

Зависимость между алгеброй и геометрией алгебраических групп

В. Л. Попов

Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН, Москва
popovvl@mi-ras.ru

международная конференция
“МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ”
ИМ СО РАН и Математический центр в Академгородке,
Новосибирск, 12 ноября 2024

Источники материалов доклада:

- В. Л. Попов, *Групповые многообразия и групповые структуры*, Изв. РАН. Сер. матем. **86** (2022), № 5, 73–96
- В. Л. Попов, *Теоремы конечности для алгебраических групп и групп Ли*, III Конференция математических центров России, Адыгейский государственный университет, г. Майкоп, 10 октября 2023 г.

Обозначения:

- k — алгебраически замкнутое поле.
- G — связная (не обязательно аффинная) алгебраическая группа над k (или вещественная группа Ли).
- $\underline{G}$ — подлежащее многообразие группы G
- $\text{Aut}(X)$ — группа автоморфизмов (диффеоморфизмов) алгебраического многообразия (дифференцируемого многообразия) X .

Поскольку групповая структура в G по определению согласована с топологией многообразия $\underline{G}$, должна существовать зависимость между G и $\underline{G}$.

Это приводит к следующему вопросу:

Вопрос

В какой мере групповая структура G определяется по $\underline{G}$?

Явно или неявно этот вопрос давно рассматривался в литературе, в частности, в классических публикациях А. Вейля, К. Шевалле, А. Бореля, А. Гротендика, М. Розенлихта, М. Лазара, ...

Пример: абелевы многообразия

Ярким классическим примером зависимости групповой структуры от геометрических свойств подлежащего группового многообразия является следующая теорема:

Теорема (К. Шевалле, А. Вейль)

Пусть G — связная алгебраическая группа, у которой подлежащее многообразие $\underline{G}$ проективно (т.е. G — абелево многообразие). Тогда группа G коммутативна.

Другой классический пример:

Пример

К. Шевалле (1950): G унипотентна $\implies \underline{G} = \mathbb{A}^n$,

М. Лазар (1955): G унипотентна $\Longleftarrow \underline{G} = \mathbb{A}^n$

Унипотентные группы и редуktивные группы

Для связных унипотентных алгебраических групп зависимость между G и $\underline{G}$ слабая:

При $n \geq 7$ возможные структуры (автоматически унипотентных) алгебраических групп на $\mathbb{A}^n$ зависят от параметров (модулей).

Противоположным полюсом является связные полупростые алгебраические группы:

Имеется лишь конечное (с точностью до изоморфизма) число односвязных полупростых алгебраических групп любого ранга r (они классифицируются диаграммами Дынкина с r вершинами). Их центры конечны. Поэтому имеется только конечное число связных полупростых групп любого ранга (а потому и любой размерности).

Это приводит к следующему принципиальному вопросу о единственности:

Вопрос

Если неприводимое алгебраическое многообразие обладает структурой связной редуктивной алгебраической группы, является ли эта структура единственной (с точностью до изоморфизма)?

Следующий пример показывает, что ответ отрицательный:

Пример неединственности

Пример

Пусть $G = \mathrm{GL}_n$, $n \geq 2$. Ее центр $Z = \{\mathrm{diag}(t, \dots, t) \mid t \in k^\times\}$ связен.

Пусть $H := Z \times D$, где $D = [G, G] = \mathrm{SL}_n$. Ее центр $Z \cap D = \{\mathrm{diag}(t, \dots, t) \mid t^n = 1\}$ несвязен.

Поэтому группы G и H неизоморфны.

Однако многообразия $\underline{G}$ и $\underline{H}$ изоморфны.

Доказательство.

$$\underline{H} \rightarrow \underline{G}, \quad (\mathrm{diag}(t, \dots, t), A) \mapsto \mathrm{diag}(t, 1, \dots, 1) \cdot A$$

— изоморфизм многообразий (но не групп!), поскольку

$$\underline{G} \rightarrow \underline{H}, \quad B \mapsto (\mathrm{diag}(\det(B), \dots, \det(B)), (1/\det(B), 1, \dots, 1) \cdot B)$$

является его обратным.



