

Триангуляции многообразий, похожих на проективные плоскости

А. А. Гайфуллин

МИАН, Общеинститутский семинар
19 декабря 2024 г.

Проективные плоскости

$\mathbb{R}$ -алгебры с делением:

- ▶ $\mathbb{R}$ – вещественные числа,
- ▶ $\mathbb{C}$ – комплексные числа,
- ▶ $\mathbb{H}$ – кватернионы,
- ▶ $\mathbb{O}$ – октавы.

Проективные плоскости $\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{HP}^2$, $\mathbb{OP}^2$ – замкнутые гладкие многообразия размерностей 2, 4, 8, 16 соответственно.

Функции Морса

Определение

Гладкая функция f на гладком многообразии M называется **функцией Морса**, если в каждой критической точке (т.е. такой, в которой $df = 0$) второй дифференциал d^2f невырожден.

Функции Морса можно определить и в **кусочно линейной** и в **топологической** категориях.

Теорема (Ж. Риб, 1946)

Если замкнутое многообразие допускает функцию Морса с двумя критическими точками, то оно гомеоморфно сфере.

Многообразия, похожие на проективные плоскости

Определение (Дж. Илс, Н. Кёйпер, 1962)

Замкнутое многообразие M размерности $2m$ называется **многообразием, похожим на проективную плоскость**, если оно обладает одним из следующих (эквивалентных) свойств:

1. на M существует функция Морса с тремя критическими точками (индексов 0 , m и $2m$);
2. M имеет клеточное разбиение с 3 клетками, то есть

$$M = S^m \cup_f D^{2m}, \quad f: S^{2m-1} \rightarrow S^m.$$

3. (при $m > 1$) M односвязно и $H^*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]/(u^3)$.

Из теоремы **Дж. Ф. Адамса (1960)** об отображениях с единичным инвариантом Хопфа следует, что многообразия, похожие на проективные плоскости, существуют только в размерностях 2, 4, 8 и 16.

Классификация

- $d = 2$: Всякое многообразие, похожее на проективную плоскость, гомеоморфно $\mathbb{RP}^2$.
- $d = 4$: Всякое (кусочно линейное) многообразие, похожее на проективную плоскость, гомеоморфно $\mathbb{CP}^2$ (следует из результатов [М. Фридмана, 1982](#)).
- $d = 8$: Полная классификация ([Л. Крамер, 2002](#)): бесконечное семейство PL многообразий $Y_h^8 = Y_{1-h}^8$, $h \in \mathbb{Z}$, различающихся (с точностью до PL гомеоморфизма) своими числами Понтрягина:

$$p_1^2[Y_h^8] = 4(2h - 1)^2$$

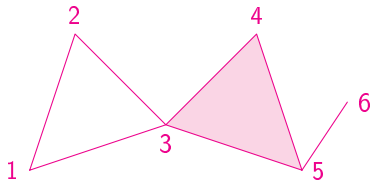
При этом $Y_0^8 = Y_1^8 = \mathbb{HP}^2$.

- $d = 16$: Полная классификация ([Л. Крамер, 2002](#)): аналогичный результат – вместо первого класса Понтрягина нужно брать второй + есть дополнительный экзотический PL инвариант со значениями в $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Триангуляции многообразий

Симплициальный комплекс K с множеством вершин V :

- ▶ на некоторые конечные подмножества множества вершин V натянуты симплексы;
- ▶ если на σ натянут симплекс, то на всякое подмножество $\tau \subset \sigma$ тоже натянут симплекс.



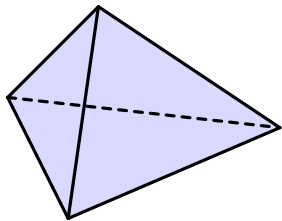
Максимальные симплексы:

$\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$
 $\{3, 4, 5\}$ $\{5, 6\}$

Если симплициальный комплекс K гомеоморфен топологическому многообразию M , то K называется **триангуляцией** многообразия M .

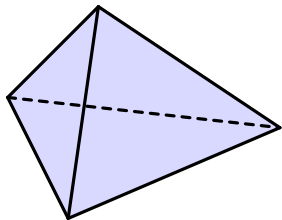
Все рассматриваемые многообразия будут замкнутыми, то есть компактными и без края.

