захвата КА Луной (подъём перигея орбиты и изменение наклона)



# Попутный прямой перелёт: миссия EQUULEUS (JAXA)



Дата старта: 16 ноября 2022 года

Выход на гало-орбиту вокруг ЕМ L2:  
не выполнен из-за потери связи с МКА

Отлётная энергия (СЗ):  $-2.0 \text{ км}^2/\text{с}^2$

Стартовая масса КА (6U кубсат): 10.5 кг

Масса топлива (вода): 1.2 кг

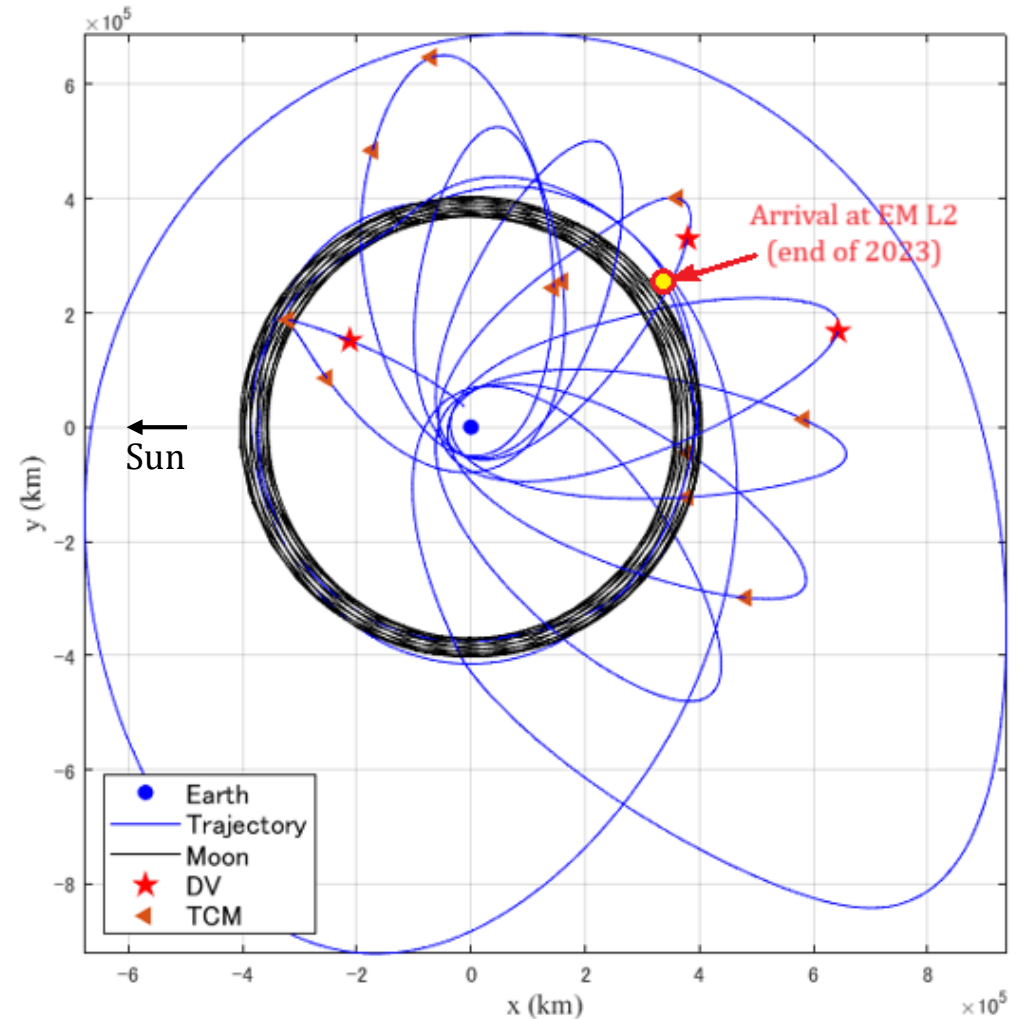
Запас характеристической скорости: 80 м/с

Затраты  $\Delta V$  на перелёт Земля–ЕМ L2: 17 м/с

Двигательная установка:

2 x 2 мН            маршевые двигатели

4 x 2 мН            для разгрузки маховиков



Номинальная траектория перелёта EQUULEUS



# Попутный обходной перелёт: миссия CAPSTONE (NASA)



Дата старта: **28 июня 2022 года**

Выход на гало-орбиту вокруг ЕМ L2 (NRHO 9)  
**13 ноября 2022 года**

Отлётная энергия (C3):  $-0.6 \text{ км}^2/\text{с}^2$

Стартовая масса КА (12U кубсат): 27 кг

Масса топлива (гидразин): 3.25 кг

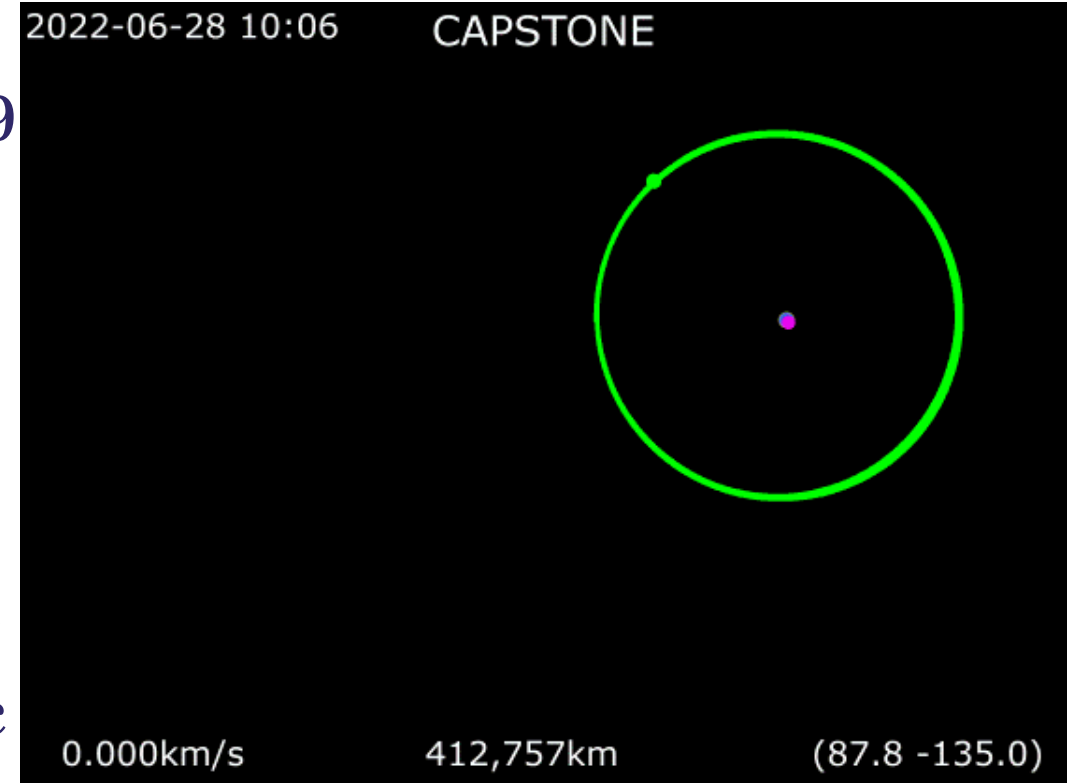
Запас характеристической скорости: 240 м/с