Этот пример оказывается проявлением общего феномена.

А именно, пусть

G — связная редуktивная алгебраическая группа,
 $D := [G, G]$ (это связная полупростая алгебраическая группа),
 Z — компонента единицы центра группы G (это алгебраический тор).

Алгебраические группы $D \times Z$ и G могут оказаться неизоморфными. А именно, имеет место следующий критерий:

Следующие свойства эквивалентны:

- $D \times Z$ и G are изоморфны;
- $D \cap Z = \{e\}$;
- изогения $D \times Z \rightarrow G, (d, z) \mapsto dz$, является изоморфизмом.

Общий случай

Однако следующая теорема показывает, что подлежащие многообразия этих групп всегда изоморфны:

Теорема

Существует такое вложение алгебраических групп $\iota: Z \hookrightarrow G$, что отображение

$$\underline{D} \times \underline{Z} \rightarrow \underline{G}, \quad (d, z) \mapsto d \cdot \iota(z),$$

является изоморфизмом алгебраических многообразий (но, в общем случае, не гомоморфизмом алгебраических групп).

Пример

Если $G = \mathrm{GL}_n$, то $Z = \{\mathrm{diag}(t, \dots, t) \mid t \in k^\times\}$ и

$$\iota: Z \hookrightarrow G, \quad \mathrm{diag}(t, \dots, t) \mapsto \mathrm{diag}(t, 1, \dots, 1).$$

Это отвечает на вопрос Б. Кунявского:

Следствие

Многообразия $\underline{G}$ и $\underline{Z} \times \underline{D}$ изоморфны.

Продолжая обсуждение вопроса о том
в какой мере групповая структура G определяется
по геометрическим свойствам $\underline{G}$, мы будем использовать
некоторые топологические инварианты многообразия $\underline{G}$, в
связи с чем

далее мы считаем, если не оговорено иное, что $k = \mathbb{C}$.

По принципу Лефшеца сформулированные ниже результаты
справедливы для любого (алгебраически замкнутого) поля k
нулевой характеристики.

Топологические термины далее относятся к классической
хаусдорфовой топологии (а не к топологии Зарисского).
Рассматриваемые гомологии и когомологии считаются
сингулярными.

Свойства G , определённые свойствами $\underline{G}$

Пусть G — связная (не обязательно аффинная) алгебраическая группа.

Теорема (К. Шевалле)

G содержит наибольшую связную нормальную аффинную подгруппу G_{aff} , а группа G/G_{aff} является абелевым многообразием.

Определение (М. Розенлихт)

Группа G называется тороидальной (современный термин: полуабелевым многообразием), если G_{aff} является тором.

Геометрическая характеристика полуабелевых многообразий

В следующей теореме на поле k не накладывается ограничений.

Теорема (Критерий полуабелевости)

Следующие свойства связной алгебраической группы G эквивалентны:

- G является полуабелевым многообразием;
- G не содержит подмногообразий, изоморфных аффинной прямой $\mathbb{A}^1$.

Обозначение: инвариант $\text{units}(X)$

Обозначение:

- X — неприводимое алгебраическое многообразие.
- $k[X]^\times$ — мультипликативная группа обратимых регулярных функций на X .

Теорема (М. Розенлихт)

$k[X]^\times / k^\times$ является конечно порождённой свободной абелевой группой.

Определение

$$\text{units}(X) := \text{rank}(k[X]^\times / k^\times).$$

Теорема (М. Розенлихт)

- Если X и Y — неприводимые алгебраические многообразия, то

$$\text{units}(X \times Y) = \text{units}(X) + \text{units}(Y).$$

- Если G — связная алгебраическая группа, то

$$\text{units}(\underline{G}) = \text{rank}(\text{Hom}(G, \mathbb{G}_m)).$$

Теорема

Если G — связная алгебраическая группа, то

- (i) $\text{units}(G) \leq \dim(\underline{G})$;
- (ii) равенство в (i) равносильно тому, что G является тором.

