История аналитических множеств

Островский А.В.

Мюнхен, 06.02.2025

A HALF CENTURY OF POLISH MATHEMATICS

Remembrances and Reflections

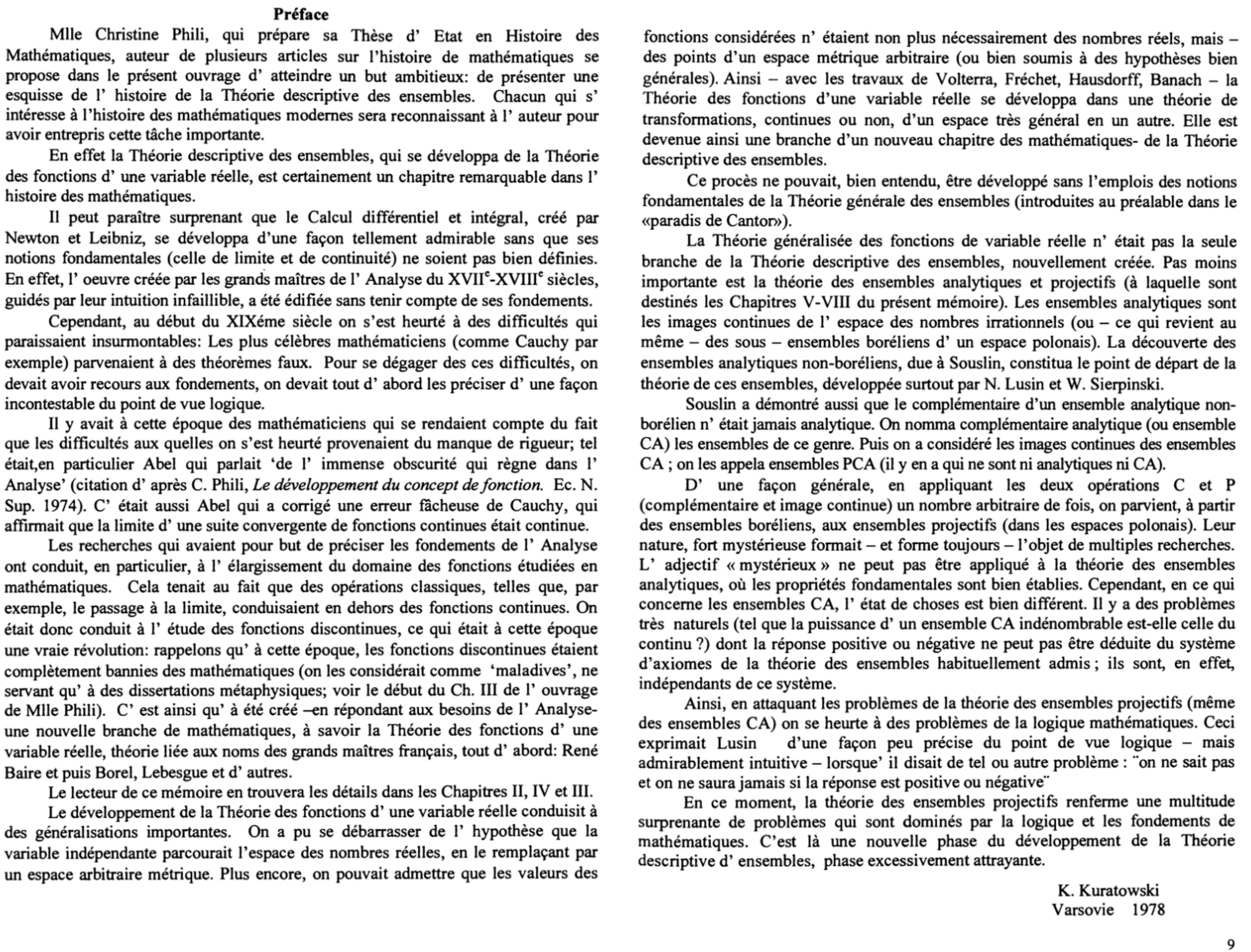
by

KAZIMIERZ KURATOWSKI

Member of the Polish Academy of Sciences
Professor Emeritus of the Warsaw University

PERGAMON PRESS
OXFORD · NEW YORK · TORONTO · SYDNEY
PARIS · FRANKFURT

PWN — POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSZAWA



Préface

Mlle Christine Phili, qui prépare sa Thèse d' Etat en Histoire des Mathématiques, auteur de plusieurs articles sur l'histoire de mathématiques se propose dans le présent ouvrage d' atteindre un but ambitieux: de présenter une esquisse de l' histoire de la Théorie descriptive des ensembles. Chacun qui s' intéresse à l'histoire des mathématiques modernes sera reconnaissant à l' auteur pour avoir entrepris cette tâche importante.

En effet la Théorie descriptive des ensembles, qui se développa de la Théorie des fonctions d' une variable réelle, est certainement un chapitre remarquable dans l' histoire des mathématiques.

Il peut paraître surprenant que le Calcul différentiel et intégral, créé par Newton et Leibniz, se développa d'une façon tellement admirable sans que ses notions fondamentales (celle de limite et de continuité) ne soient pas bien définies. En effet, l' oeuvre créée par les grands maîtres de l' Analyse du XVII^e-XVIII^e siècles, guidés par leur intuition infaillible, a été édifiée sans tenir compte de ses fondements.

Cependant, au début du XIXéme siècle on s'est heurté à des difficultés qui paraissaient insurmontables: Les plus célèbres mathématiciens (comme Cauchy par exemple) parvenaient à des théorèmes faux. Pour se dégager des ces difficultés, on devait avoir recours aux fondements, on devait tout d' abord les préciser d' une façon incontestable du point de vue logique.

Il y avait à cette époque des mathématiciens qui se rendaient compte du fait que les difficultés aux quelles on s'est heurté provenaient du manque de rigueur; tel était,en particulier Abel qui parlait 'de l' immense obscurité qui règne dans l' Analyse' (citation d' après C. Phili, *Le développement du concept de fonction.* Ec. N. Sup. 1974). C' était aussi Abel qui a corrigé une erreur fâcheuse de Cauchy, qui affirmait que la limite d' une suite convergente de fonctions continues était continue.

Les recherches qui avaient pour but de préciser les fondements de l' Analyse ont conduit, en particulier, à l' élargissement du domaine des fonctions étudiées en mathématiques. Cela tenait au fait que des opérations classiques, telles que, par exemple, le passage à la limite, conduisaient en dehors des fonctions continues. On était donc conduit à l' étude des fonctions discontinues, ce qui était à cette époque une vraie révolution: rappelons qu' à cette époque, les fonctions discontinues étaient complètement bannies des mathématiques (on les considérait comme 'maladives', ne servant qu' à des dissertations métaphysiques; voir le début du Ch. III de l' ouvrage de Mlle Phili). C' est ainsi qu' à été créé –en répondant aux besoins de l' Analyse- une nouvelle branche de mathématiques, à savoir la Théorie des fonctions d' une variable réelle, théorie liée aux noms des grands maîtres français, tout d' abord: René Baire et puis Borel, Lebesgue et d' autres.

Le lecteur de ce mémoire en trouvera les détails dans les Chapitres II, IV et III.

Le développement de la Théorie des fonctions d' une variable réelle conduisit à des généralisations importantes. On a pu se débarrasser de l' hypothèse que la variable indépendante parcourait l'espace des nombres réelles, en le remplaçant par un espace arbitraire métrique. Plus encore, on pouvait admettre que les valeurs des fonctions considérées n' étaient non plus nécessairement des nombres réels, mais – des points d'un espace métrique arbitraire (ou bien soumis à des hypothèses bien générales). Ainsi – avec les travaux de Volterra, Fréchet, Hausdorff, Banach – la Théorie des fonctions d'une variable réelle se développa dans une théorie de transformations, continues ou non, d'un espace très général en un autre. Elle est devenue ainsi une branche d'un nouveau chapitre des mathématiques- de la Théorie descriptive des ensembles.