Затраты  $\Delta V$  на перелёт Земля–NRHO: 94 м/с

Двигательная установка:

4 x 0.25 Н для управления орбитальным и угловым движением

4 x 0.25 Н для управления угловым движением и разгрузки маховиков



*Номинальная траектория перелёта CAPSTONE*



# Решение задачи оптимизации при построение обходной траектории к Луне



- **Начальные условия:**

- ССО с высотой 832 км и наклоном 98.8 градусов (типичная орбита)
- Отлетный импульс не более 3.2 км/с (типичное значение для SALT)
- Масса аппарата: 108 кг = 92 кг (сухая) + 16 кг (топливо)

- **Целевые условия:**

- Окололунная орбита с большой полуосью 11738 км (есть проекты)
- Эксцентриситет не выше 0.5 для избегания столкновения с Луной

- **Оптимизируемая функция:**

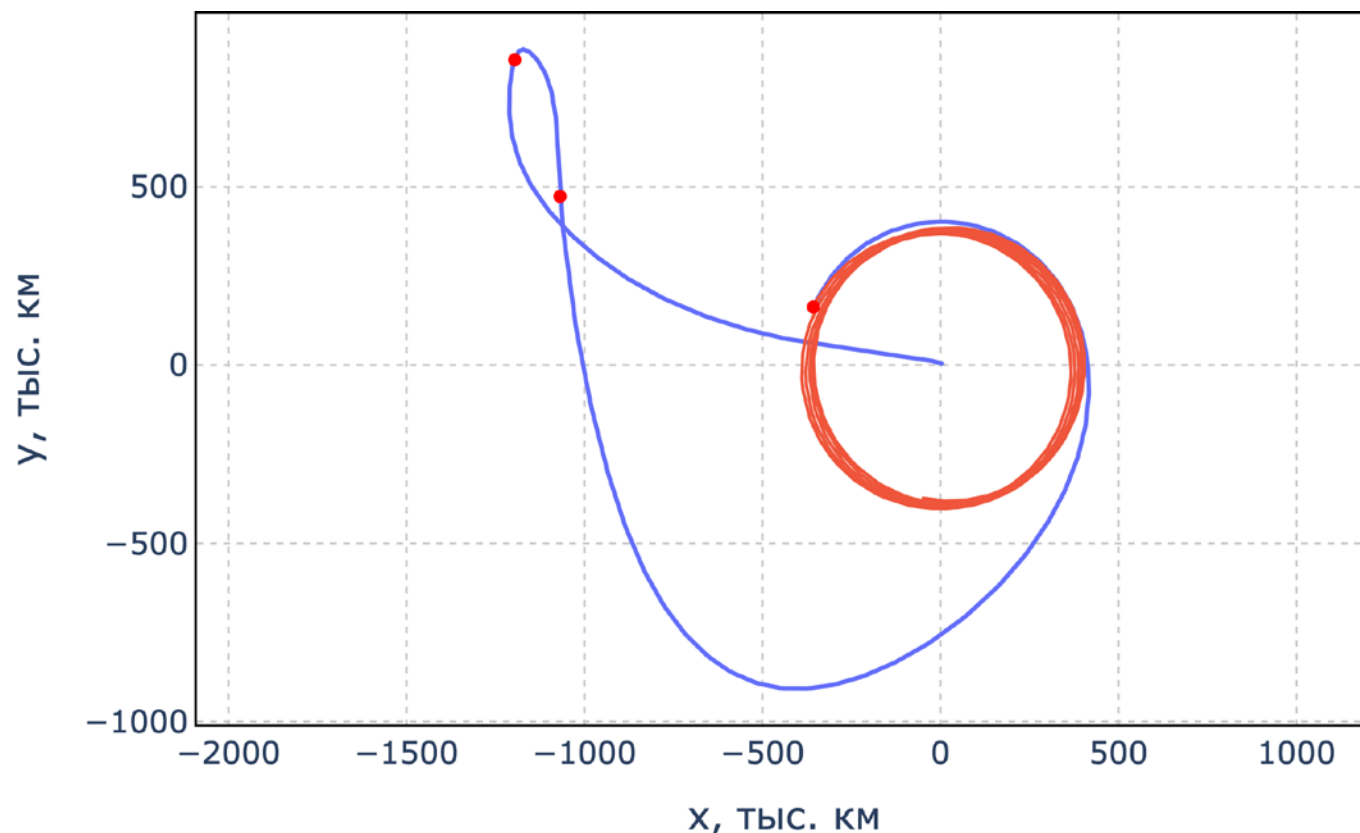
- Сумма модулей двух импульсов управления в глубоком космосе и одного импульса у Луны (равносильно минимизации затрат топлива)



