Расстояние по Громову-Хаусдорфу и его свойства

Наянзин Алексей

Научный руководитель: Арутюнов Андроник Арамович

Институт проблем управления РАН

12 декабря 2024 г.

Расстояние Хаусдорфа

Определение 1 (полуметрика)

Пусть X – множество, отображение $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ называется **полуметрикой**, если $\forall x, y, z \in X$ выполняется $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ и

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Определение 2 (Расстояние Хаусдорфа)

Пусть X метрическое пространство, A, $B \subseteq X$ – некоторые подмножества. Определим **расстояние Хаусдорфа**

$$d_H(A,B) = \inf\{r \mid A \subseteq U_r(B), \quad B \subseteq U_r(A)\},$$

где

$$U_r(A) = \{x \in X \mid d(x,A) < r\}.$$

Предложение 1

Расстояние Хаусдорфа задает полуметрику на 2^X.

Некоторые примеры:

- Пусть $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $a, b \in X$, тогда $d_H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$.
- Пусть $A = \{a\}$, $B \subseteq X$, тогда $d_H(\{a\}, B) = \sup\{d(a, b) \mid b \in B\}$.
- Пусть $A = X$, B – всюду плотное в X подмножество, тогда $d_H(A, B) = 0$
- $A = X = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{Z}$, тогда $d_H(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \frac{1}{2}$.

Пусть $M(X) \subseteq 2^X$ – совокупность замкнутых ограниченных подмножеств пространства X.

Предложение 2

Расстояние Хаусдорфа задает метрику на $M(X)$.

Теорема 1

Если пространство X полное, то пространство $(M(X), d_H)$ также полное. Если X компактное, то и $(M(X), d_H)$ – компактное.

Расстояние Хаусдорфа $d_H(A, B)$ зависит не только от геометрии пространств A и B, но и от того, как они вложены в X.

Расстояние Громова-Хаусдорфа

Определение 3

Расстояние по Громову-Хаусдорфу между пространствами X и Y задается формулой

$$d_{GH}(X,Y) = \inf_{Z} \inf_{\varphi,\psi} d_H^Z(\varphi(X),\psi(Y)),$$

где инфимум берется по всевозможным изометричным вложениям $\varphi\colon X \to Z, \psi\colon Y \to Z$;
$d_H^Z(\varphi(X),\psi(Y))$ есть расстояние Хаусдорфа между $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$ в пространстве (Z,d^Z).

- Расстояние зависит только от класса изометрии пространств, то есть если метрические пространства X и X' изометричны, то для каждого Y верно, что $d_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X',Y)$.
- Считать расстояние по Громову-Хаусдорфу обычно очень трудно, но как правило интересны именно вопросы сходимости, а не конкретные числа.

Примеры

- Обозначим как $\{pt\}$ пространство, состоящее из одной точки. Тогда

$$d_{GH}(\{pt\}, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X = \frac{1}{2}\sup_{x,y\in X}\{d(x,y)\}.$$

  Доказательство. Рассмотрим $Z = X \coprod \{pt\}$, с метрикой, заданной как
  $d^Z(x,y) = d(x,y)$, если $x, y \in X$,
  $d^Z(x,pt) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$.
  Это действительно метрика. Причем $d_H(\{pt\}, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X \Rightarrow$
  $d_{GH}(\{pt\}, X) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$.
  Если $d_{GH}(\{pt\}, X) < \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$, то найдутся Z и изометричные вложения $\varphi\colon \{pt\} \to Z$, $\psi\colon X \to Z$, т.ч. $\psi(X) \subseteq U_r(\varphi(pt))$, где $r < \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$. Тогда $\operatorname{diam}\psi(X) < 2r$, что противоречит изометричности ψ.