Триангуляции многообразий: примеры

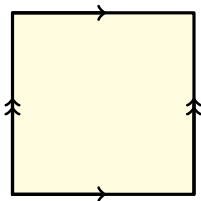


$$S_4^2$$

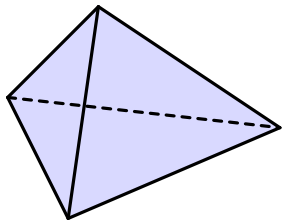
Триангуляции многообразий: примеры



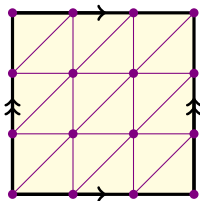
S_4^2



Триангуляции многообразий: примеры

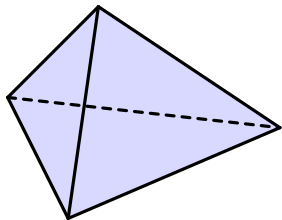


S_4^2

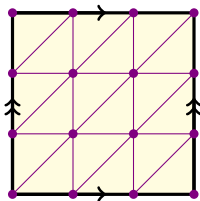


T_9^2

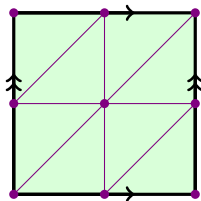
Триангуляции многообразий: примеры



S^2_4

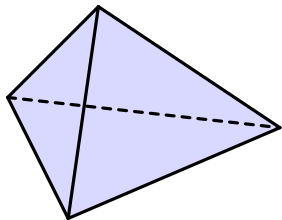


T^2_9

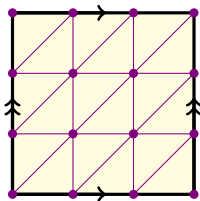


$T^2_4 ?$

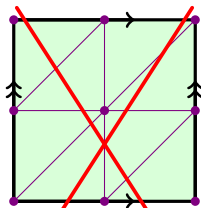
Триангуляции многообразий: примеры



S^2_4

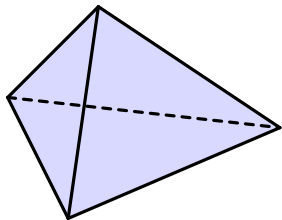


T^2_9

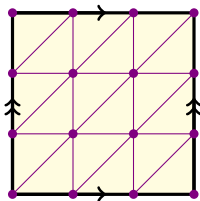


$T^2_4 ?$

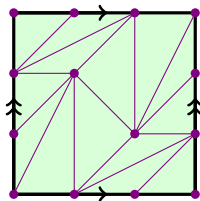
Триангуляции многообразий: примеры



S^2_4

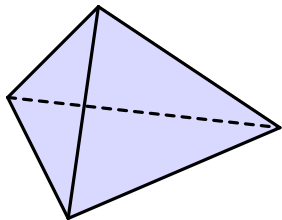


T^2_9

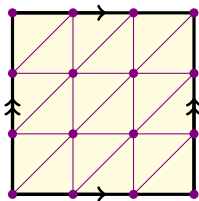


T^2_7

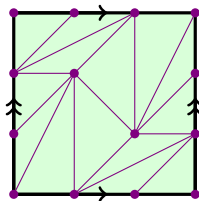
Триангуляции многообразий: примеры



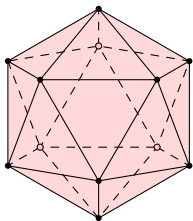
S_4^2



T_9^2

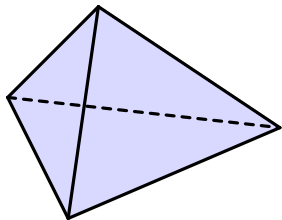


T_7^2

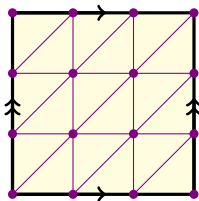


правильный икосаэдр

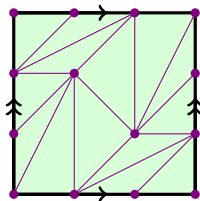
Триангуляции многообразий: примеры



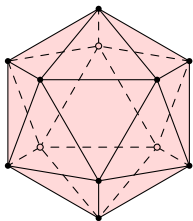
S_4^2



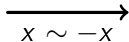
T_9^2



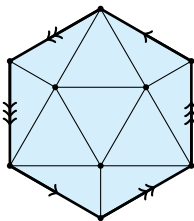
T_7^2



правильный икосаэдр



$x \sim -x$



$\mathbb{RP}_6^2$

Минимальные триангуляции

Триангуляция K многообразия M называется **минимальной**, если она имеет наименьшее количество вершин среди всех триангуляций многообразия M .

Минимальные триангуляции

Триангуляция K многообразия M называется **минимальной**, если она имеет наименьшее количество вершин среди всех триангуляций многообразия M .

d		число вершин n	
любое	S^d	$d + 2$	
2	Σ_g^2	$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2} \right\rceil, \quad g \neq 2$ 10, $g = 2$	М. Юнгерман, Г. Рингель, 1980
2	N_k^2	$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{24k + 1}}{2} \right\rceil, \quad k \neq 2, 3$ 8, $k = 2$ 9, $k = 3$	Г. Рингель, 1955
четное	$S^{d-1} \times S^1$	$2d + 3$	В. Кюнель, 1986
нечетное	$S^{d-1} \rtimes S^1$	$2d + 3$	В. Кюнель, 1986

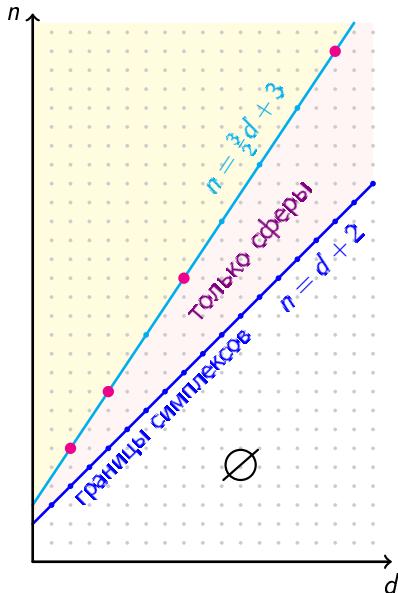
Минимальные триангуляции

d	многообразие	n	
3	$S^2 \times S^1$	10	Д. Уолкап, 1970
	$\mathbb{RP}^3$	11	Д. Уолкап, 1970
	$L(3, 1)$	12	У. Брем, 1990-е (построение); Б. Багчи, Б. Датта, 2005 (мин.)
4	$\mathbb{CP}^2$	9	В. Кюнель, 1983
	$S^2 \times S^2$	11	Ф. Лутц, 1999
	$(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$	12	Э. Кёлер, Ф. Лутц, 2005
	$\mathbb{RP}^4$	16	Ф. Лутц, 1999
	K3 поверхность	16	М. Каселла, В. Кюнель, 2001
5	$S^3 \times S^2$	12	Ф. Лутц, 2005
6	$S^3 \times S^3$	13	Ф. Лутц, 2005
8	$\mathbb{HP}^2$	15	У. Брем, В. Кюнель, 1987; Д. А. Городков, 2016 ($\approx \mathbb{HP}^2$)