# Траектория перелета и ее характеристики



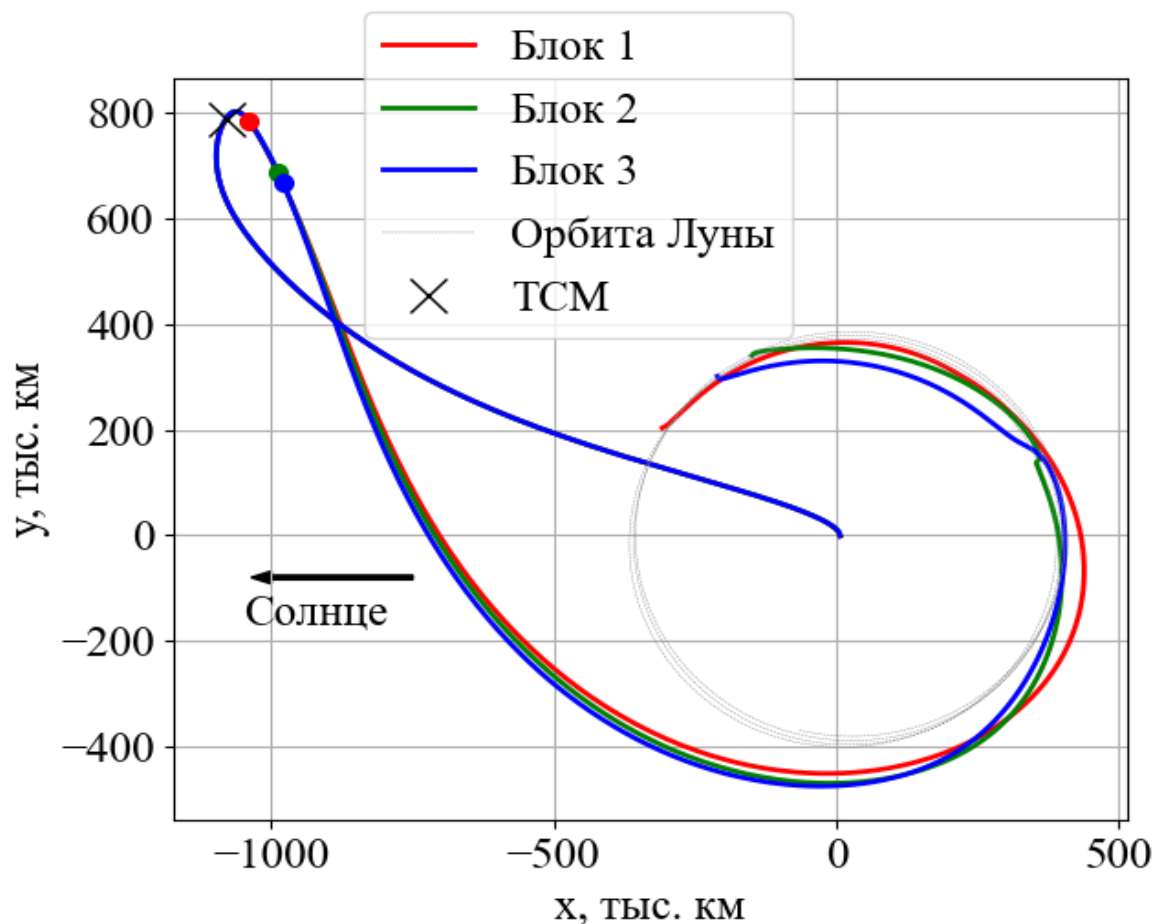
- Околоземная орбита:
  - 832 км, 98.8 градусов
- Окололунная орбита:
  - Большая полуось: 11738 км
  - Эксцентриситет: 0.49
  - Наклонение: 92.5 градусов
- Затраты скорости:
  - Старт (РБ): 3.18 км/с
  - Импульс №1: 51.2 м/с (0.4 кг)
  - Импульс №2: 28.1 м/с (0.3 кг)
  - Тормозной импульс: 161.9 м/с (1.28 кг)
- Время полета: 168 дней



*Траектория перелета во вращающейся системе координат Солнце-Земля, импульсы и лунная орбита*



# Пример развёртывания созвездия с тремя орбитальными плоскостями



*Траектории перелёта блоков МКА во вращающейся геоцентрической системе координат Солнце–Земля*

## Параметры финальных орбит:

Параметр	Блок 1 день 48	Блок 2 день 56	Блок 3 день 57
$a$ , км	4400	4400	4400
$i$ , град.	84.1	83.0	84.1
$\Omega$ , град.	51.0	167.6	-72.4

## Затраты характеристической скорости:

Импульс	Блок 1 день 48	Блок 2 день 56	Блок 3 день 57
$\Delta v_{dep}$ , м/с	10.0	10.0	11.0
$\Delta v_{LOI}$ , м/с	391.2	416.5	376.9
$\Delta v_{circ}$ , м/с	126.9	81.8	143.5
$\Delta v_{tot}$ , м/с	528.1	507.6	531.4



# Заключение



- Разработаны прецизионные динамические модели и алгоритмы управления с использованием современных математических методов, которые применены для конструирования межпланетных миссий на базе МКА
- Предложена и математически обоснована *гибридная схема*, позволяющая до минимума снизить стоимость миссии, сократить время ее разработки и запуска (у партнеров по проекту имеются комплектующие, ЭРДУ, попутный запуск, наземный комплекс управления)
- Оперативная реализация гибридных МКА-миссий на Марс и Луну будет способствовать укреплению статуса России в межпланетных исследованиях, органично дополняя разрабатываемые “большие” межпланетные миссии
- Освоение *обходных* траекторий к Луне расширяет возможности по созданию окололунной инфраструктуры и должно быть востребовано для организации грузового трафика по маршруту между Землей и Луной



# Апробация & благодарности



- результаты доложены на конгрессах и симпозиумах IAF, национальном съезде по теоретической и прикладной механике, симпозиумах ЦНИИМаш, Чтениях по космонавтике
- опубликованы в Aerospace, Applied Sciences, Cosmic Research, препринтах ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
- обсуждены в рамках объединения с АО РКС, АО ОКБ Факел, ИКИ РАН, ИМБП РАН; обсуждены с ООО СТЦ
- теоретические аспекты поддержаны грантами РНФ №19-11-00256 и № 24-11-00038, прикладные - контрактами с АО РКК Энергия
- благодарю сотрудников Отдела № 7 ИПМ за вклад в разработку представленного проекта



**Спасибо за внимание!**



# Бэкап-слайды



# Аппараты класса микро и нано за пределами околоземной орбиты



Попутный запуск с миссией <b>InSight</b> (2018) – MarCO-A и MarCO-B	Марс
Попутный запуск с миссией <b>DART</b> (2021) – LICIACube	астероид Дидим
Целевой запуск ракетой <b>Electron/Photon</b> (2022) – CAPSTONE	гало-орбита EM L2
<b>Попутный запуск с миссией Artemis (2022):</b>	
<u>ArgoMoon</u>	высокоэллиптическая околоземная орбита
<u>BioSentinel</u>	гелиоцентрическая орбита
CuSP	гелиоцентрическая орбита
<u>LunIR</u>	гелиоцентрическая орбита
Team Miles	гелиоцентрическая орбита
LunaH-Map	окололунная орбита
Lunar IceCube	окололунная орбита
OMOTENASHI	столкновение с Луной
<u>EQUULEUS</u>	гало-орбита EM L2
NEA Scout	астероид 2020 GE