Ce procès ne pouvait, bien entendu, être développé sans l'emplois des notions fondamentales de la Théorie générale des ensembles (introduites au préalable dans le «paradis de Cantor»).

La Théorie généralisée des fonctions de variable réelle n' était pas la seule branche de la Théorie descriptive des ensembles, nouvellement créée. Pas moins importante est la théorie des ensembles analytiques et projectifs (à laquelle sont destinés les Chapitres V-VIII du présent mémoire). Les ensembles analytiques sont les images continues de l' espace des nombres irrationnels (ou – ce qui revient au même – des sous – ensembles boréliens d' un espace polonais). La découverte des ensembles analytiques non-boréliens, due à Souslin, constitua le point de départ de la théorie de ces ensembles, développée surtout par N. Lusin et W. Sierpinski.

Souslin a démontré aussi que le complémentaire d'un ensemble analytique non-borélien n' était jamais analytique. On nomma complémentaire analytique (ou ensemble CA) les ensembles de ce genre. Puis on a considéré les images continues des ensembles CA ; on les appela ensembles PCA (il y en a qui ne sont ni analytiques ni CA).

D' une façon générale, en appliquant les deux opérations C et P (complémentaire et image continue) un nombre arbitraire de fois, on parvient, à partir des ensembles boréliens, aux ensembles projectifs (dans les espaces polonais). Leur nature, fort mystérieuse formait – et forme toujours – l'objet de multiples recherches. L' adjectif « mystérieux » ne peut pas être appliqué à la théorie des ensembles analytiques, où les propriétés fondamentales sont bien établies. Cependant, en ce qui concerne les ensembles CA, l' état de choses est bien différent. Il y a des problèmes très naturels (tel que la puissance d' un ensemble CA indénombrable est-elle celle du continu ?) dont la réponse positive ou négative ne peut pas être déduite du système d'axiomes de la théorie des ensembles habituellement admis ; ils sont, en effet, indépendants de ce système.

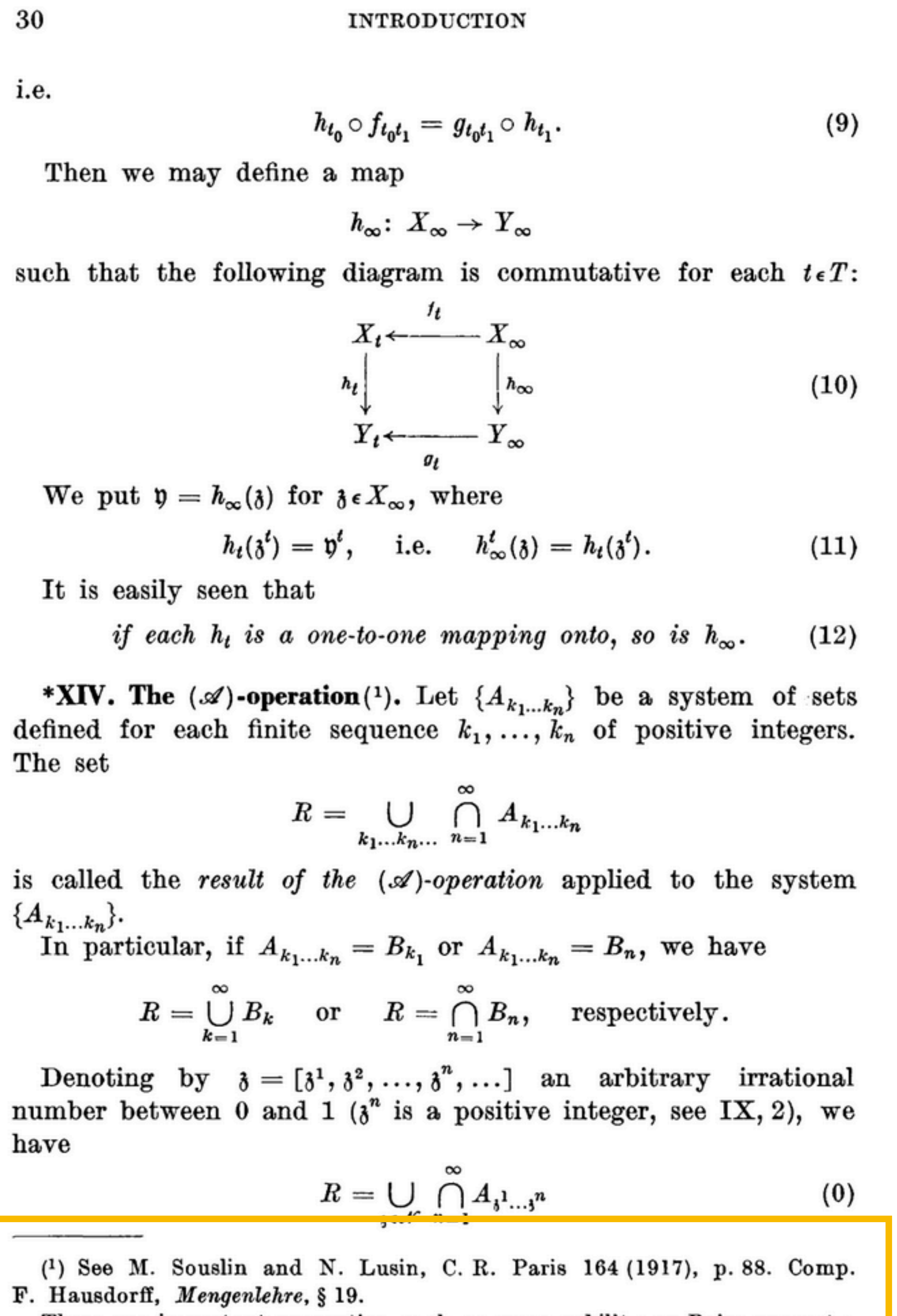
Ainsi, en attaquant les problèmes de la théorie des ensembles projectifs (même des ensembles CA) on se heurte à des problèmes de la logique mathématiques. Ceci exprimait Lusin d'une façon peu précise du point de vue logique – mais admirablement intuitive – lorsque' il disait de tel ou autre problème : ¨on ne sait pas et on ne saura jamais si la réponse est positive ou négative¨

En ce moment, la théorie des ensembles projectifs renferme une multitude surprenante de problèmes qui sont dominés par la logique et les fondements de mathématiques. C'est là une nouvelle phase du développement de la Théorie descriptive d' ensembles, phase excessivement attrayante.

K. Kuratowski
Varsovie 1978

В самой последней версии истории аналитических множеств, написанной Куратовским, ни разу не упоминается П.С. Александров.

Книга Куратовского: оригинал и перевод



30 INTRODUCTION

i.e.

$$h_{t_0} \circ f_{t_0 t_1} = g_{t_0 t_1} \circ h_{t_1}. \qquad (9)$$

Then we may define a map

$$h_\infty \colon X_\infty \to Y_\infty$$

such that the following diagram is commutative for each $t \in T$:

$$\begin{tikzcd} X_t & X_\infty \arrow[l, "f_t"'] \arrow[d, "h_\infty"] \\ Y_t \arrow[from=u, "h_t"'] & Y_\infty \arrow[l, "g_t"] \end{tikzcd} \qquad (10)$$

We put $\mathfrak{y} = h_\infty(\mathfrak{z})$ for $\mathfrak{z} \in X_\infty$, where

$$h_t(\mathfrak{z}^t) = \mathfrak{y}^t, \quad \text{i.e.} \quad h_\infty^t(\mathfrak{z}) = h_t(\mathfrak{z}^t). \qquad (11)$$

It is easily seen that

if each h_t is a one-to-one mapping onto, so is h_∞. (12)

***XIV. The ($\mathscr{A}$)-operation**(¹). Let $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$ be a system of sets defined for each finite sequence $k_1, \ldots, k_n$ of positive integers. The set

$$R = \bigcup_{k_1 \ldots k_n \ldots} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_1 \ldots k_n}$$

is called the *result of the ($\mathscr{A}$)-operation* applied to the system $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$.