Минимальные триангуляции

d	многообразие	n	
3	$S^2 \times S^1$	10	Д. Уолкап, 1970
	$\mathbb{RP}^3$	11	Д. Уолкап, 1970
	$L(3, 1)$	12	У. Брем, 1990-е (построение); Б. Багчи, Б. Датта, 2005 (мин.)
4	$\mathbb{CP}^2$	9	В. Кюнель, 1983
	$S^2 \times S^2$	11	Ф. Лутц, 1999
	$(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$	12	Э. Кёлер, Ф. Лутц, 2005
	$\mathbb{RP}^4$	16	Ф. Лутц, 1999
	K3 поверхность	16	М. Каселла, В. Кюнель, 2001
5	$S^3 \times S^2$	12	Ф. Лутц, 2005
6	$S^3 \times S^3$	13	Ф. Лутц, 2005
8	$\mathbb{HP}^2$	15	У. Брем, В. Кюнель, 1987; Д. А. Городков, 2016 ($\approx \mathbb{HP}^2$)
16	$\sim \mathbb{OP}^2$	27	Г., 2022

Граница Брема–Кюнеля



У. Брем, В. Кюнель, 1987:

Если $n < 3d/2 + 3$, то K – сфера.

Если $n = 3d/2 + 3$, то либо K – сфера, либо

- ▶ $d \in \{2, 4, 8, 16\}$,
- ▶ K – многообразие, похожее на проективную плоскость.
- ▶ П. Арну, А. Марен, 1991:

Дополнительность:

$\forall \sigma \subset V$ ровно одно из σ и $V \setminus \sigma$ натягивает симплекс.

В частности, K является $(d/2 + 1)$ -смежностным.

Граница Брема–Кюнеля: известные примеры



У. Брем, В. Кюнель, 1987:

Если $n < 3d/2 + 3$, то K – сфера.

Если $n = 3d/2 + 3$, то либо K – сфера, либо

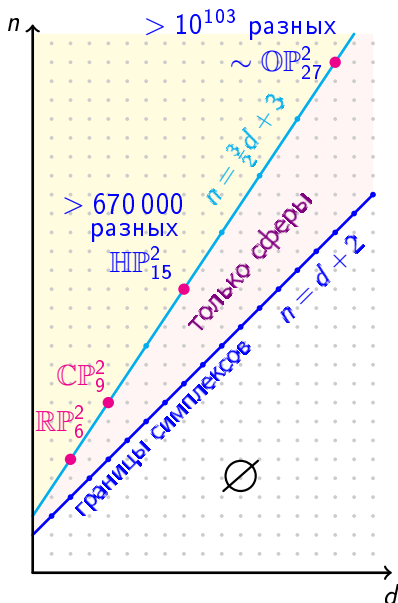
- ▶ $d \in \{2, 4, 8, 16\}$,
- ▶ K – многообразие, похожее на проективную плоскость.
- ▶ П. Арну, А. Марен, 1991:

Дополнительность:

$\forall \sigma \subset V$ ровно одно из σ и $V \setminus \sigma$ натягивает симплекс.

В частности, K является $(d/2 + 1)$ -смежностным.

Новые триангуляции



У. Брем, В. Кюнел, 1987:

Если $n < 3d/2 + 3$, то K – сфера.

Если $n = 3d/2 + 3$, то либо K – сфера, либо

- ▶ $d \in \{2, 4, 8, 16\}$,
- ▶ K – многообразие, похожее на проективную плоскость.

▶ П. Арну, А. Марен, 1991:
Дополнительность:

$\forall \sigma \subset V$ ровно одно из σ и $V \setminus \sigma$ натягивает симплекс.

В частности, K является $(d/2 + 1)$ -смежностным.

Теорема Зака

Пусть $X \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ – гладкое неприводимое проективное алгебраическое многообразие размерности d , не содержащееся ни в какой гиперплоскости.

Многообразием секущих $\text{Sec}(X)$ называется замыкание по Зарискому объединения всевозможных прямых, проходящих через пары точек многообразия X .

Теорема (Ф. Л. Зак, 1985)

1. Если $n < \frac{3}{2}d + 3$, то $\text{Sec}(X) = \mathbb{CP}^{n-1}$.
2. Если $n = \frac{3}{2}d + 3$, то либо $\text{Sec}(X) = \mathbb{CP}^{n-1}$, либо $d \in \{2, 4, 8, 16\}$ и $X \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ – одно из четырех вложений:
 - ▶ вложение Веронезе $\mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$,
 - ▶ вложение Сегре $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^8$,
 - ▶ вложение Плюккера $G_{\mathbb{C}}(2, 6) \hookrightarrow \mathbb{CP}^{14}$,
 - ▶ вложение Лазарсфелда $E_6/P_1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^{26}$.