Определение

$$\text{mh}(X) := \max\{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid H_d(G, \mathbb{Q}) \neq 0\}.$$

Свойство:

Если X — неособое аффинное алгебраическое многообразие, то

$$\text{mh}(X) \leq \dim(X).$$

$\dim(\text{Rad}_u(G))$ и $\dim(\text{Rad}(G))$ выражаются в терминах свойств $\underline{G}$

Теорема (О размерностях радикалов)

Если G — связная аффинная алгебраическая группа, то

$$\dim(\text{Rad}_u(G)) = \dim(\underline{G}) - \text{mh}(\underline{G}),$$

$$\dim(\text{Rad}(G)) = \dim(\underline{G}) - \text{mh}(\underline{G}) + \text{units}(\underline{G}).$$

Теорема (Критерий редуктивности)

Следующие свойства связной аффинной алгебраической группы G эквивалентны:

- G редуктивна;
- $\dim(\underline{G}) = \text{mh}(\underline{G})$.

Теорема (Критерий полупростоты)

Следующие свойства связной аффинной алгебраической группы G эквивалентны:

- G полупроста;
- $\dim(\underline{G}) = \text{mh}(\underline{G}) - \text{units}(\underline{G})$.

Предыдущие теоремы показывают, что свойства связной аффинной алгебраической группы быть редуктивной или полупростой выражаются в терминах геометрических свойств ее подлежащего многообразия.

Следующий результат обобщает теорему М. Лазара и показывает, что то же самое верно и для свойства связной аффинной алгебраической группы быть разрешимой.

В нем используется следующее

Обозначение:

$\mathbb{A}_*^n$ обозначает произведение n экземпляров многообразия $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ (прямая с выколотой точкой).

Теорема (Критерий разрешимости)

Следующие свойства связной аффинной алгебраической группы S эквивалентны:

- S разрешима;
- $\text{mh}(\underline{S}) = \text{units}(\underline{S})$;
- существуют такие неотрицательные числа $t, r \in \mathbb{Z}$, что $\underline{S}$ изоморфно $\mathbb{A}_*^t \times \mathbb{A}^r$; при этом автоматически $t = \text{units}(\underline{S})$.

Если эти свойства выполнены, то

$\text{units}(\underline{S})$ — это размерность максимальных торов в S , а
$$\dim(\mathcal{R}_u(S)) = \dim(\underline{S}) - \text{units}(\underline{S}).$$

Теорема (Критерий унипотентности)

Следующие свойства связной аффинной алгебраической группы G эквивалентны:

- G унипотентна;
- $\mathrm{mh}(\underline{G}) = \mathrm{units}(\underline{G}) = 0$;
- $\underline{G}$ изоморфно $\mathbb{A}^{\dim(\underline{U})}$.

Теорема (Критерий торичности)

Следующие свойства связной аффинной алгебраической группы G эквивалентны:

- G является тором;
- $\dim(\underline{G}) = \text{units}(\underline{G})$;
- $\underline{G}$ изоморфно $\mathbb{A}_*^{\dim(\underline{G})}$.

Различные групповые структуры на одном и том же многообразии

Для некоторых типов групп имеет место единственность:

Теорема

Пусть G_1 и G_2 — алгебраические группы, одна из которых является полуабелевым многообразием. Следующие свойства эквивалентны:

- G_1 и G_2 — изоморфные алгебраические группы;
- $\underline{G}_1$ и $\underline{G}_2$ — изоморфные алгебраические многообразия.

Следствие

Изоморфность алгебраических групп, среди которых имеется либо тор, либо абелево многообразие, эквивалентна изоморфности их подлежащих многообразий.

Это, в частности, дает следующее давно известное утверждение:

Следствие (А. Вейль, 1948)

Абелевы многообразия изоморфны тогда и только тогда изоморфны их подлежащие многообразия.

Коммутативные алгебраические группы

Полуабелевы многообразия коммутативны. Если $\text{char}(k) = 0$, то имеет место следующее обобщение предыдущей теоремы:

Теорема (G. A. Dill, 2021)

Пусть $\text{char}(k) = 0$ и пусть G_1 и G_2 — связные коммутативные алгебраические группы. Следующие свойства эквивалентны:

- G_1 и G_2 — изоморфные алгебраические группы;
- G_1 и G_2 — изоморфные алгебраические многообразия.