In particular, if $A_{k_1\ldots k_n} = B_{k_1}$ or $A_{k_1\ldots k_n} = B_n$, we have

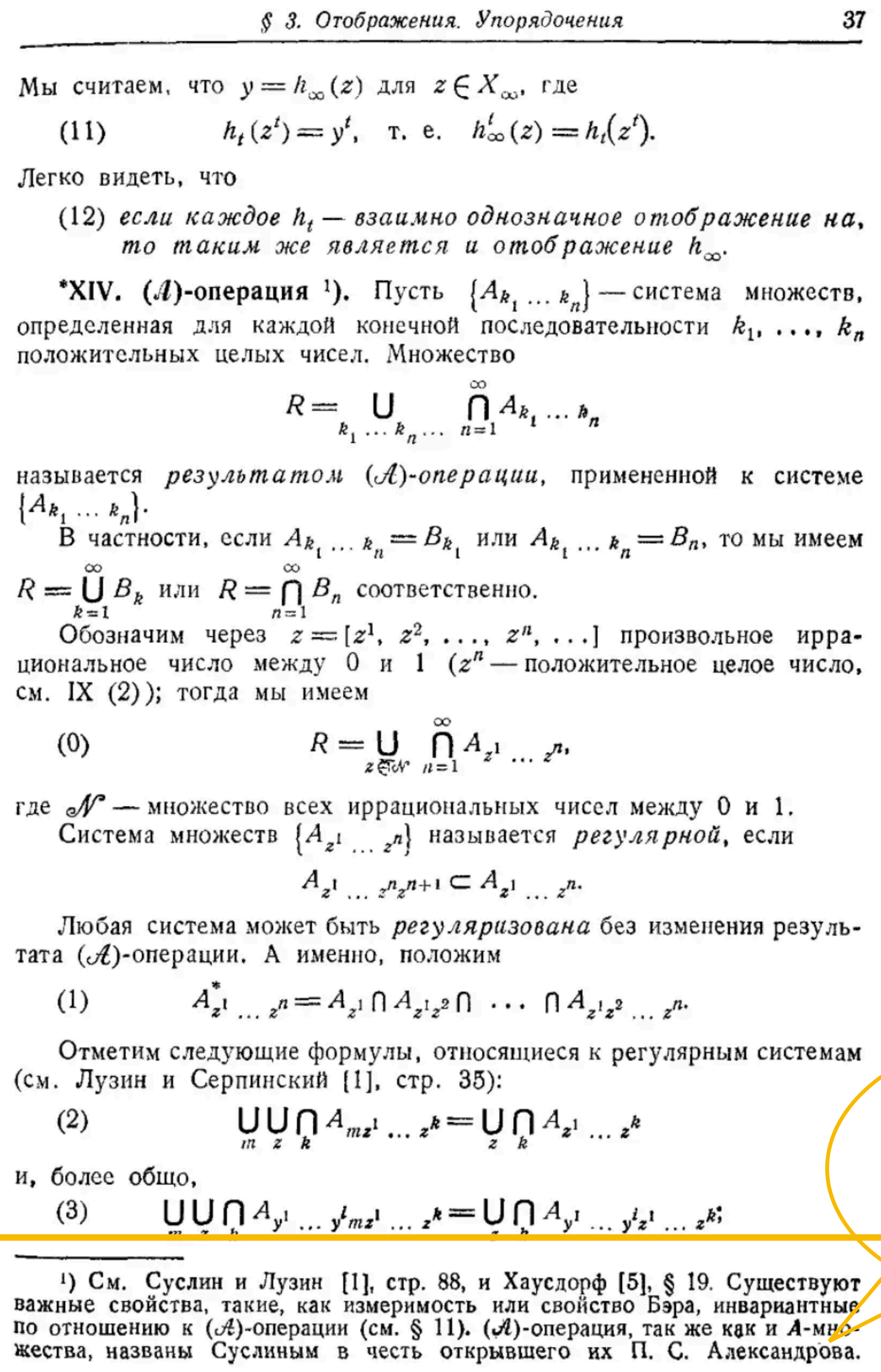
$$R = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{or} \quad R = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{respectively}.$$

Denoting by $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^n, \ldots]$ an arbitrary irrational number between 0 and 1 ($\mathfrak{z}^n$ is a positive integer, see IX, 2), we have

$$R = \bigcup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \ldots \mathfrak{z}^n} \qquad (0)$$

(¹) See M. Souslin and N. Lusin, C. R. Paris 164 (1917), p. 88. Comp. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, § 19.

There are important properties, such as measurability or Baire property, which are invariant of the ($\mathscr{A}$)-operation (see § 11).



§ 3. *Отображения. Упорядочения* 37

Мы считаем, что $y = h_\infty(z)$ для $z \in X_\infty$, где

$$(11) \qquad h_t(z^t) = y^t, \quad \text{т. е.} \quad h_\infty^t(z) = h_t(z^t).$$

Легко видеть, что

(12) *если каждое h_t — взаимно однозначное отображение на, то таким же является и отображение h_∞.*

***XIV. ($\mathscr{A}$)-операция** [1]**.** Пусть $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$ — система множеств, определенная для каждой конечной последовательности $k_1, \ldots, k_n$ положительных целых чисел. Множество

$$R = \bigcup_{k_1 \ldots k_n \ldots} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_1 \ldots k_n}$$

называется *результатом ($\mathscr{A}$)-операции*, примененной к системе $\{A_{k_1 \ldots k_n}\}$.

В частности, если $A_{k_1 \ldots k_n} = B_{k_1}$ или $A_{k_1 \ldots k_n} = B_n$, то мы имеем $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ или $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ соответственно.

Обозначим через $z = [z^1, z^2, \ldots, z^n, \ldots]$ произвольное иррациональное число между 0 и 1 (z^n — положительное целое число, см. IX (2)); тогда мы имеем

$$(0) \qquad R = \bigcup_{z \in \mathscr{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{z^1 \ldots z^n},$$

где $\mathscr{N}$ — множество всех иррациональных чисел между 0 и 1.