Количества симплексов

$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$	$d = 16$
6	9	15	27
15	36	105	351
10	84	455	2925
	90	1365	17550
	36	3003	80730
		4515	296010
		4230	888030
		2205	2220075
		490	4686825
			8335899
			12184614
			14074164
			12301200
			7757100
			3309696
			853281
			100386
$2^5 - 1 = 31$	$2^8 - 1 = 255$	$2^{14} - 1 = 16383$	$2^{26} - 1 = 67108863$

Группы симметрий известных ранее триангуляций

d	K	Sym(K)	Sym(K)	вершинно-транзитивная?
2	$\mathbb{RP}_6^2$	A_5	60	да
4	$\mathbb{CP}_9^2$	$C_3^2 \rtimes C_6$	54	да
8	$\mathbb{HP}_{15}^2$	A_5	60	да
	$\widetilde{\mathbb{HP}}_{15}^2$	A_4	12	нет
	$\widetilde{\widetilde{\mathbb{HP}}}_{15}^2$	S_3	6	нет

Замечание. Списки симплексов еще трех триангуляций $\mathbb{HP}_{15}^2$, построенных Ф. Лутцем, были утеряны при реорганизации его интернет-страницы, поэтому группы их симметрий неизвестны.

27-вершинные триангуляции $M^{16} \sim \mathbb{OP}^2$

Теорема (Г.)

Имеется по крайней мере

$$\frac{(2^{351} + 13 \cdot 2^{118} + 81 \cdot 2^{29})}{351} + 2 \approx 1.3 \cdot 10^{103}$$

различных 27-вершинных триангуляций $M^{16} \sim \mathbb{OP}^2$:

К	Sym(K)	Sym(K)	в. т.?
4 триангуляции	$C_3^3 \rtimes C_{13}$	351	да
630 триангуляций	C_3^3	27	да
$\approx 1.3 \cdot 10^8$ триангуляций	C_{13}	13	нет
$\approx 1.8 \cdot 10^{11}$ триангуляций	C_3^2	9	нет
$\approx 1.8 \cdot 10^{34}$ триангуляций	C_3	3	нет
$\approx 1.3 \cdot 10^{103}$ триангуляций	1	1	нет

Триангуляции с меньшими группами симметрий были получены из 4 наиболее симметричных при помощи специальных комбинаторных движений – **тройных флипов**.

Алгоритм построения новых триангуляций

Новые примеры 15-вершинных триангуляций $\mathbb{HP}^2$ и 27-вершинных триангуляций $M^{16} \sim \mathbb{OP}^2$ были найдены при помощи специально разработанного компьютерного алгоритма:

- ▶ Ключевая особенность алгоритма: в первую очередь используется условие **дополнительности**, а уже потом рассматриваются примыкания симплексов друг к другу.
- ▶ Алгоритм завершает работу в течение разумного времени, если задана достаточно большая группа симметрий G : $|G| \geq 300$ в 16-мерном случае и $|G| \geq 7$ в 8-мерном.
- ▶ При помощи этого алгоритма, реализованного в виде программы на языке C++, были найдены 4 триангуляции $M^{16} \sim \mathbb{OP}^2$ с группой симметрий

$$G_{351} = C_3^3 \rtimes C_{13} = \mathbb{F}_{27} \rtimes (\mathbb{F}_{27}^\times)^2.$$

- ▶ Время работы программы на обычном ноутбуке $\approx 7,5$ часов.

Алгоритм поиска триангуляций

Пусть $V = \{1, \dots, 27\}$, $G \subset S_{27}$ – некоторая подгруппа.

Задача алгоритма. Перечислить все G -инвариантные 16-мерные симплицальные комплексы K на множестве вершин V такие, что:

1. для любых двух симплексов σ и τ комплекса K объединение множеств вершин σ и τ не равно всему V ;
2. каждый 15-мерный симплекс комплекса K содержится ровно в двух 16-мерных (K – **псевдомногообразия**);
3. K содержит ровно 100386 16-мерных симплексов.

Такой алгоритм даст нам список кандидатов, который заведомо содержит все G -инвариантные 27-вершинные 16-мерные триангулированные многообразия, похожие на проективные плоскости, но может содержать и что-то лишнее.

Нам нужен такой алгоритм, чтобы он работал разумное время для группы $G_{351} = C_3^3 \rtimes C_{13}$.

Алгоритм поиска триангуляций

Пусть $V = \{1, \dots, 27\}$, $G \subset S_{27}$ – некоторая подгруппа. Пусть $\mathcal{O}$ – множество всех G -орбит 17-элементных подмножеств множества V .

Задача алгоритма – переформулировка. Перечислить все подмножества $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}$ такие, что:

1. Если орбиты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ принадлежат $\mathcal{X}$, $A \in \mathfrak{a}$ и $B \in \mathfrak{b}$, то $A \cup B \neq V$.
2. Каждое 16-элементное подмножество $C \subset V$ либо не содержится ни в одном, либо содержится ровно в двух 17-элементных подмножествах, входящих в орбиты из $\mathcal{X}$.
3. Сумма мощностей орбит из $\mathcal{X}$ равна 100386.

Для G_{351} :

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{351} \cdot \binom{27}{17} = 24035.$$

Искомое подмножество $\mathcal{X}$ должно включать $100386/351 = 286$ орбит.

Запрещенные орбиты и пары орбит

- ▶ Если орбиты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ из $\mathcal{O}$ содержат множества A и B соответственно такие, что $A \cup B = V$, то орбиты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ не могут входить в $\mathcal{X}$ одновременно - мы говорим, что пара $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ запрещена.
- ▶ Если для 16-элементного подмножества $C \subset V$, количество 17-элементных подмножеств $A \in \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ таких, что A содержит C , больше 2, то $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ тоже запрещена.

