О супремальных неравенствах Харди [1]

В.Д. Степанов
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: stepanov@mi-ras.ru

Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского)
(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. Москва, 13 декабря 2024 г.)

Аннотация

Обозначим $\mathfrak{M}(I)$ класс всех функций на $I := (0,\infty)$, измеримых по Лебегу, $\mathfrak{M}^+(I) \subset \mathfrak{M}(I)$ - подмножество неотрицательных функций. В 1925 Г. Г. Харди доказал неравенство

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty [f(t)]^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ f \in \mathfrak{M}^+(I), \tag{1}$$

которое выполняется для всех $1 < p < \infty$ и где константа $p' := \frac{p}{p-1}$ наилучшая из возможных. Неравенство (1) обобщалось во многих направлениях и оно имеет эквивалентную дифференциальную форму

$$\left(\int_0^\infty \frac{|u(x)|^p}{x^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \le p'\left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

где u локально абсолютно непрерывная функция на I ($u \in AC(I)$) такая, что $\liminf_{t\to 0}|u(t)| = 0$. В работе

[FLW] R. L. Frank, A. Laptev, T. Weidl, An improved one-dimensional Hardy inequality, J. Math. Sci. 263 (2022) 323–342

рассмотрено следующее улучшение неравенства (2)

$$\left(\int_0^\infty \max\left\{\sup_{0<s\le x}\frac{|u(s)|^p}{x^p}, \sup_{x\le s\le\infty}\frac{|u(s)|^p}{s^p}\right\}dx\right)^{\frac{1}{p}} \le p'\left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Неравенство (3) эквивалентно одновременному выполнению двух неравенств

$$\left(\int_0^\infty \sup_{0<s\le x}\frac{|u(s)|^p}{x^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \le p'\left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

и

$$\left(\int_0^\infty \sup_{x\le s\le\infty}\frac{|u(s)|^p}{s^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \le p'\left(\int_0^\infty |u'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

В статье [FLW] показано, что (4) и (5) эквивалентны (6) и (7), соответственно, где

$$\int_0^\infty W(s)|u(s)|^p ds \le (p-1)[p']^p \left(\sup_{s>0} s^{p-1}\int_s^\infty W(t)dt\right)\int_0^\infty |u'(x)|^p dx \tag{6}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект 24-11-00170.

и
$$\int_0^\infty W(s)|u(s)|^p ds \le [p']^p \left(\sup_{s>0} s^{-1}\int_0^s t^p W(t)dt\right)\int_0^\infty |u'(x)|^p dx, \tag{7}$$
где $W \in \mathfrak{M}^+(I)$. Доказательство основано на специфических неравенствах типа Гельдера. Именно, (4)$\Rightarrow$(6) следует применением
$$\int_0^\infty f(s)g(s)ds \le (p-1)\left(\int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{0<s\le x} f(s)\frac{dx}{x^p}\right)\left(\sup_{t>0} t^{p-1}\int_t^\infty g(s)ds\right) \tag{8}$$
для всех $f, g \in \mathfrak{M}^+(I)$. Также авторы [FLW] получают двухвесовые обобщения неравенств Харди и формулируют проблему: характеризовать
$$J(g) := \sup_{0\not\equiv f\in\mathfrak{M}^+(I)} \frac{\int_0^\infty f(s)g(s)ds}{\int_0^\infty \max\left\{\frac{1}{x^p}\operatorname*{ess\,sup}_{0<s\le x} f(s), \operatorname*{ess\,sup}_{x\le s\le\infty}\frac{f(s)}{s^p}\right\}dx}, \ g \in \mathfrak{M}^+(I). \tag{9}$$
В докладе дается решение указанной проблемы и обобщения для $L_p - L_q$ неравенств Харди, когда $1 < p < q < \infty$.