Замечание

Хорошо известно, что при $\text{char}(k) > 0$ существуют неизоморфные коммутативные связные унитарные алгебраические группы одинаковой размерности (и потому с изоморфными подлежащими многообразиями). Поэтому в предыдущей теореме условие $\text{char}(k) = 0$ является существенным.

Хотя, как объяснено выше,
для редуктивных групп единственность не имеет места,
следующие результаты показывают, что для них
неединственность весьма ограничена.

Теорема

Пусть G_1 и G_2 — связные аффинные алгебраические группы, а R_i — максимальная редуктивная алгебраическая подгруппа в G_i , $i = 1, 2$.

Если алгебраические многообразия $\underline{G_1}$ и $\underline{G_2}$ изоморфны, то

- R_1 и R_2 — связные алгебраические группы,
- $\text{Lie}(R_1)$ и $\text{Lie}(R_2)$ — изоморфные алгебры Ли.

Теорема

Пусть R — связная редуктивная алгебраическая группа.

(а) Если G — такая алгебраическая группа, что $\underline{G}$ и $\underline{R}$ — изоморфные алгебраические многообразия, то

- G связна и редуктивна, а $\operatorname{Lie}(R)$ и $\operatorname{Lie}(G)$ — изоморфные алгебры Ли;
- если R полупроста и односвязна, то R и G — изоморфные алгебраические группы.

(б) **(Теорема конечности)** S точно до изоморфизма существует только конечное число таких алгебраических групп G , что алгебраические многообразия $\underline{G}$ и $\underline{R}$ изоморфны.

Доказательство в (b) основывается на следующей общей теореме конечности для редутивных алгебраических групп (не обязательно полупростых и не обязательно связных), в которой никаких ограничений на характеристику поля k не накладывается:

Теорема конечности для редутивных алгебраических групп

Теорема F

Для любых целых чисел $d \geq 0$ и $c > 0$ точно до изоморфизма существует только конечное число таких редуктивных алгебраических групп G , что

$$\dim G = d \quad \text{и} \quad [G : G^0] = c.$$

Приложение 1: Поскольку связные редуктивные алгебраические группы классифицируются своими корневыми данными (root data), из теоремы F вытекает

Теорема

С точностью до изоморфизма существует только конечное число корневых данных (root data) любого фиксированного ранга.

Теорема конечности для компактных вещественных групп Ли

Приложение 2: Ввиду соответствия между редуktивными алгебраическими группами и компактными вещественными группами Ли, задаваемого переходом к компактной вещественной форме, из теоремы F вытекает

Теорема

Для любых целых чисел $d \geq 0$ и $c > 0$ точноcтью до изоморфизма существует только конечное число таких компактных вещественных групп Ли K , что

$$\dim K = d \quad \text{и} \quad [K : K^0] = c.$$

Доказательство теоремы доставляет конструктивный способ нахождения всех (с точностью до изоморфизма) указанных в этой теореме групп G , а также получить оценки сверху на их число. То же относится к компактным вещественным группам Ли K .

Пример: $d \leq 7$, $c = 1$ (классификация связных редуктивных алгебраических групп размерности ≤ 7)

В следующей таблице

$r(d)$ обозначает число классов изоморфных связных редуктивных алгебраических групп размерности d при $\text{char } k \neq 2$:

d	1	2	3	4	5	6	7
r(d)	1	1	3	4	4	8	12

Ниже указаны представители этих классов.

Пример: классификация связных редуктивных алгебраических групп размерности $d \leq 7$