Если пара $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\}$ запрещена, то орбита $\mathfrak{a}$ не может входить в $\mathcal{X}$.
Из 24035 орбит остается 18546 допустимых, $\mathcal{O}_{adm} \subset \mathcal{O}$.

Некоторые пары допустимых орбит по-прежнему запрещены.

Для каждой G -орбиты 16-элементных подмножеств $C \subset V$ (количество таких орбит 37145) определим группу примыкания

$$\mathcal{A}_C = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_{adm} \mid \text{ровно одно из множеств } A \in \mathfrak{a} \text{ содержит } C\}.$$

Задача алгоритма – дальнейшая переформулировка

Имеется множество $\mathcal{O}_{adm}$ (состоящее из 18546 элементов).
Некоторые пары $\{a, b\} \subset \mathcal{O}_{adm}$ **запрещены**. Имеется 37145
подмножеств $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_{adm}$, называемых **группами примыкания**.

Требуется перечислить все 286-элементные подмножества
 $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}_{adm}$ такие, что:

1. $\mathcal{X}$ не содержит ни одной запрещенной пары.
2. Для каждой из групп примыкания $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_{adm}$ множество $\mathcal{X} \cap \mathcal{A}_i$ либо пусто, либо имеет мощность 2.

Алгоритм

1. Изучая по очереди группы примыкания $\mathcal{A}_i$, «улучшаем» наши знания о запрещенных орбитах и парах орбит и о **требованиях $a \rightarrow b$** . Например, если в $\mathcal{A}_i$ осталось ровно 2 еще не запрещенные орбиты, то они требуют друг друга.
2. Когда такой метод не работает, алгоритм ветвится:
выбираем орбиту a и
 - ▶ сначала искусственно берем a в $\mathcal{X}$;
 - ▶ потом, наоборот, запрещаем a .

В каждом из случаев возвращаемся пункту 1.

3. **Эвристика**: в качестве a выбираем орбиту с наибольшим $10r(a) + p(a)$, где $r(a)$ – количество требований $a \rightarrow b$, а $p(a)$ – количество запрещенных пар $\{a, b\}$.
4. Если осталось менее 286 не запрещенных орбит – стоп.
5. **Наблюдение**: алгоритм ветвится слабо – количество искусственно взятых орбит всегда ≤ 4 , а обычно ≤ 1 .
6. **Время работы**: 7.5 часов на обычном ноутбуке.

Результат работы алгоритма

- ▶ Для группы $G = C_3^3 \rtimes C_{13}$ программа выдает список из 24 симплициальных комплексов.
- ▶ Пусть N – нормализатор G в S_{27} . Тогда $|N : G| = 6$.
Если отождествить $G = \mathbb{F}_{27} \rtimes S$, $S \subset \mathbb{F}_{27}^\times$ – квадраты, то $N/G \cong C_2 \times C_3$ порождается **обращением знака** $x \mapsto -x$ и **автоморфизмом Фробениуса** $x \mapsto x^3$.
Группа N/G действует на множестве 24 полученных симплициальных комплексов так, что распадается на 4 группы по 6 изоморфных комплексов. Получаем список из 4 попарно не изоморфных симплициальных комплексов K_1, K_2, K_3, K_4 .
- ▶ Проверяется, что K_i – комбинаторные многообразия. Это непросто; ключевым является использование свойства **неуклончивости (non-evasiveness)**.
- ▶ Легко проверить, что $\chi(K_i) = 3$. Следовательно, K_i – не сферы и, значит, многообразия, похожие на проективные плоскости.

Одна из 27-вершинных триангуляций $\sim \mathbb{OP}^2$ (стр. 1 из 3)

11111111111110111000000000	111111101011110111110000000	101111101111110110111000000
11111111111101111100000000	111110101111110111110000000	111010111111110110111000000
11111110111111111100000000	111010111111110111110000000	1101111001111111110111000000
11101111111111111100000000	110111100111111111110000000	1111111011011100111111000000
111111111111110011100000000	10011110111111111111110000000	111111001111111100111111000000
111111111111011011100000000	111111111111110010101000000	110111101111111100111111000000
111111111111011101110000000	111111111011110110101000000	1111010011111111011111000000
111111101111111101110000000	111110111111110110101000000	1111101111010101111111000000
111011111111111101110000000	101111111111110110101000000	0111111111010101111111000000
11111111011110111100000000	011111111111110110101000000	1101111110110101111111000000
11111111011110111100000000	11111111101110011101000000	1101111101110101111111000000
11111011111111011110000000	111111011111110011101000000	1101101111110101111111000000
10111111111111011110000000	110111111111110011101000000	1111111100011011111111000000
01111111111111011110000000	111111110011110111101000000	1111101111001101111111000000
11111111011101111110000000	111110111101110111101000000	0111111111001101111111000000
01111111111101111110000000	101111111101110111101000000	1110111111010110111111000000
11111111011011111110000000	011111111101110111101000000	1101111111010110111111000000
01111111111101111110000000	111011111011110111101000000	1101111110110110111111000000
11111110011111111110000000	110111110111101111101000000	1111111001110111111111000000
11101111011111111110000000	110111110111110111101000000	1111110101101110111111000000
10111110111111111110000000	100111111111110111101000000	1011111011011101111111000000
01111110111111111110000000	010111111111110111101000000	1110101111011101111111000000
01111101111111111110000000	111010111111110111011000000	1111110010111101111111000000
111110101111111101111000000	111111011111110010111000000	1110110101110111011111000000
111010111111111101111000000	111110111111010110111000000	1101111010111101111111000000
11111110110111011111000000	111111111010110110111000000	1110101110111101111111000000
11111100111111101111000000	111110111110110110111000000	1101111001111101111111000000
11011110111111101111000000	011111111110110110111000000	1111100011111101111111000000
11111011111101011111000000	111111101011110110111000000	1101101011111101111111000000
111111110101011111000000	110111110111110110111000000	1001111011111101111111000000
111111110101011111000000	111110101111110110111000000	1100101111111101111111000000