Система множеств $\{A_{z^1 \ldots z^n}\}$ называется *регулярной*, если

$$A_{z^1 \ldots z^n z^{n+1}} \subset A_{z^1 \ldots z^n}.$$

Любая система может быть *регуляризована* без изменения результата ($\mathscr{A}$)-операции. А именно, положим

$$(1) \qquad A^*_{z^1 \ldots z^n} = A_{z^1} \cap A_{z^1 z^2} \cap \ldots \cap A_{z^1 z^2 \ldots z^n}.$$

Отметим следующие формулы, относящиеся к регулярным системам (см. Лузин и Серпинский [1], стр. 35):

$$(2) \qquad \bigcup_m \bigcup_z \bigcap_k A_{m z^1 \ldots z^k} = \bigcup_z \bigcap_k A_{z^1 \ldots z^k}$$

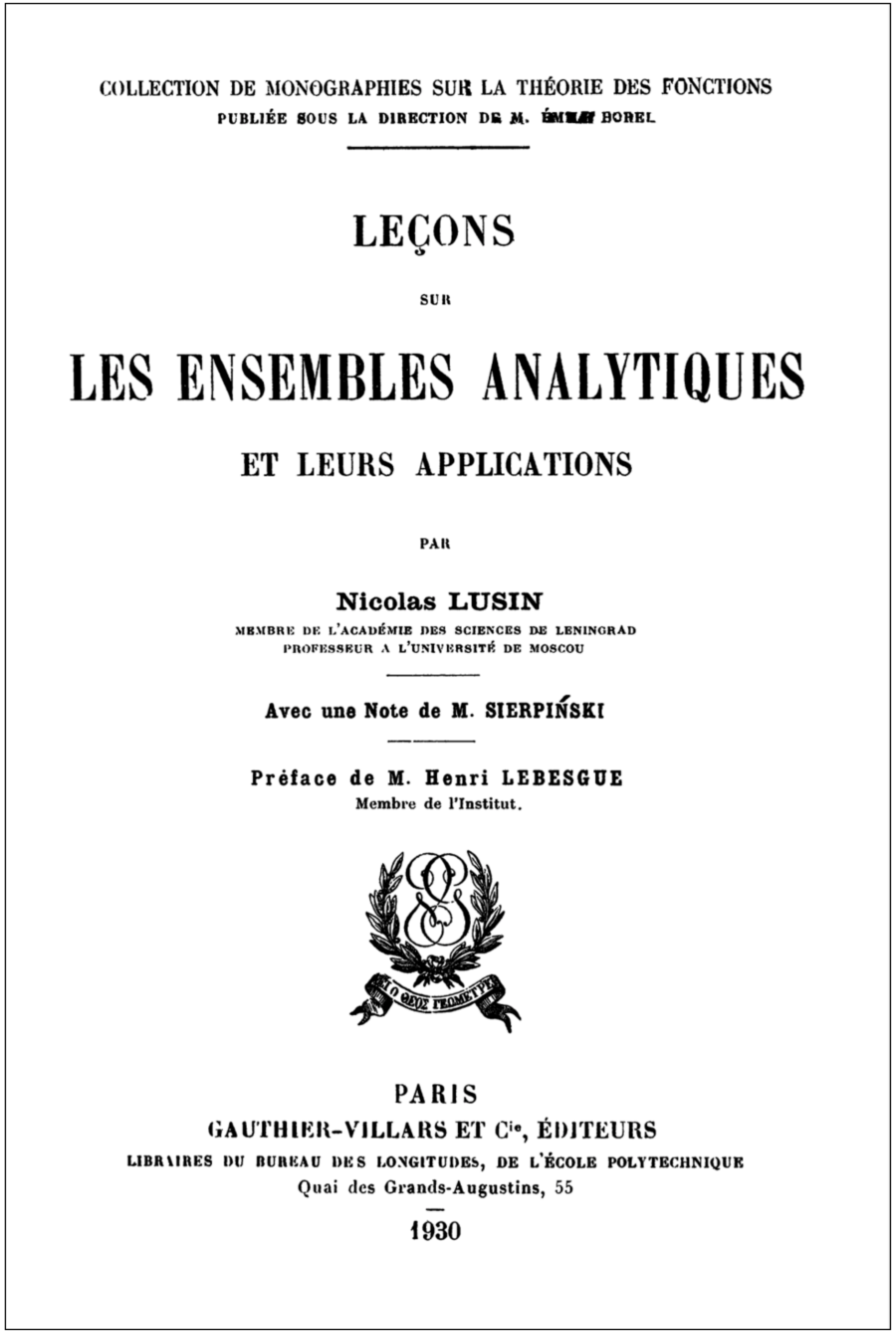
и, более общо,

$$(3) \qquad \bigcup_m \bigcup_z \bigcap_k A_{y^1 \ldots y^l m z^1 \ldots z^k} = \bigcup_z \bigcap_k A_{y^1 \ldots y^l z^1 \ldots z^k};$$

---

[1] См. Суслин и Лузин [1], стр. 88, и Хаусдорф [5], § 19. Существуют важные свойства, такие, как измеримость или свойство Бэра, инвариантные по отношению к ($\mathscr{A}$)-операции (см. § 11). ($\mathscr{A}$)-операция, так же как и **A**-множества, названы Суслиным в честь открывшего их П. С. Александрова.

Вставка
в русском переводе



COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS

SUR

LES ENSEMBLES ANALYTIQUES

ET LEURS APPLICATIONS

PAR

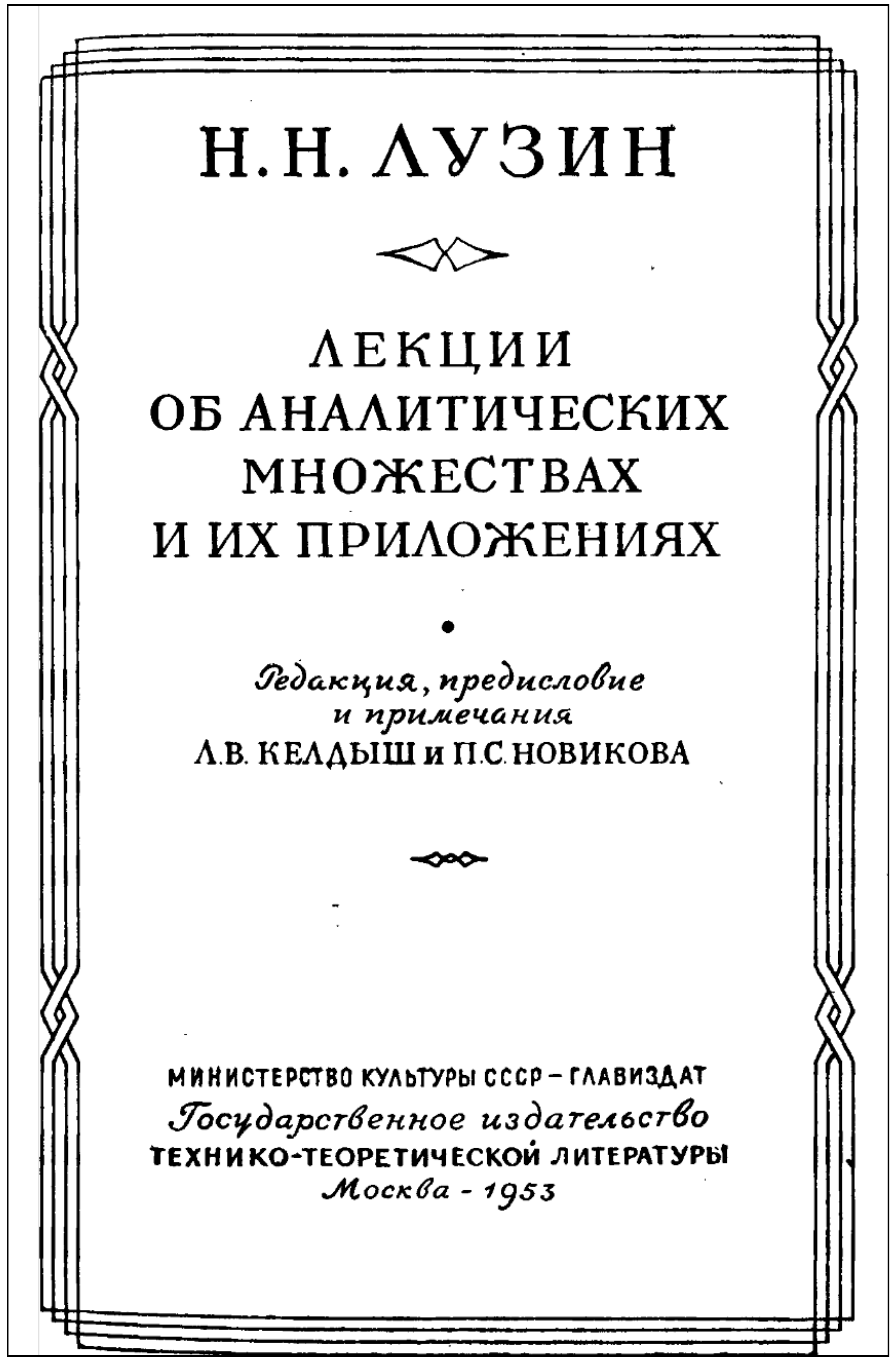
Nicolas LUSIN
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LENINGRAD
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE MOSCOU