Электростатическая ионная ЭРДУ (йод)

Электростатическая ионная ЭРДУ (йод)

Электростатическая ионная ЭРДУ (йод)

Электронагревная ЭРДУ (вода)



# Миссии в дальний космос с ЭРДУ



## Луна

### SMART-1 (2003–2006)

*Холловский ЭРДУ 67 мН, 1540 с, полная стартовая масса КА 370 кг, запас ксенона 82 кг*

## Астероиды

### Deep Space 1 (1998–2001) – астероид Брайль и комета Борелли

*Электростатический ионный ЭРДУ 90 мН, 3100 с, полная стартовая масса КА 486 кг, запас ксенона 82 кг*

### Dawn (2007–2018) – астероиды Веста, Церера

*3 электростатических ионных ЭРДУ 90 мН, 3100 с, полная стартовая масса КА 1218 кг, запас ксенона 425 кг*

### Hayabusa 1 (2003–2010) – астероид Итокава

*3+1 электростатических ионных ЭРДУ 7.6 мН, 3056 с, полная стартовая масса КА 510 кг, запас ксенона 66 кг*

### Hayabusa 2 (2014–2018) – астероид Рюгю

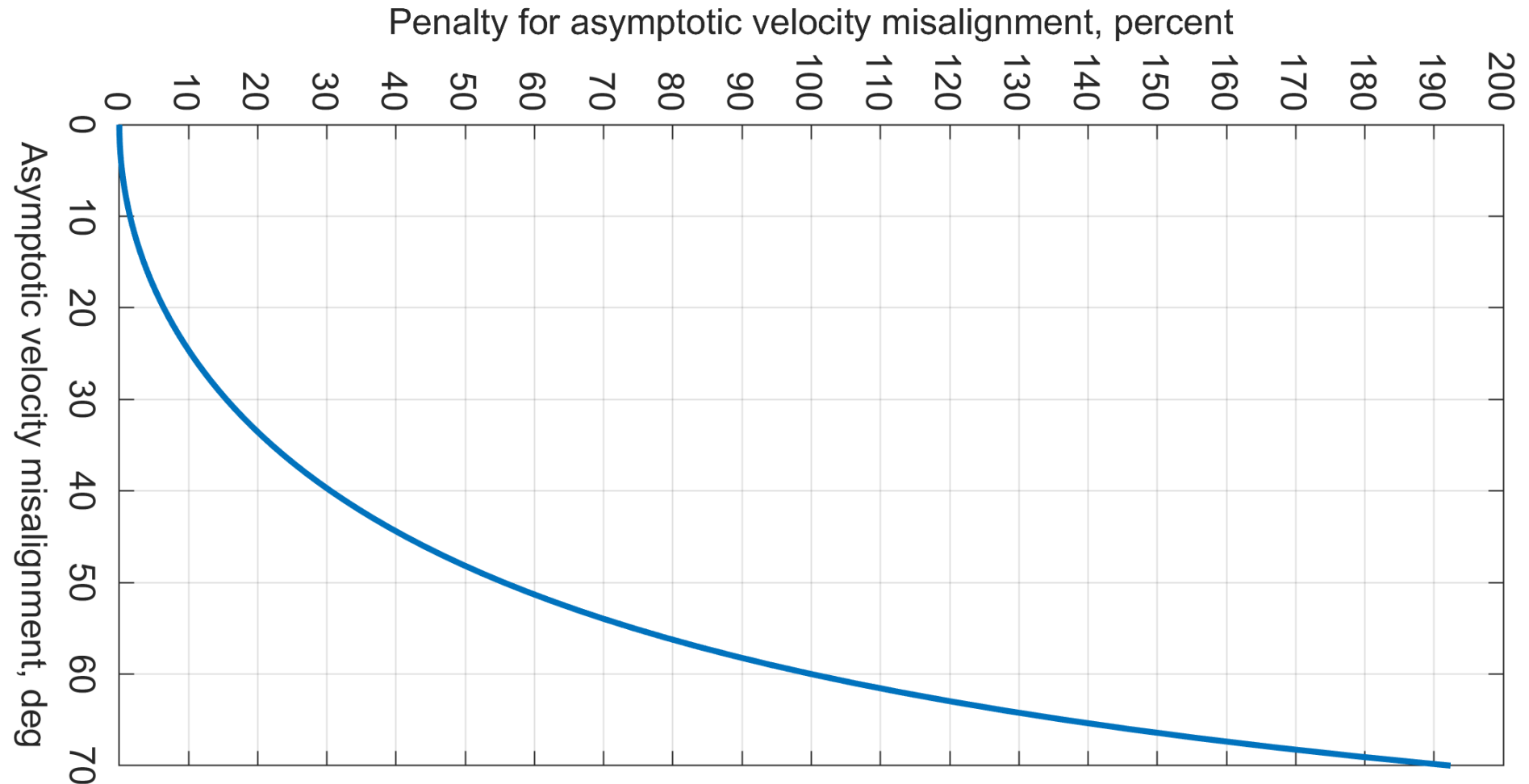
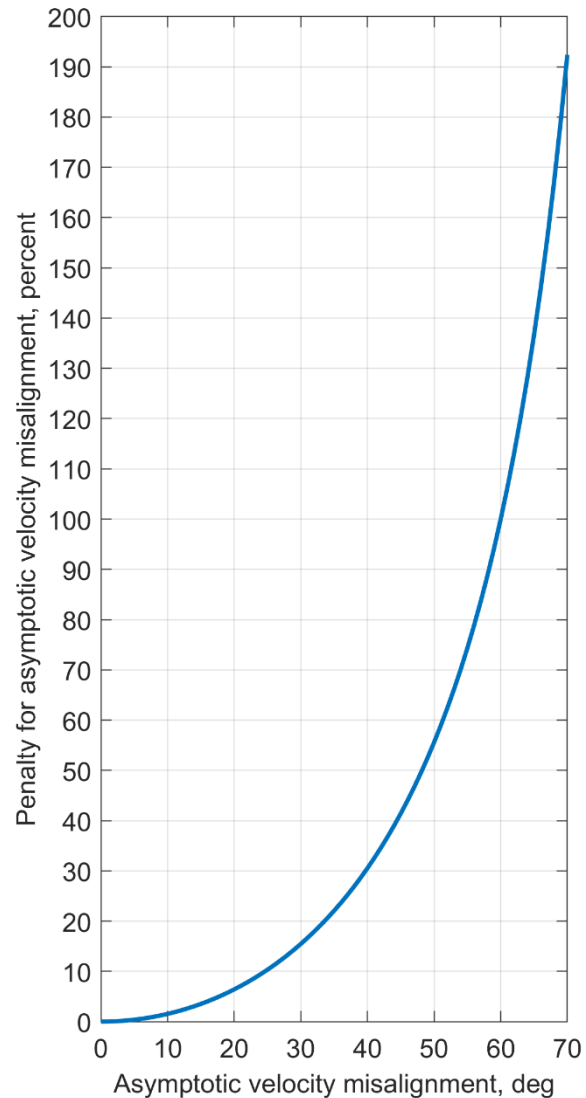
*3+1 электростатических ионных ЭРДУ 10.5 мН, 2877 с, полная стартовая масса КА 600 кг, запас ксенона 66 кг*