- Если X и Y ограниченные метрические пространства, то

$$\frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y| \leqslant d_{GH}(X,Y) \leqslant \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$$

Еще примеры

- [1] Пусть $\lambda\Delta$ – пространство, расстояние между любыми точками которого равняется λ. Если X ограниченное пространство меньшей мощности чем Δ, то

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

- [2] Расстояния между сферами

$$d_{GH}\left(\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^n\right) = \frac{\pi}{2}, \quad d_{GH}\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2\right) = d_{GH}\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} \leqslant d_{GH}\left(\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n\right) < \frac{\pi}{2}, \quad (0 < m < n)$$

[1] Григорьев, Иванов и Тужилин, «Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов».
[2] Lim, Mémoli и Smith, «The Gromov–Hausdorff distance between spheres».

Свойства, сохраняющиеся при сходимости

Пусть задана последовательность метрических пространств X_k. Будем говорить, что $X_k \stackrel{GH}{\to} Y$, если $d_{GH}(X_k, Y) \to 0$.

Теорема 2 (Ghanaat P. "Gromov-Hausdorff distance and applications". In: Summer school "Metric Geometry", Les Diablerets, August 25–30, 2013)

Пусть $X_k \stackrel{GH}{\to} Y$, тогда если начиная с некоторого номера

1. $\operatorname{diam} X_k \leqslant C \Rightarrow \operatorname{diam} Y \leqslant C$;
2. X_k *вполне ограничены* $\Rightarrow Y$ *вполне ограничено;*
3. X_k *сепарабельны* $\Rightarrow Y$ *сепарабельно;*
4. X_k *собственное,* Y *полное* $\Rightarrow Y$ *– собственное;*
5. X_k *собственное, геодезическое,* Y *полное* $\Rightarrow Y$ *собственное, геодезическое;*
6. X_k *гиперболическое* $\Rightarrow Y$ *гиперболическое.*

Эквивалентные определения[3]

Предложение 3

Пусть, (X, d_X), (Y, d_y) *– метрические пространства, тогда*

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_d d_H^{X \sqcup Y}(X, Y),$$

где инфинум взят по всем метрикам d*, ограничения которых на* X *и* Y *совпадают с* d_X *и* d_Y *соответственно.*

Определение 4 (Соответствие)

Пусть X и Y - два множества. Соответствием между X и Y называется множество $\mathfrak{R} \subset X \times Y$, удовлетворяющее следующему условию: для каждой точки $x \in X$ существует по крайней мере одна такая точка $y \in Y$, что $(x, y) \in \mathfrak{R}$, и аналогично для каждой точки $y \in Y$ существует такая $x \in X$, что $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Пример. Всякое сюръективное отображение $f : X \to Y$ определяет соответствие $\mathfrak{R}$ между X и Y следующим образом:

$$\mathfrak{R} = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

[3] Бураго Д.Ю., *Курс метрической геометрии.*

Определение 5 (Искажение)

Пусть $\mathfrak{R}$ - соответствие между метрическими пространствами X и Y. Его **искажение** $\operatorname{dis}\mathfrak{R}$ определяется равенством

$$\operatorname{dis}\mathfrak{R} = \sup\left\{\left|d_X(x,x') - d_Y(y,y')\right| : (x,y),(x',y') \in \mathfrak{R}\right\}$$

где d_X и d_Y - метрики пространств X и Y соответственно.

Теорема 3

Для любых метрических пространств X и Y имеет место равенство

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{\mathfrak{R}}(\operatorname{dis}\mathfrak{R}),$$

где инфимум берется по всем соответствиям $\mathfrak{R}$ между X и Y.

Определение 6

Пусть X, Y – метрические пространства, число $\varepsilon > 0$. Отображение (возможно, разрывное) $f : X \to Y$ называется ε-изометрией, если $\forall x_1, x_2$

$$|d_Y\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) - d_X\left(x_1, x_2\right)| \leqslant \varepsilon$$

и образ $f(X)$ является ε-сетью в Y.