Одна из 27-вершинных триангуляций $\sim \mathbb{OP}^2$ (стр. 2 из 3)

11011100011111111111000000	111111111111110010001100000	1100111111111110011101100000
11001110011111111111000000	11111111011110110001100000	101011111111110011101100000
11110000111111111111000000	011111111111110110001100000	11101011111101101101100000
11111111111110110000100000	11111111101110011001100000	11101001111111011101100000
110111111111111110000100000	11111011111110011001100000	010111011111110111101100000
111111011111111011000100000	110111111111110011001100000	010101111111110111101100000
110111111111111011000100000	11111111001110111001100000	010011111111110111101100000
111101011111111011100100000	010111111111110111001100000	11111101111111001001100000
111011011111111011100100000	011111111111110100101100000	11111111010110110011100000
110101111111111011100100000	11111111111010010101100000	11111110101111011001100000
110011111111111011100100000	11111111110110010101100000	11111010111111011001100000
01011101111111111100100000	111111110111110010101100000	10111110111111011001100000
01001111111111111100100000	111011111111110010101100000	11111110110111001101100000
111111011011111011010100000	110111111111110010101100000	11111001111111001011100000
111111001111111011010100000	11111111011010110101100000	11111101101011011011100000
110111101111111011010100000	111101111011110110101100000	11101001111111011011100000
10011110111111111010100000	011101111111110110101100000	111111111000110111011100000
011111111110111100110100000	11111111101110001101100000	111111101001110111011100000
111111111110110010110100000	111110111111110001101100000	111110101101110111011100000
1111111011011101100110100000	110111111111110001101100000	101111101101110111011100000
111111001111111001110100000	11111111001110101101100000	111111001011110111011100000
11111111010110101110100000	111011111011110101101100000	111110001111110111011100000
11111110101110101110100000	010111111111110101101100000	110110101111110111011100000
111111101100111011110100000	11111111100110011101100000	100111101111110111011100000
011111111100111011110100000	11111011111011001101100000	111111111010110110011100000
11111110010111011110100000	111111110101110011101100000	111111101011110100111100000
11110110110111011110100000	11101111101110011101100000	111110101111110100111100000
111011101101111011110100000	111011111011110011101100000	101111101111110100111100000
111111000111111011110100000	111111010111110011101100000	001111111101111100111100000
111011001111111011110100000	111101011111110011101100000	111111101111010010111100000
110011101111111011110100000	111011011111110011101100000	1111111101011001001011100000
11111000011111111110100000	110101111111110011101100000	111111101110110010111100000

Одна из 27-вершинных триангуляций $\sim \mathbb{OP}^2$ (стр. 3 из 3)

111111100111110010111100000	111111000111110011111100000	111111010111110011100110000
111101101111110010111100000	111011001111110011111100000	11111100101111011100110000
111011101111110010111100000	1111110110001011111100000	11111000111111011100110000
001111111110111010111100000	0111111110001011111100000	11011010111111011100110000
111111110100101101111100000	11111100101011011111100000	11001110111111011100110000
111111101011010110111100000	11110110110101101111100000	11011010011111111100110000
111111100101101101111100000	11110100111011011111100000	11001111001111111100110000
111111100011101101111100000	11110100110111011111100000	1111100111011001110110000
101111110011110101111100000	11110010110111011111100000	11110101101111001110110000
111111101101110001111100000	11110100011111011111100000	11111001011111001110110000
111111001111110001111100000	11100100111111011111100000	01111010110111101110110000
111111101101011001111100000	111111100001110111111100000	100111111111011110001110000
111101001111111001111100000	110111100011110111111100000	110111110111110011001110000
111111110001101011111100000	110010100111111111111100000	11011110011111011001110000
111011111010110101111100000	100011100111111111111100000	100011111111011111001110000
111111101001101011111100000	111110101111111101010010000	010111110110111101101110000
111110101101110101111100000	111110101111111100110010000	111111111100010011101110000
101111101101110101111100000	111110101101111101110010000	110111110110110011101110000
111111001011110101111100000	11111111101011011001010000	11111110110001011101110000
111011101011110101111100000	111111111000101110101010000	0111111110001011011110000
111110001111110101111100000	10111111110011011101010000	110111100110111011101110000
110110101111110101111100000	110111110110111100111010000	010111110110111011101110000
110110100111111101111100000	110111100111111100111010000	110111100101111011101110000
100111110011111110111100000	110111010110111110111010000	01001110011111111101110000
111111111000110011111100000	110111110010111101111010000	0111111110001011011110000
111111101100110011111100000	111100101101111101111010000	111111001011010111011110000
111111011010110011111100000	11011110001111101111010000	111110101111010100111110000
111011111010110011111100000	11011011111111011000110000	01111111110001101011110000
111111001110110011111100000	10011111111111011000110000	001111110110111010111110000
111111100101110011111100000	11011010111111111000110000	110111110010111001111110000
1110111101101110011111100000	111111101101111001100110000	
111011101011110011111100000	111111001111111001100110000	

Результат Д. А. Городкова

Есть известная старая задача о вычислении рациональных классов Понтрягина многообразия по его триангуляции.