### Psyche (5 октября 2023–...) – астероид Психея

*4 холловских ЭРДУ 280 мН, 1800 с, полная стартовая масса КА 2608 кг, запас ксенона 922 кг*



# Штраф за промах по направлению асимптотической скорости





# Максимальная масса МКА к Марсу при попутном запуске с РБ Фрегат



## Сценарий «Кондор»

Основная ПН	Кондор-ФКА-М	
Масса основной ПН	2000 кг	
Рабочая орбита основной ПН	ССО 500–550 км, MLTAN ~6:30/7:00	
Разгонный блок (РБ)	Фрегат	
Максимальный запас топлива РБ	5235 кг	
Конечная масса РБ	945 кг	
Масса адаптера	425 кг	
Максимальная масса МКА	<b>1016 кг</b>	для $v_{\infty} = 3.0$ км/с
	<b>873 кг</b>	для $v_{\infty} = 3.5$ км/с



# Максимальная масса МКА к Луне при попутном запуске с РБ Фрегат

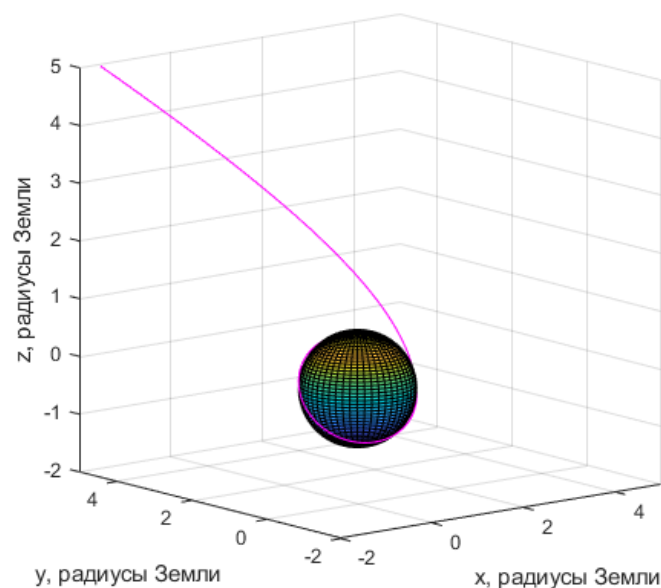


## Сценарий «Метеор»

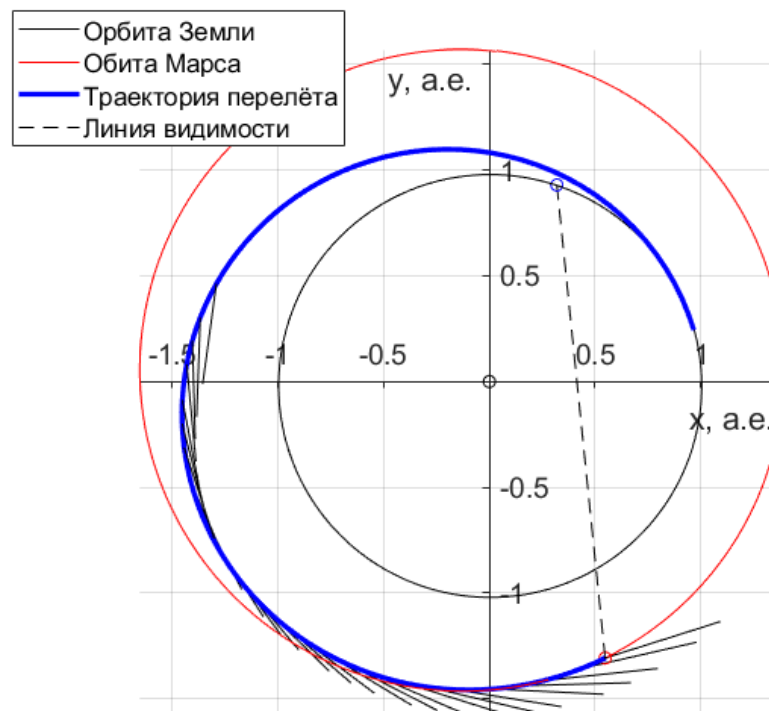
Основная ПН	Метеор-М	
Масса основной ПН	3250 кг	
Рабочая орбита основной ПН	ССО 800–850 км, MLTAN ~15:00/21:00	
Разгонный блок (РБ)	Фрегат	
Максимальный запас топлива РБ	5235 кг	
Конечная масса РБ	945 кг	
Масса адаптера	425 кг	
Максимальная масса МКА	<b>1379 кг</b>	для $C_3 = -2.0 \text{ км}^2/\text{с}^2$
	<b>1293 кг</b>	для $C_3 = -0.6 \text{ км}^2/\text{с}^2$



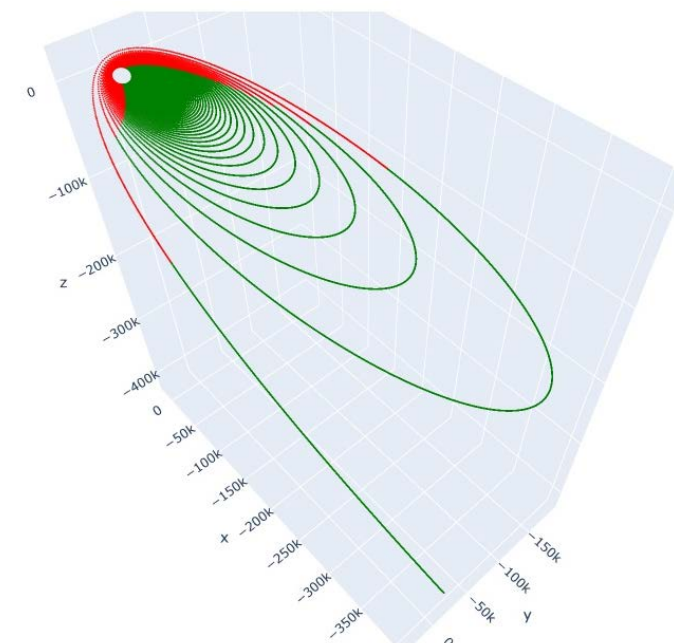
# Этапы миссии к Марсу с использованием РБ и ЭРДУ



