Семинар по теории операторов и теории функций

16 декабря 2024 г.

Ф-неравенства Мазьи на областях

Д. М. Столяров

Доклад посвящён специальному классу неравенств в духе теоремы вложения Соболева для предельного показателя, в которых ключевую роль играет векторная природа функций и дифференциальных операторов. Иногда этот класс называют неравенствами Бургейна–Брезиса. Рассмотрим следующую версию теоремы вложения Соболева для предельного показателя: $\|\nabla f\|_{L_{d/(d-1)}} \lesssim \|\Delta f\|_{L_1}$, мы рассматриваем гладкие функции f с компактным носителем в пространстве $\mathbb{R}^d$, а значок $\lesssim$ указывает, что мультипликативная постоянная в неравенстве не зависит от выбора функции f. Это неравенство **неверно** (не стоит путать его с вложением Гальярдо–Ниренберга–Соболева $\|f\|_{L_{d/(d-1)}} \lesssim \|\nabla f\|_{L_1}$, которое **верно**). В 2010 году В. Г. Мазья в качестве гипотезы предложил нелинейную модификацию упомянутого неверного неравенства: пусть теперь $\Phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — положительно однородная степени $d/(d-1)$ функция; в таком случае,

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi\big(\nabla f(x)\big)\,dx\Big| \lesssim \|\Delta f\|_{L_1}^{\frac{d}{d-1}},$$

коль скоро Φ удовлетворяет условию сокращения $\int_{S^{d-1}} \Phi(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = 0$; символом S^{d-1} обозначена единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^d$. В 2021 году мне удалось доказать гипотезу Мазьи и если угодно, развить теорию неравенств более общего вида

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Phi\big(K * g(x)\big)\,dx\Big| \lesssim \|g\|_{L_1}^{\frac{d}{d-\alpha}},$$

где K — однородное степени $\alpha - d$ ядро, а функция Φ однородна степени $d/(d-\alpha)$.

В настоящем докладе я расскажу о распространении этих результатов на общность функций, заданных на областях с приличной границей, а также о любопытных задачах о продолжении гармонических и субгармонических функций, в этой связи возникающих.

Работа поддержана грантом РНФ 24-71-10011