Частичные результаты: А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд, М. В. Лосик (1975), Р. МакФерсон (1977), Дж. Чигер (1983), И. М. Гельфанд и Р. МакФерсон (1992).

Г., 2004: Полностью комбинаторная формула для первого рационального класса Понтрягина, пригодная для вычислений.

Д. А. Городков, 2016: Применив эту формулу, вычислил, что для 15-вершинных триангулированных многообразий Брема–Кюнеля M_{15}^8 имеет место равенство

$$p_1^2[M_{15}^8] = 4 = p_1^2[\mathbb{HP}^2].$$

Следовательно, эти многообразия PL гомеоморфны $\mathbb{HP}^2$.

Для второго класса Понтрягина не известно эффективной комбинаторной формулы, поэтому метод не работает в 16-мерном случае.

Гипотеза

Гипотеза

Все построенные 27-вершинные триангулированные многообразия гомеоморфны $\mathbb{CP}^2$.

Возможные группы симметрий

Почему для группы симметрий $C_3^3 \rtimes C_{13}$ программа находит триангуляции, а для других групп близких порядков – нет?

Возможные группы симметрий

Почему для группы симметрий $C_3^3 \rtimes C_{13}$ программа находит триангуляции, а для других групп близких порядков – нет?

Теорема (Г.)

Имеется список из 26 подгрупп группы S_{27} , который содержит (с точностью до сопряжения) все возможные группы симметрий 27-вершинных триангуляций 16-мерных многообразий, похожих на $\mathbb{O}P^2$. (Не утверждается, что все группы из списка реализуются как группы симметрий.)

Доказательство опирается на:

- 1) **теорию Смита–Бредона** (когомологические свойства множеств неподвижных точек преобразований простых порядков);
- 2) **комбинаторные результаты Багчи–Датты** о псевдомногообразиях, удовлетворяющих условию дополненности;
- 3) **результаты Судзуки и Хигмана** о конечных группах, в которых порядки всех элементов – степени простых чисел.

Возможные группы симметрий 27-вершинных триангуляций $\sim \mathbb{OP}^2$

№	Группа	$ G $	Действие (орбиты)	Примеры
1	$C_3^3 \rtimes C_{13}$	351	транзитивное	4
2	C_3^3	27	регулярное транзитивное	630
3	$He_3 = 3_+^{1+2}$	27	регулярное транзитивное	нет
4	3_-^{1+2}	27	регулярное транзитивное	нет
5	$C_{13} \rtimes C_4$	52	13, 13, 1	нет
6	$C_3^2 \rtimes C_4$	36	9, 9, 9	нет
7	D_{13}	26	13, 13, 1	нет
8	D_{11}	22	11, 11, 2, 2, 1	нет
9	$C_3 \rtimes S_3$	18	9, 9, 9	нет
10	D_9	18	9, 9, 9	нет
11	C_{13}	13	13, 13, 1	$> 1.3 \cdot 10^8$
12	A_4	12	12, 12, 3	нет
13	C_{11}	11	11, 11, 1, 1, 1, 1, 1	нет
14	C_3^2	9	9, 9, 9	$> 1.8 \cdot 10^{11}$

... всего 26 групп

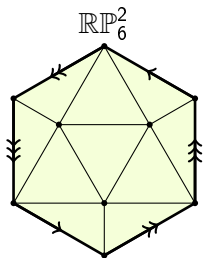
Новые примеры и классификация триангуляций $\mathbb{HP}_{15}^2$

Теорема (Г.)

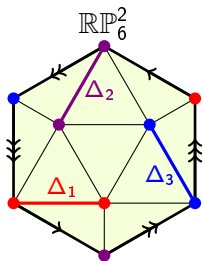
Имеется ровно 75 разных 15-вершинных триангуляций $\mathbb{HP}^2$ с группами симметрий порядков > 3 .

Группа	$ G $	Действие (орбиты)	Количество
A_5	60	транзитивное	1
A_4	12	12, 3	2
$C_6 \times C_2$	12	12, 3	1
C_7	7	7, 7, 1	19
S_3	6	6, 3, 3, 3	12
C_6	6	6, 6, 3	14
C_5	5	5, 5, 5	26
C_3	3	3, 3, 3, 3, 3	≥ 4617
C_2	2	2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1	≥ 3345
1	1		$> 670\,000$

Тройные флипы

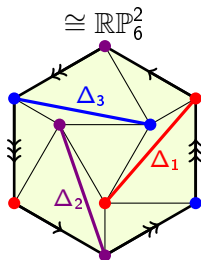
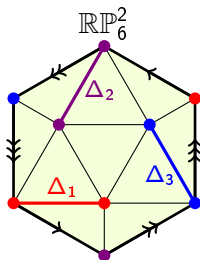


Тройные флипы



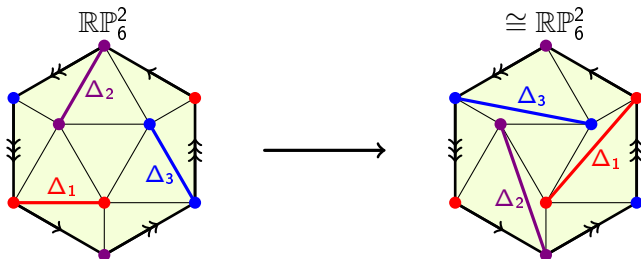
$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1)$$