Отлёт от Земли



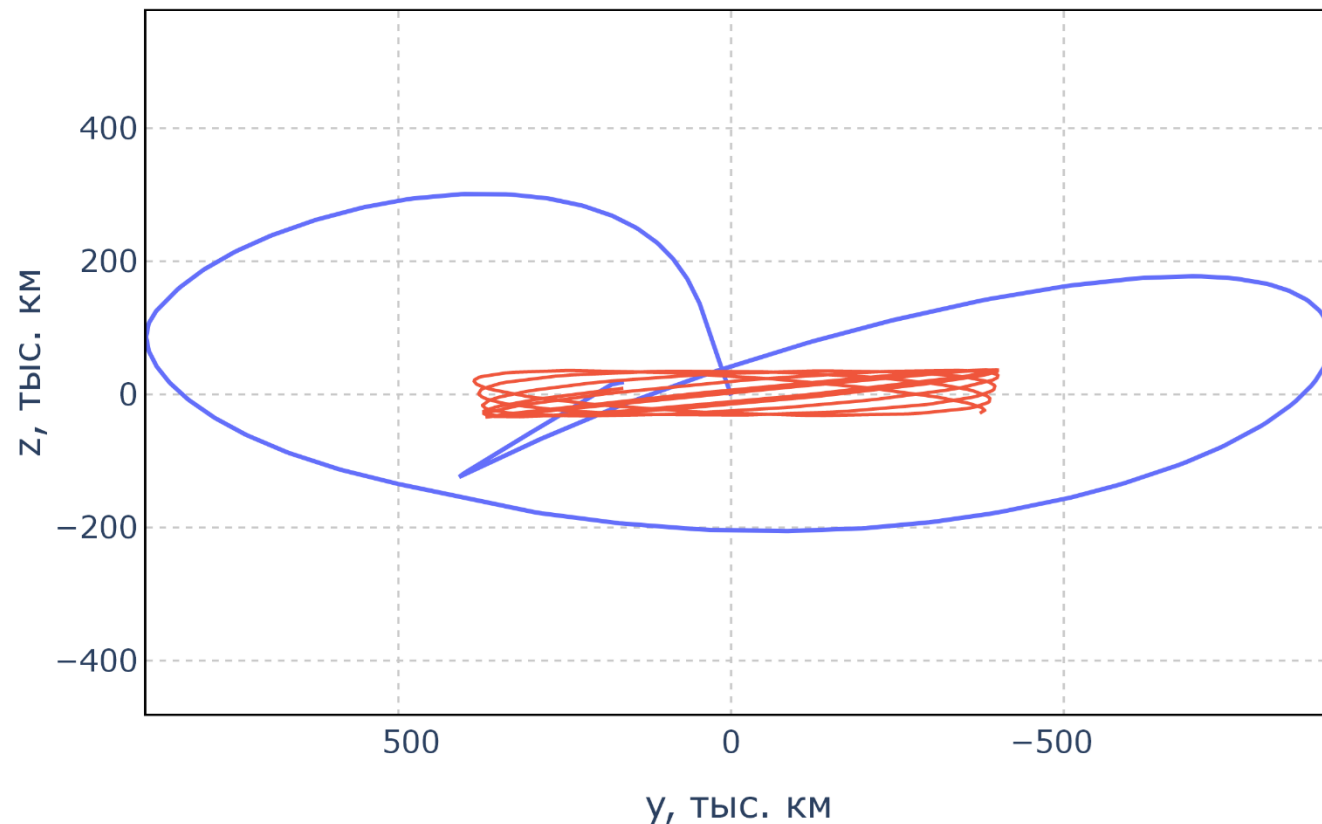
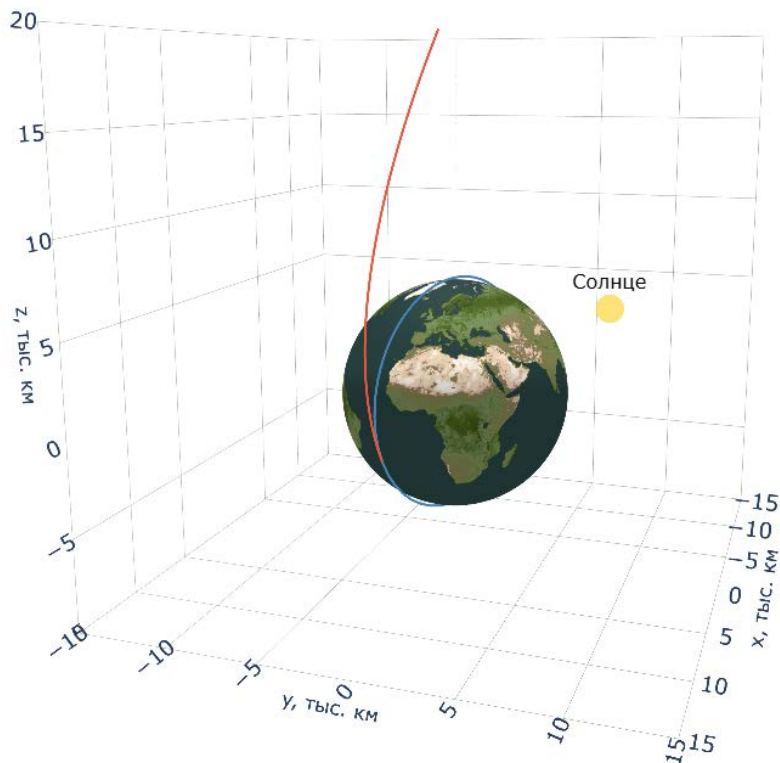
Межпланетный перелёт