d	связные редуктивные группы размерности d
1	k^*
2	$(k^*)^2$
3	$(k^*)^3, \mathrm{SL}_2, \mathrm{PSL}_2$
4	$(k^*)^4, k^* \times \mathrm{SL}_2, k^* \times \mathrm{PSL}_2,$ $(k^* \times \mathrm{SL}_2)/C$, где $C = \langle(-1, \mathrm{diag}(-1, -1))\rangle$
5	$(k^*)^5, (k^*)^2 \times \mathrm{SL}_2, (k^*)^2 \times \mathrm{PSL}_2,$ $((k^*)^2 \times \mathrm{SL}_2)/C$, где $C = \langle((1, -1), \mathrm{diag}(-1, -1))\rangle$
6	$(k^*)^6, (k^*)^3 \times \mathrm{SL}_2, (k^*)^3 \times \mathrm{PSL}_2,$ $((k^*)^3 \times \mathrm{SL}_2)/C$, где $C = \langle((1, 1 - 1), \mathrm{diag}(-1, -1))\rangle$ $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2, \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{PSL}_2, \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2,$ $\mathrm{P}(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2) := (\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/C,$ где $C = \langle(\mathrm{diag}(-1, -1), \mathrm{diag}(-1, -1))\rangle$

Пример: классификация связных редуктивных алгебраических групп размерности $d \leq 7$

d	связные редуктивные группы размерности d
7	$(k^*)^7, (k^*)^4 \times \mathrm{SL}_2, (k^*)^4 \times \mathrm{PSL}_2$ $((k^*)^4 \times \mathrm{SL}_2)/C$, где $C = \langle ((1, 1, 1, -1), \mathrm{diag}(-1, -1)) \rangle$, $k^* \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2, k^* \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{PSL}_2, k^* \times \mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{PSL}_2$, $(k^* \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/C$, где $C = \langle (-1, \mathrm{diag}(-1, -1), \mathrm{diag}(1, 1)) \rangle$, $(k^* \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)/C$, где $C = \langle (-1, \mathrm{diag}(-1, -1), \mathrm{diag}(-1, -1)) \rangle$, $(k^* \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{PSL}_2)/C$, где $C = \langle (-1, \mathrm{diag}(-1, -1), \mathrm{diag}(1, 1)) \rangle$, $k^* \times \mathrm{P}(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)$, $(k^* \times \mathrm{P}(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2))/C$, где $C = \langle (-1, g) \rangle$, $g = \pi(\mathrm{diag}(-1, -1), \mathrm{diag}(1, 1))$, $\pi: \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)$ — гомоморфизм факторизации

Неполупростые редуktивные группы и полупростые группы

Первая теорема этого доклада дает способ строить неизоморфные связные редуktивные неполупростые алгебраические группы с изоморфными подлежащими многообразиями. Но она не дает способа строить полупростые группы с этим свойством.

Однако неизоморфные связные полупростые группы с изоморфными подлежащими многообразиями существуют. Ниже указан метод, позволяющий их строить (в этой конструкции не накладывается ограничений на характеристику поля k).

Обозначения:

- A — связная полупростая алгебраическая группа (компактная вещественная группа Ли).
- $G := A^n := A \times \cdots \times A$ (n сомножителей).
- F_n — свободная группа ранга n со свободной системой образующих $x_1, \dots, x_n$.
- Если $w \in F_n$ и $g = (a_1, \dots, a_n) \in G$, $a_i \in A$, то $w(g)$ — образ w при гомоморфизме групп $F_n \rightarrow A$, $x_j \mapsto a_j$.
- Если $\sigma \in \text{Aut}(F_n)$, то

$$\hat{\sigma}: \underline{G} \rightarrow \underline{G}, \quad g \mapsto (\sigma(x_1)(g), \dots, \sigma(x_n)(g)).$$

Свойства $\hat{\sigma}$:

- (a) $\hat{\sigma}$ является автоморфизмом (диффеоморфизмом) многообразия $\underline{G}$, но, вообще говоря, не является автоморфизмом группы G .
- (b) Ограничение $\hat{\sigma}$ на центр $\mathcal{C}(G)$ группы G является автоморфизмом группы $\mathcal{C}(G)$.
- (c) Если C — подгруппа в $\mathcal{C}(G)$, то, ввиду (b), можно рассмотреть два действия группы C на алгебраическом (дифференцируемом) многообразии $\underline{G}$:

$$c(g) := \begin{cases} cg & \text{для первого действия,} \\ \hat{\sigma}(c)g & \text{для второго действия} \end{cases} \quad c \in C, g \in G.$$

- (d) отображение $\hat{\sigma}: \underline{G} \rightarrow \underline{G}$ является C -эквивариантным, если на левой копии $\underline{G}$ рассматривать первое действие группы C , а на правой копии — второе.