Avec une Note de M. SIERPIŃSKI

Préface de M. Henri LEBESGUE
Membre de l'Institut.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1930



Н. Н. ЛУЗИН

ЛЕКЦИИ
ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ
МНОЖЕСТВАХ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Редакция, предисловие
и примечания
Л. В. КЕЛДЫШ и П. С. НОВИКОВА

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР – ГЛАВИЗДАТ
Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва - 1953

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Н. Н. ЛУЗИН

СОБРАНИЕ
СОЧИНЕНИЙ

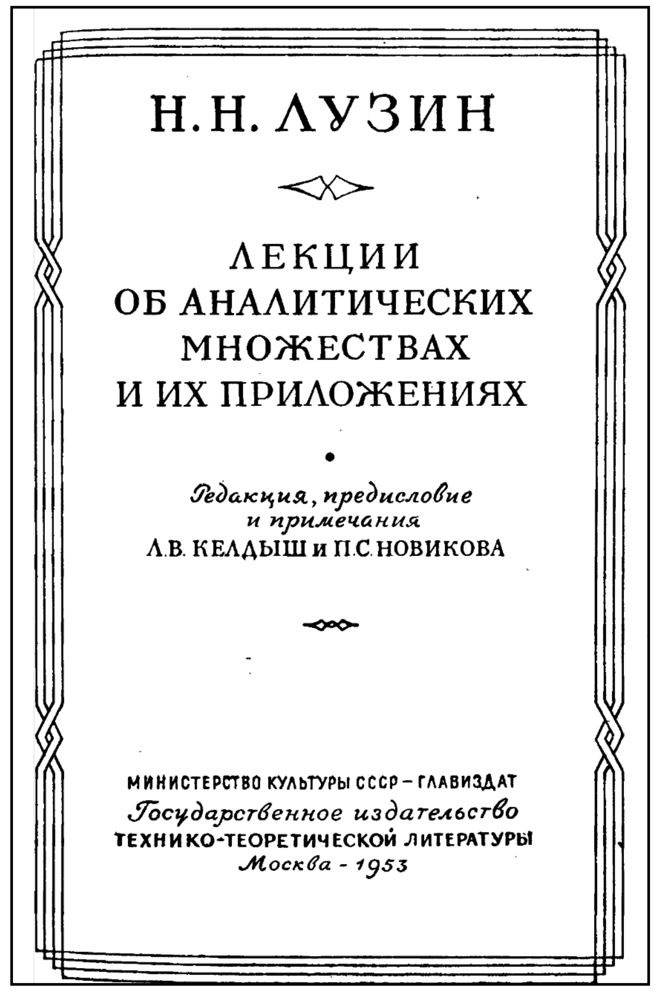
ТОМ
II

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ
МНОЖЕСТВ

Титульный лист

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА
1958

Первое издание 1953:



Н.Н. ЛУЗИН

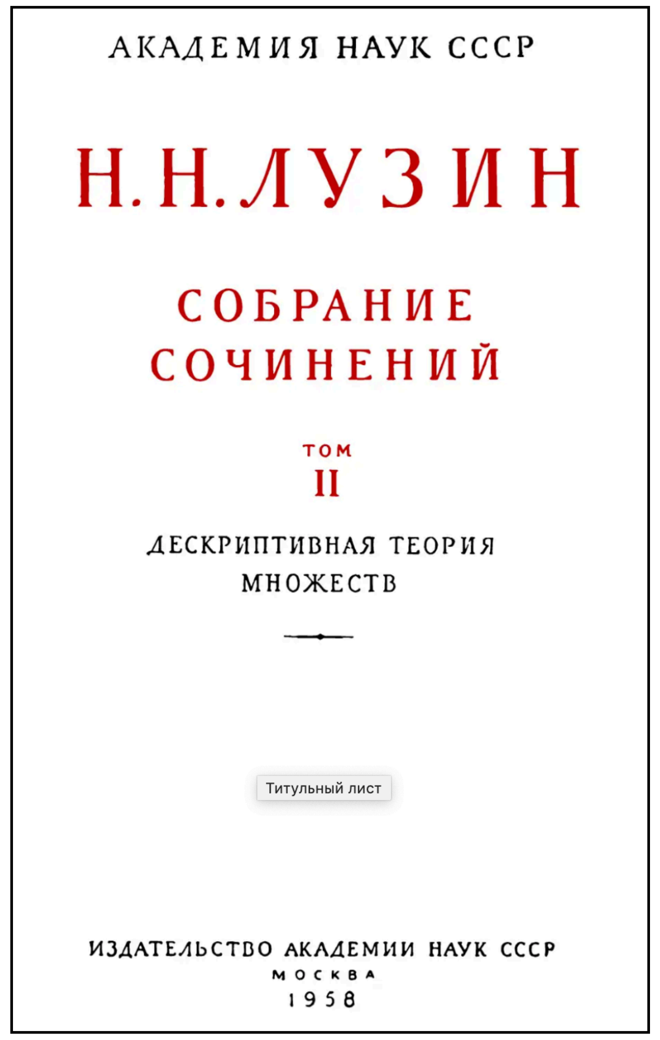
ЛЕКЦИИ
ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ
МНОЖЕСТВАХ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

*Редакция, предисловие
и примечания*
Л.В. КЕЛДЫШ и П.С. НОВИКОВА

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР – ГЛАВИЗДАТ
Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва - 1953

- Удалена лузинская история аналитических множеств
- Добавлена “альтернативная история”, упор на достижения П.С. Александрова
- Для поддержки “альтернативной истории” добавлены комментарии, дискредитирующие Лузина

Академическое издание 1958:



АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Н.Н. ЛУЗИН

СОБРАНИЕ
СОЧИНЕНИЙ

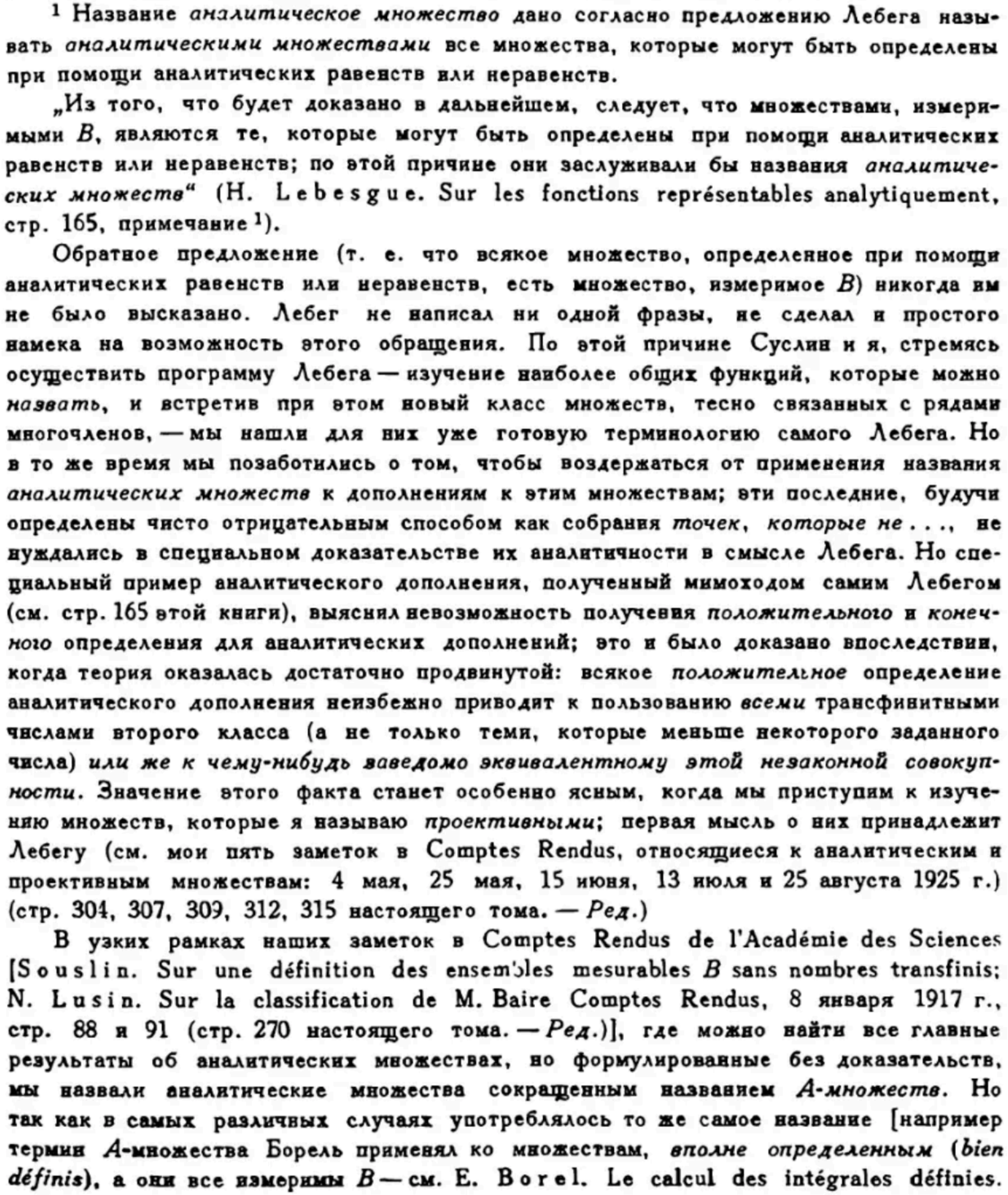
ТОМ
II

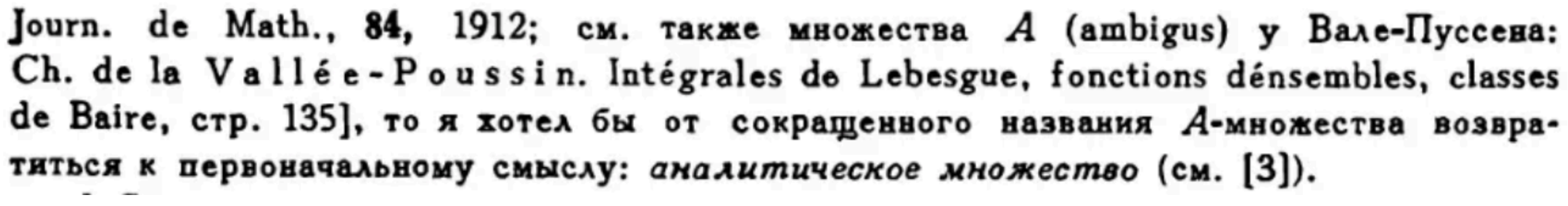
ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ
МНОЖЕСТВ

Титульный лист

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА
1958

- Лузинская история аналитических множеств вставлена
- “Альтернативная история” осталась, Александров упоминается реже
- Сохранены предыдущие комментарии, дискредитирующие Лузина, добавлены **новые** негативные комментарии





[1] Название *аналитическое множество* дано согласно предложению Лебега называть *аналитическими множествами* все множества, которые могут быть определены при помощи аналитических равенств или неравенств.

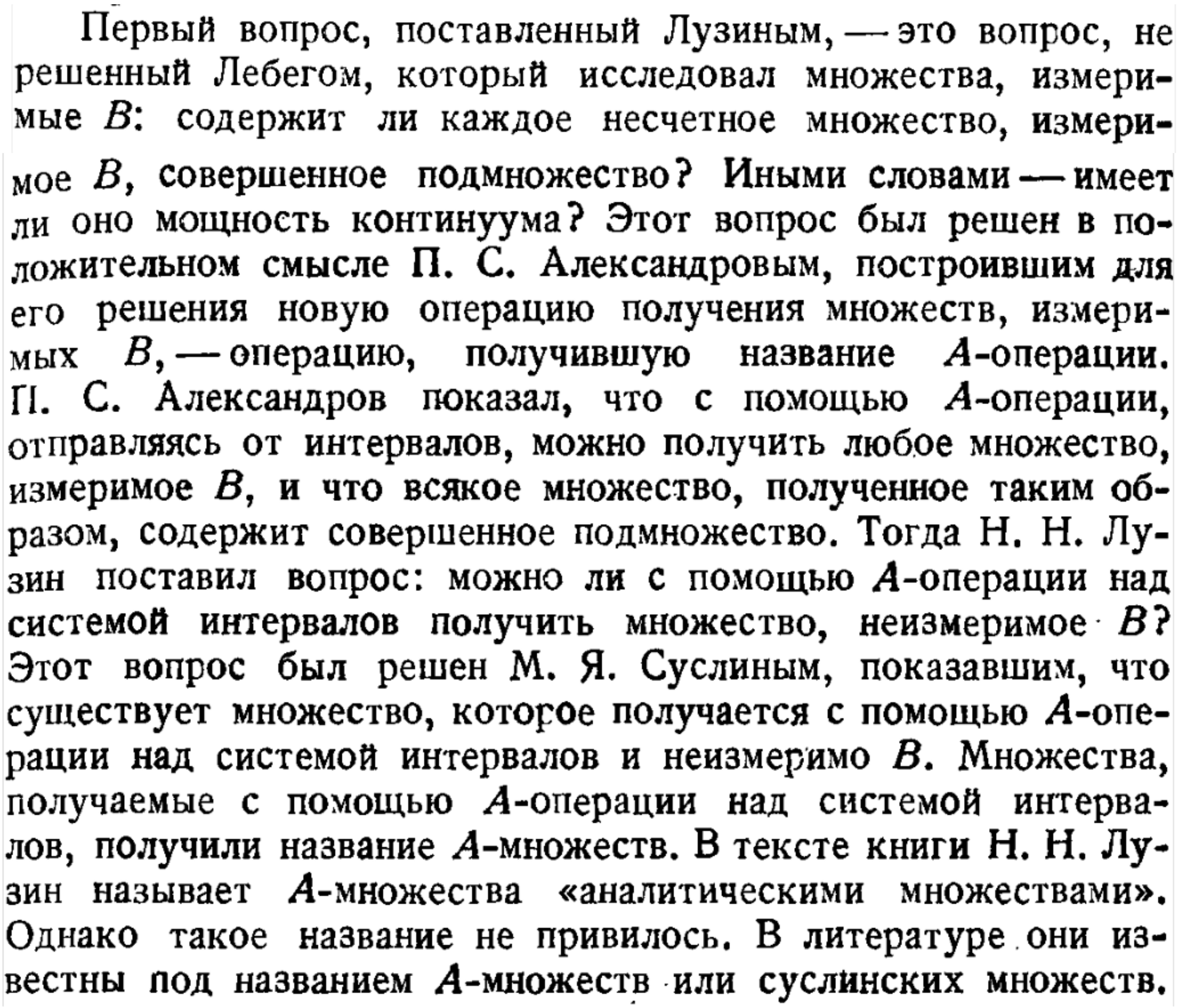
„Из того, что будет доказано в дальнейшем, следует, что множествами, измеримыми B, являются те, которые могут быть определены при помощи аналитических равенств или неравенств; по этой причине они заслуживали бы названия *аналитических множеств*“ (H. Lebesgue. Sur les fonctions représentables analytiquement, стр. 165, примечание [1]).