Выход на целевую орбиту



# Попутный обходной перелёт: старт с полярной опорной орбиты



Дата старта: **26 августа 2028 года**

Выход на НЛО 10 тыс. км: **11 февраля 2029 года**

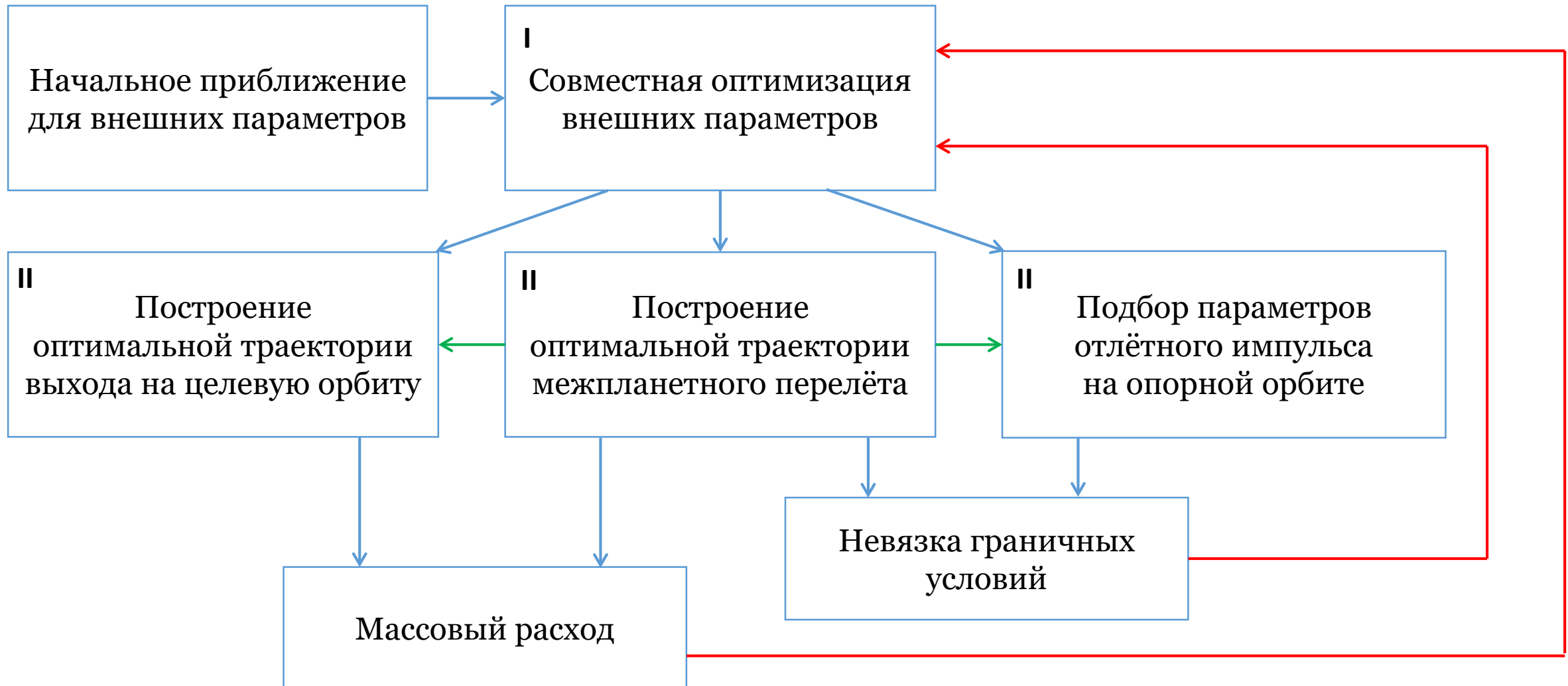
Отлётный импульс (с опорной орбиты 200 км): **3 193 м/с**

Затраты  $\Delta V$  на перелёт LEO–HLO: **79 м/с (TCM+DSM) + 215 м/с (LOI) = 294 м/с**

*Обходная траектория перелёта LEO–HLO  
во вращающейся геоцентрической  
системе координат Солнце–Земля*



# Двухуровневая схема оптимизации





# Постановка задачи оптимизации межпланетного участка траектории



## Уравнения движения:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, & \mathbf{r} & \text{— положение,} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}, & \mathbf{v} & \text{— скорость,} \\ \dot{m} &= -1.3\dot{m}_s(N) & m & \text{— масса,} \\ & & N & \text{— мощность,} \\ & & \mu & \text{— грав. параметр,} \\ & & m_s & \text{— массовый расход} \\ & & & \text{в секунду}\end{aligned}$$

## Управление:

$\mathbf{a}(t, \mathbf{x})$  — реактивное ускорение,  
где  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, m)^T$  — фазовый вектор

## Функционал:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \dot{m}_s(t, \mathbf{x}) dt \rightarrow \min$$

## Граничные условия:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_1) &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{\delta 1} & \mathbf{v}(t_1) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{\delta 1} \\ \mathbf{r}(t_2) &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{\delta 2} & \mathbf{v}(t_2) &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{\delta 2}\end{aligned}$$

$\mathbf{r}_1$  — положение Земли в  $t_1$

$\mathbf{r}_2$  — положение Марса в  $t_2$

$\mathbf{v}_1$  — положение Земли в  $t_1$

$\mathbf{v}_2$  — положение Марса в  $t_2$

$\mathbf{r}_{\delta 1}$  — положение относительно Земли

$\mathbf{r}_{\delta 2}$  — положение относительно Марса

$\mathbf{v}_{\delta 1}$  — скорость относительно Земли

$\mathbf{v}_{\delta 2}$  — скорость относительно Марса

Концы  $\mathbf{r}_{\delta 1}$  и  $\mathbf{r}_{\delta 2}$  лежат на границе сфер действия Земли и Марса соответственно



# Параметризация терминальных многообразий



## Параметризация левого конца:

$t_1$  – дата старта ( $08.10.2026 \pm 50$  дней) (1)

$\mathbf{r}_{\delta 1}$  – положение относительно Земли:

$$\mathbf{r}_{\delta 1} = \mathbf{r}_{\delta 1}(\alpha, \delta), \quad (2,3)$$

$$\|\mathbf{r}_{\delta 1}\| = r_{SOI}^{Earth},$$

$r_{SOI}$  – радиус сферы действия  
Земли (929 тыс. км),

$\alpha$  – угол восхождения,

$\delta$  – наклонение

$\mathbf{v}_{\delta 1}$  – скорость относительно Земли:

$$\mathbf{v}_{\delta 1} = v_{\delta 1} \frac{\mathbf{p}_v(t_1)}{p_v(t_1)},$$

$v_{\delta 1}$  – величина относительной  
скорости (4)