Тройные флипы



$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

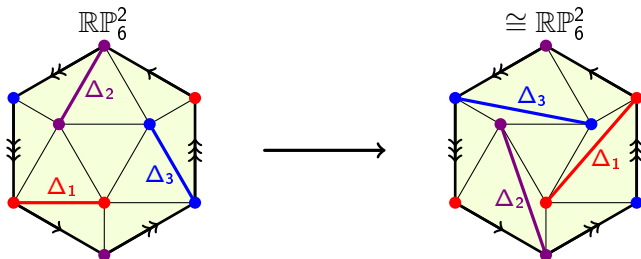
Тройные флипы



$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

$\mathbb{CP}_9^2$: такой же подкомплекс с $\dim \Delta_i = 2$; перестройка приводит к триангуляции $\cong \mathbb{CP}_9^2$.

Тройные флипы



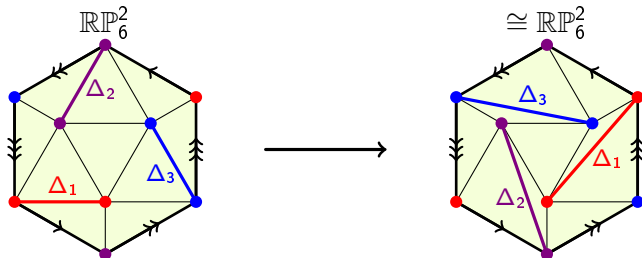
$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

$\mathbb{CP}_9^2$: такой же подкомплекс с $\dim \Delta_i = 2$; перестройка приводит к триангуляции $\cong \mathbb{CP}_9^2$.

$\mathbb{HP}_{15}^2$: 5 таких же подкомплексов с $\dim \Delta_i = 4$; одна орбита по действию $\text{Sym}(\mathbb{HP}_{15}^2) \cong A_5$. Перестройки не мешают друг другу!

- ▶ Если выполнить сразу все 5 получим снова $\cong \mathbb{HP}_{15}^2$.
- ▶ Если выполнить 1 или 4 перестройки, получим $\widetilde{\mathbb{HP}}_{15}^2$.
- ▶ Если выполнить 2 или 3 перестройки, получим $\widetilde{\widetilde{\mathbb{HP}}}_{15}^2$.

Тройные флипы

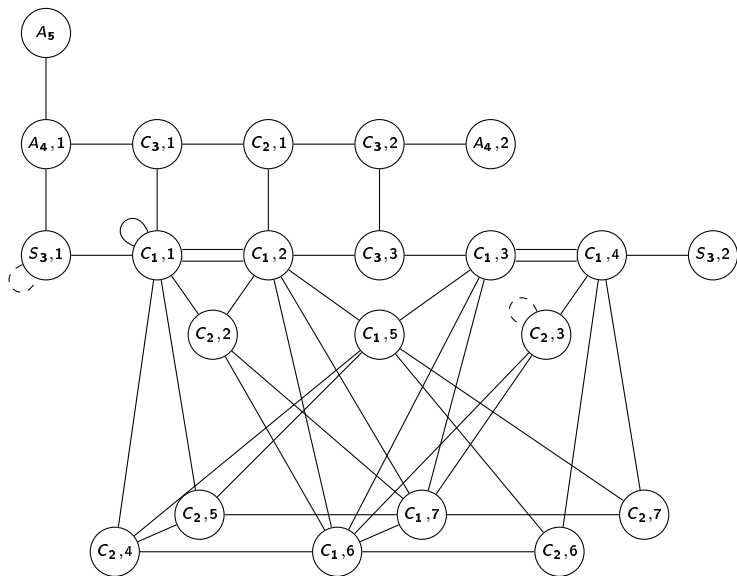


$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

K_2 : 351 таких же подкомплексов с $\dim \Delta_i = 8$; одна орбита по действию $G = C_3^3 \rtimes C_{13}$. Перестройки не мешают друг другу!

- ▶ Если выполнить перестройки с номерами из подмножества $A \subset G$, получим некоторую триангуляцию K_A . При этом $K_{A_1} \cong K_{A_2}$ тогда и только тогда, когда $A_2 = gA_1$ для некоторого $g \in G$.
- ▶ Если выполнить сразу все 351 перестроек, получим K_3 .
- ▶ K_1 и K_4 не содержат подкомплексов указанного вида.

Компонента графа тройных флипов $\mathbb{HP}_{15}^2$



Список публикаций

- [1] A. A. Gaifullin, “634 vertex-transitive and more than 10^{103} non-vertex-transitive 27-vertex triangulations of manifolds like the octonionic projective plane”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **88**:3 (2024), 12–60; arXiv:2207.08507.
- [2] А. А. Гайфуллин, “О возможных группах симметрий 27-вершинных триангуляций многообразий, похожих на октавную проективную плоскость”, *Матем. сб.*, **215**:7 (2024), 3–51; arXiv:2310.16679.
- [3] А. А. Гайфуллин, “Новые примеры и частичная классификация 15-вершинных триангуляций кватернионной проективной плоскости”, *Труды МИАН*, **326**, МИАН, М., 2024 (в печати); arXiv:2311.11309.

Программы и списки симплексов триангуляций:

- [4] A. A. Gaifullin, “Triangulations of the quaternionic projective plane and manifolds like the octonionic projective plane”, <https://github.com/agaif/Triangulations-like-OP2>, version 2 (2023).

Спасибо за внимание!