Обратное предложение (т. е. что всякое множество, определенное при помощи аналитических равенств или неравенств, есть множество, измеримое B) никогда им не было высказано. Лебег не написал ни одной фразы, не сделал и простого намека на возможность этого обращения. По этой причине Суслин и я, стремясь осуществить программу Лебега — изучение наиболее общих функций, которые можно *назвать*, и встретив при этом новый класс множеств, тесно связанных с рядами многочленов, — мы нашли для них уже готовую терминологию самого Лебега. Но в то же время мы позаботились о том, чтобы воздержаться от применения названия *аналитических множеств* к дополнениям к этим множествам; эти последние, будучи определены чисто отрицательным способом как собрания *точек, которые не . . .,* не нуждались в специальном доказательстве их аналитичности в смысле Лебега. Но специальный пример аналитического дополнения, полученный мимоходом самим Лебегом (см. стр. 165 этой книги), выяснил невозможность получения *положительного* и *конечного* определения для аналитических дополнений; это и было доказано впоследствии, когда теория оказалась достаточно продвинутой: всякое *положительное* определение аналитического дополнения неизбежно приводит к пользованию *всеми* трансфинитными числами второго класса (а не только теми, которые меньше некоторого заданного числа) *или же к чему-нибудь заведомо эквивалентному этой незаконной совокупности*. Значение этого факта станет особенно ясным, когда мы приступим к изучению множеств, которые я называю *проективными*; первая мысль о них принадлежит Лебегу (см. мои пять заметок в Comptes Rendus, относящиеся к аналитическим и проективным множествам: 4 мая, 25 мая, 15 июня, 13 июля и 25 августа 1925 г.) (стр. 304, 307, 309, 312, 315 настоящего тома. — *Ред.*)

В узких рамках наших заметок в Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [Souslin. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis; N. Lusin. Sur la classification de M. Baire Comptes Rendus, 8 января 1917 г., стр. 88 и 91 (стр. 270 настоящего тома. — *Ред.*)], где можно найти все главные результаты об аналитических множествах, но формулированные без доказательств, мы назвали аналитические множества сокращенным названием *A-множеств*. Но так как в самых различных случаях употреблялось то же самое название [например термин *A*-множества Борель применял ко множествам, *вполне определенным* (*bien définis*), а они все измеримы B — см. E. Borel. Le calcul des intégrales définies. Journ. de Math., **84**, 1912; см. также множества *A* (ambigus) у Вале-Пуссена: Ch. de la Vallée-Poussin. Intégrales de Lebesgue, fonctions dénsembles, classes de Baire, стр. 135], то я хотел бы от сокращенного названия *A*-множества возвратиться к первоначальному смыслу: *аналитическое множество* (см. [3]).

Ссылка с историей аналитических множеств, вырезанная из издания 1953 года и появившаяся в академическом издании

“Альтернативная история” из предисловия редакторов издания 1953 года



Первый вопрос, поставленный Лузиным, — это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества, измеримые B: содержит ли каждое несчетное множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами — имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П. С. Александровым, построившим для его решения новую операцию получения множеств, измеримых B, — операцию, получившую название A-операции. П. С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое B, и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество. Тогда Н. Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с помощью A-операции над системой интервалов получить множество, неизмеримое B? Этот вопрос был решен М. Я. Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримо B. Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств. В тексте книги Н. Н. Лузин называет A-множества «аналитическими множествами». Однако такое название не привилось. В литературе они известны под названием A-множеств или суслинских множеств.

> “***Первый вопрос, поставленный Лузиным, - это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества измеримые* В *: содержит ли каждое множество, измеримое* В*, совершенное подмножество?*** *Иными словами – имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П.С. Александровым, построившего для его решения новую операцию, получившей название А-операции. П.С. Александров показал, что с помощью А-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое В и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмно-жество. Тогда Н.Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с ли с помощью А-операции получить множество неизмеримое В? Этот вопрос был решен Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью А-операции над системой интервалов и неизмеримое В. Множества, получаемые с помощью А-операции над системой интервалов, получили название А-множеств. В тексте книги Н.Н. Лузин называет А-множества "аналитическими множествами". Однако такое название не привилось.“*

Начало звучит довольно комично. *“Вопрос, не решенный Лебегом“* напоминает анекдот о неуловимом ковбое, неуловимом потому, что его никто не ловил. Насколько мне известно, Лебег вообще не решал такого вопроса.

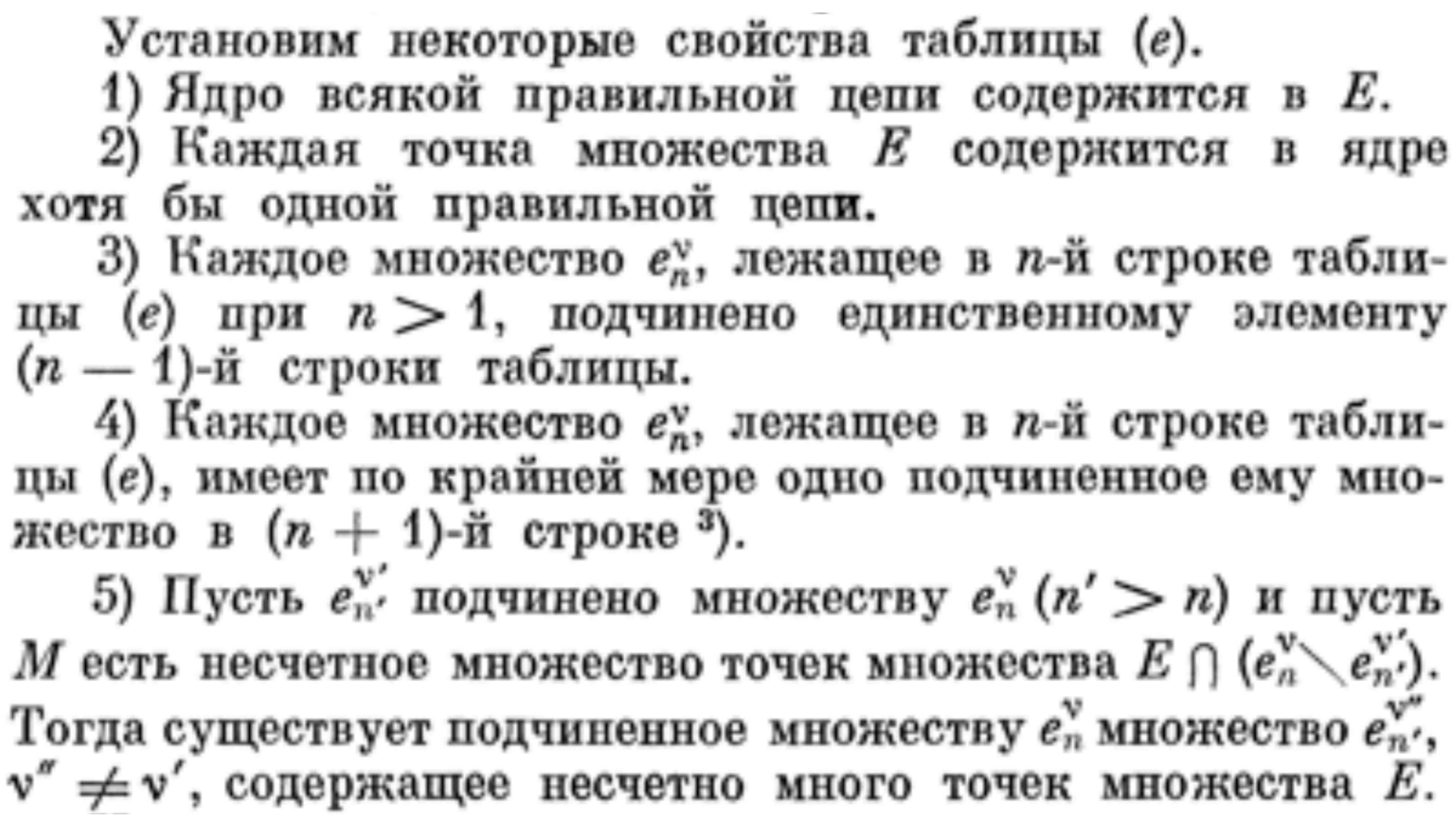
“Первый вопрос, поставленный Лузиным, - это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества измеримые B: содержит ли каждое множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами – имеет ли оно мощность континуума? ***Этот вопрос был решен в положительном смысле П.С. Александровым, построившего для его решения новую операцию, получившей название A-операции.*** *П.С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое B и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество. Тогда Н.Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с ли с помощью A-операции получить множество неизмеримое B? Этот вопрос был решен Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримое B. Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств. В тексте книги Н.Н. Лузин называет A-множества "аналитическими множествами". Однако такое название не привилось.“*