## Параметризация правого конца:

$\Delta t_1$  – время перелёта

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1 \quad (5)$$

$\mathbf{r}_{\delta 2}$  – положение относительно Марса:

$$\mathbf{r}_{\delta 2} = \mathbf{r}_{\delta 2}(\alpha, \delta), \quad (6,7)$$

$$\|\mathbf{r}_{\delta 2}\| = r_{SOI}^{Mars},$$

$r_{SOI}$  – радиус сферы действия  
Марса (578 тыс. км),

$\mathbf{v}_{\delta 2}$  – скорость относительно Марса: (8,9)

$$\mathbf{v}_{\delta 2} = \mathbf{v}_{\delta 2}(\alpha, \delta),$$

$$\|\mathbf{v}_{\delta 2}\| = v_{par},$$

Условие:

$$i(\mathbf{r}_{\delta 2}, \mathbf{v}_{\delta 2}) = 86.3^\circ$$

$v_{par}$  – вторая космическая скорость  
относительно Марса

итого 9 параметров



# Связь между параметрами ЭРДУ



Реактивная тяга выражается через массовый расход и скорость истечения рабочего тела

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{F}{m_0 - m_s(t)} \mathbf{e} = \frac{\dot{m}_s u}{m_0 - m_s(t)} \mathbf{e},$$

$\mathbf{F}$  – сила реактивной тяги

$F$  – величина силы тяги

$\mathbf{e}$  – направление силы тяги

$u$  – скорость истечения рабочего тела

Электрическая мощность, доступная ЭРДУ, зависит от расстояния до Солнца, учитывает деградацию и необходимый запас мощности для других систем МКА

$$N = N(t, r) = N_{au} \left( \frac{r_{au}}{r} \right)^{1.7} (1 - k_d t) - N_M$$

$N$  – мощность, подаваемая на двигатель

$N_{au}$  – мощность на расстоянии  $r_{au}$

$r_{au}$  – 1 астрономическая единица

$k_d$  – коэффициент деградации СБ (10% в год)

$N_M$  – запас мощности

$I_{sp}$  – удельный импульс

$g_0$  – стандартное грав. ускорение

Тяга и скорость истечения являются функциями от мощности

$$F = F(N) = F(t, r),$$

$$u = g_0 I_{sp}(N) = g_0 I_{sp}(t, r).$$



# Общий вид оптимального управления



Записывается функция Гамильтона-Понтрягина

$$H = -\dot{m}_s + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{f}_i = -\dot{m}_s + \mathbf{p}_v \cdot \left( \mathbf{e} \frac{u \dot{m}_s}{m_0 - m_s} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} + 1.3 p_m \dot{m}_s$$

Из условия максимизации функции Гамильтона-Понтрягина

$$H = \left( \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e} \frac{u}{(m_0 - m_s)} + 1.3 p_m - 1 \right) \dot{m}_s + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{r}$$

$$H \rightarrow \max_{\mathbf{e}, \dot{m}_s}$$

Оптимальное управление принимает вид

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad \dot{m}_s = \begin{cases} \dot{m}_{s \max}, & \kappa > 0 \\ 0, & \kappa \leq 0 \end{cases}, \quad \kappa = p_v \frac{u}{(m_0 - m_s)} + 1.3 p_m - 1$$

функция переключения



# Расширенная система уравнений движения



Расширенная система уравнений движения МКА

Уравнения движение

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a},$$

$$\dot{m} = -\dot{m}_s(\kappa) \cdot 1.3,$$

$$\dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}},$$

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H(\mathbf{a})}{\partial m}.$$

Сопряжённые уравнения

Управление определяется сопряжёнными переменными  $\mathbf{p}$  в момент времени  $t$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$$

Начальное значение вектора сопряжённых переменных неизвестно, его требуется найти

$$\mathbf{p}(t_1) = ? \quad \text{7 параметров}$$



# Математическая постановка задачи оптимизации перелета к Луне (1)



Для решения поставленной задачи используется метод параллельной пристрелки с оптимизацией промежуточных импульсов. Вводится оптимизируемый вектор параметров:

$$\mathbf{p} = [t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{10n}$$

содержит моменты времени, фазовые состояния и управляющие воздействия. Определяются индексы точек с импульсами:

$$\mathcal{I}_{\text{imp}} = \{i_1, i_2, i_3\}, \quad 1 < i_1 < i_2 < i_3 \leq n$$

Вводится фазовый поток

$$\varphi(t; \tau, \mathbf{y}) = [\mathbf{r}(t; \tau, \mathbf{y}), \mathbf{v}(t; \tau, \mathbf{y})]$$

системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}$$



# Математическая постановка задачи оптимизации перелета к Луне (2)



Постановка задачи математического программирования:

$$J(\mathbf{p}) = |\mathbf{u}_{i_1}| + |\mathbf{u}_{i_2}| + |\mathbf{u}_{i_3}| \rightarrow \min$$

при ограничениях общего вида на крайние точки (старт и прибытие)

$$\psi_1(\mathbf{p}) \geq 0, \quad \psi_n(\mathbf{p}) \geq 0,$$

ограничениях на непрерывность траектории

$$\mathbf{r}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{r}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

ограничениях на гладкость траектории

$$\mathbf{v}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{v}_i = 0, \quad i \notin \mathcal{I}_{\text{imp}}$$

$$\mathbf{v}(t_i; t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}) - \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}_{\text{imp}}$$

и ограничениях на времена

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \quad .$$



# Алгоритм решения задачи ОПТИМИЗАЦИИ



- Задача математического программирования характеризуется
  - большим числом переменных (порядка 500)
  - всюду гладкими функциями ограничений
  - почти всюду гладкой целевой функцией (но в точке оптимума гладкость)
  - разреженными градиентом целевой функции и якобианом ограничений
- Эффективным для решения является сочетание
  - алгоритма внутренней точки (interior-point approach)
  - метода доверительной области (trust-region methods)
  - и расчета производных аналитически и через уравнения в вариациях
- Используются свободные реализации алгоритма оптимизации



# О начальном приближении

- Алгоритм оптимизации требует начальное приближение
- Алгоритм сходится к локальному решению вблизи начального приближения, поэтому важно построить подходящее начальное приближение
- Нами разработана методика расчета таких первых приближений:

Tselousova A., Trofimov S., Shirobokov M., Ovchinnikov M. Geometric Analysis of Sun-Assisted Lunar Transfer Trajectories in the Planar Bicircular Four-Body Model // Applied Sciences, 2023. Vol. 13, No. 8, pp. 1–24. URL: <https://doi.org/10.3390/app13084676>

- Другая методика может основываться на глубоких классических исследованиях эволюции орбит искусственных спутников планет:

Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли, 1961. Вып. 8, С. 5-45.



# Вариации наклона и долготы восходящего узла в зависимости от вариаций импульса скорости в глубоком космосе