Теорема 4

Пусть X и Y-метрические пространства, $\varepsilon > 0$. Тогда
(1) если $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, то существует 2ε-изометрия из X в Y;
(2) если существует ε-изометрия из X в Y, $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

Пространство компактных метрических пространств

Предложение 4

Пусть X, Y, Z *– метрические пространства, тогда*

$$d_{GH}(X,Z) \leq d_{GH}(X,Y) + d_{GH}(Y,Z).$$

Предложение 5

Пусть X *и* Y *компактные метрические пространства. Если* $d_{GH}(X,Y) = 0$, *то* X *и* Y *изометричны.*

Определение 7

Обозначим как $\mathfrak{M}$ множество классов эквивалентности (относительно изометричности) компактных метрических пространств. Из предложений выше (M, d_{GH}) – метрическое пространство, оно называется пространством Громова-Хаусдорфа.

Теорема 5 (Tuzhilin, *Lectures on Hausdorff and Gromov-Hausdorff Distance Geometry*)

Пространство $\mathfrak{M}$ *является полным и геодезическим.*

Предкомпактные подмножества $\mathfrak{M}$

Определение 8

Для метрического пространства X определим число покрытия и число упаковки как

$$\operatorname{cov}(X,\varepsilon) = \min\{n \mid X \text{ может быть покрыто } n \text{ открытыми } \varepsilon\text{-шарами } \}$$
$$\operatorname{pack}(X,\varepsilon) = \sup\left\{n \mid X \text{ содержит } n \text{ открытых дизъюнктных } \frac{\varepsilon}{2}\text{-шаров } \right\}.$$

Теорема 6 (Критерий Громова предкомпактности[4])

Пусть $\mathcal{C}$ – непустое подмножество $\mathfrak{M}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.
(1) Существует число $D \geq 0$ и функция $N : (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \leq D$ и $\operatorname{pack}(X,\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.
(2) Существует число $D \geq 0$ и функция $N : (0,\infty) \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $X \in \mathcal{C}$ выполняется $\operatorname{diam} X \leq D$ и $\operatorname{cov}(X,\varepsilon) \leq N(\varepsilon)$.
(3) Пространство $\mathcal{C}$ с метрикой d_G вполне ограничено.

[4] Бураго Д.Ю., *Курс метрической геометрии*.

Другие типы сходимости

Как мы видели раньше, расстояние по Громову-Хаусдорфу связано с понятием ε изометрии. Можно пытаться смотреть на другие классы отображений.

Определение 9

Метрические пространства X и Y назовем квазиизометричными, если существует для некоторых $A > 1$, $B, \varepsilon > 0$ отображение $f\colon X \to Y$, такое что

$$\frac{1}{A} d^X(x, y) - B \leqslant d^Y(f(x), f(y)) \leqslant A d^X(x, y) + B,$$

и $f(X)$ является ε сетью в Y.

Определение 10

Скажем, что последовательность X_k сходится к пространству X, если найдутся отображения $f_k\colon X_k \to X$, такие что $A_k \to 1$, $B_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$.

Возникает вопрос, метризуема ли такая сходимость, какие из свойств, выполненных для расстояния Громова-Хаусдорфа, остаются верными?

Lim, Sunhyuk, Facundo Mémoli и Zane Smith. «The Gromov–Hausdorff distance between spheres». В: *Geometry and Topology* 27.9 (дек. 2023), 3733–3800. ISSN: 1465-3060. DOI: 10.2140/gt.2023.27.3733. URL: http://dx.doi.org/10.2140/gt.2023.27.3733.

Tuzhilin, Alexey A. *Lectures on Hausdorff and Gromov-Hausdorff Distance Geometry*. 2020. arXiv: 2012.00756 [math.MG]. URL: https://arxiv.org/abs/2012.00756.

Бураго Д.Ю. Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. 2004. ISBN: 5939723004; 9785939723008.

Григорьев, Д. С., А. О. Иванов и А. А. Тужилин. «Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов». В: *Чебышевский сб.* (2019). DOI: 10.22405/2226-8383-2018-20-2-108-122.