Это мнение редакторов ранее, до смерти Лузина, никто не высказывал в печати. Редакторы постулируют его без какого-либо обоснования.

“Первый вопрос, поставленный Лузиным, - это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества измеримые B содержит ли каждое множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами – имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П.С. Александровым, построившего для его решения новую операцию, получившей название A-операции. ***П.С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое*** *B* ***и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество.*** *Тогда Н.Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с ли с помощью A-операции получить множество неизмеримое B? Этот вопрос был решен Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримое B. Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств. В тексте книги Н.Н. Лузин называет A-множества "аналитическими множествами". Однако такое название не привилось.“*

В заметках Александрова –
“Sur le puissance des ensembles“(1916) и
“Sur les ensembles compl´emen-taires aux ensembles“(1924)
ничего подобного мы не находим.

Таблица (e) из “Sur le puissance des ensembles (B)”, 1916



Установим некоторые свойства таблицы (e).

1) Ядро всякой правильной цепи содержится в E.

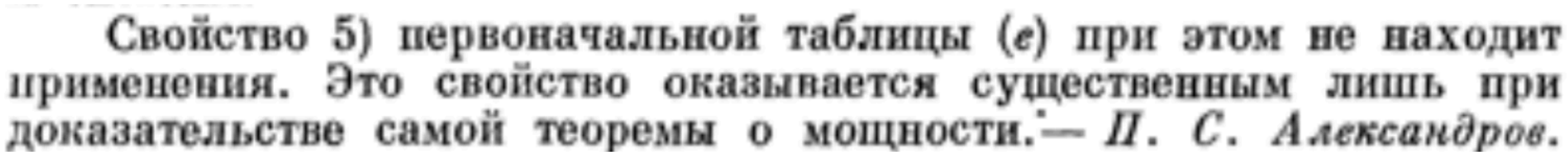
2) Каждая точка множества E содержится в ядре хотя бы одной правильной цепи.

3) Каждое множество e_n^{ν}, лежащее в n-й строке таблицы (e) при $n > 1$, подчинено единственному элементу $(n-1)$-й строки таблицы.

4) Каждое множество e_n^{ν}, лежащее в n-й строке таблицы (e), имеет по крайней мере одно подчиненное ему множество в $(n+1)$-й строке[3]).

5) Пусть $e_{n'}^{\nu'}$ подчинено множеству e_n^{ν} $(n' > n)$ и пусть M есть несчетное множество точек множества $E \cap (e_n^{\nu} \setminus e_{n'}^{\nu'})$. Тогда существует подчиненное множеству e_n^{ν} множество $e_{n'}^{\nu''}$, $\nu'' \neq \nu'$, содержащее несчетно много точек множества E.

Комментарий к Таблице (e) из перевода 1978 года



Свойство 5) первоначальной таблицы (e) при этом не находит применения. Это свойство оказывается существенным лишь при доказательстве самой теоремы о мощности.— *П. С. Александров.*

“Первый вопрос, поставленный Лузиным, - это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества измеримые B содержит ли каждое множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами – имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П.С. Александровым, построившего для его решения новую операцию, получившей название A-операции. П.С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое B и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество. ***Тогда Н.Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с помощью A-операции получить множество неизмеримое B? Этот вопрос был решен Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримое B.*** *Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств. В тексте книги Н.Н. Лузин называет A-множества "аналитическими множествами". Однако такое название не привилось.“*

Так какой же вопрос на самом деле поставил Лузин?

Лузин: Помните, я сказал, Павел Сергеевич, после того как я редактировал Вашу ноту: знаете, какая возникает проблема? B-множество может быть изображено так, а как можно восстановить эту таблицу? Эта проблема была полностью мною указана. Оба мы занимались над этой проблемой, Вы проявили ко мне полное внимание, и у меня сохранилось даже Ваше письмо, в котором Вы пишете в юмористическом тоне, что эта проблема настолько трудна, что Вы просите отставки от занятий B-множеством по слабому своему здоровью.

Здесь полная путаница. Невозможно, чтобы возник такой вопрос до открытия Суслина.

Свидетельство самого Александрова, который о том времени вспоминал следующее:
"Я думал, что A- множества есть только другое определение B-множеств"

“Первый вопрос, поставленный Лузиным, - это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества измеримые B: содержит ли каждое множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами – имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П.С. Александровым, построившего для его решения новую операцию, получившей название A-операции. П.С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое B и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество. Тогда Н.Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с ли с помощью A-операции получить множество неизмеримое B? Этот вопрос был решен Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримое B. ***Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств.*** *В тексте книги Н.Н. Лузин называет A-множества "аналитическими множествами". Однако такое название не привилось.“*

Суслин и Александров в первых работах использовали понятие "детерминированные системы/S-системы".

В обзоре Лаврентьева-Меньшова четко указано, что термин "A-операция" предложил именно Лузин

“Первый вопрос, поставленный Лузиным, - это вопрос, не решенный Лебегом, который исследовал множества измеримые B: содержит ли каждое множество, измеримое B, совершенное подмножество? Иными словами – имеет ли оно мощность континуума? Этот вопрос был решен в положительном смысле П.С. Александровым, построившего для его решения новую операцию, получившей название A-операции. П.С. Александров показал, что с помощью A-операции, отправляясь от интервалов, можно получить любое множество, измеримое B и что всякое множество, полученное таким образом, содержит совершенное подмножество. Тогда Н.Н. Лузин поставил вопрос: можно ли с ли с помощью A-операции получить множество неизмеримое B? Этот вопрос был решен Суслиным, показавшим, что существует множество, которое получается с помощью A-операции над системой интервалов и неизмеримое B. Множества, получаемые с помощью A-операции над системой интервалов, получили название A-множеств. ***В тексте книги Н.Н. Лузин называет A-множества "аналитическими множествами". Однако такое название не привилось.***“

Это не соответствует действительности.

Спасибо за внимание!

Заходите на substack!

alexeyostrovsky.substack.com