Конструкция неизоморфных связных полупростых алгебраических групп с изоморфными подлежащими многообразиями

Из свойства (d) и универсального свойства факторов следует, что автоморфизм $\hat{\sigma}$ многообразия $\underline{G}$ спускается до изоморфизма (диффеоморфизма) $\hat{\sigma}_C$ факторов по указанным действиям:

$$\begin{array}{ccc} \underline{G} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \underline{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{G/C} & \xrightarrow{\hat{\sigma}_C} & \underline{G/\hat{\sigma}(C)} \end{array} .$$

Конструкция неизоморфных связных полупростых алгебраических групп с изоморфными подлежащими многообразиями

Т. о., G/C и $G/\widehat{\sigma}(C)$ — связные полупростые алгебраические группы (компактные вещественные группы Ли) с изоморфными (диффеоморфными) подлежащими многообразиями.

Однако в общем случае алгебраические группы (вещественные группы Ли) G/C и $G/\widehat{\sigma}(C)$ изоморфными не являются.

Конструкция неизоморфных связных полупростых алгебраических групп с изоморфными подлежащими многообразиями

А именно, имеет место следующий критерий:

Теорема (Критерий изоморфности G/C и $G/\widehat{\sigma}(C)$)

Если группа G (эквивалентно, A) односвязна, то следующие свойства эквивалентны:

- (i) G/C и $G/\widehat{\sigma}(C)$ — изоморфные полупростые алгебраические группы (компактные вещественные группы Ли);
- (ii) группы C и $\widehat{\sigma}(C)$ лежат в одной орбите естественного действия группы $\text{Aut}(G)$ на множестве всех подгрупп группы $\mathcal{C}(G)$.

Конструкция неизоморфных связных полупростых алгебраических групп с изоморфными подлежащими многообразиями

Замечание. Действие группы $\text{Aut}(G)$ на множестве всех подгрупп группы $\mathcal{C}(G)$ сводится к действию группы $\text{Out}(G)$, которая изоморфна группе автоморфизмов схемы Дынкина группы G .

Пример

- Пусть A — односвязная простая алгебраическая группа (компактная группа Ли) с нетривиальным центром $\mathcal{C}(A)$.
- Пусть $n = 2$, т.е.

$$G = A \times A. \quad (1)$$

- Пусть $\sigma \in \text{Aut}(F_2)$ определен равенствами

$$\sigma(x_1) = x_1, \quad \sigma(x_2) = x_1 x_2^{-1}$$

- Пусть S — нетривиальная подгруппа в $\mathcal{C}(A)$.

Положим

$$C := \{(s, s) \mid s \in S\}. \quad (2)$$

Тогда

$$\hat{\sigma}(C) = \{(s, e) \mid s \in S\}. \quad (3)$$

Ввиду простоты A , элементы группы $\text{Out}(G)$ осуществляет перестановки сомножителей в правой части равенства (1). Это, (2) и (3) показывает, что C и $\widehat{\sigma}(C)$ не лежат в одной $\text{Out}(G)$ -орбите.

Поэтому

$$\boxed{G/C = (A \times A)/C} \quad \text{и} \quad \boxed{G/\widehat{\sigma}(C) = (A/S) \times A}$$

– неизоморфные алгебраические группы (компактные вещественные группы Ли) с изоморфными (диффеоморфными) подлежащими многообразиями.

Пример (алгебраические группы)

Вот конкретный пример:

Возьмем $A = \mathrm{SL}_d$, $d \geq 2$ и $S = \langle z \rangle$, где $z = \mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon) \in A$, $\varepsilon \in k$ — примитивный d -й корень из 1.

Это дает неизоморфные алгебраические группы

$$G/C = (\mathrm{SL}_d \times \mathrm{SL}_d) / \langle (z, z) \rangle,$$

$$G/\widehat{\sigma}(C) = \mathrm{PSL}_d \times \mathrm{SL}_d,$$

подлежащие многообразия которых изоморфны.

Пример (алгебраические группы)

Если $d = 2$, то $G = \mathrm{Spin}_4$, $G/C = \mathrm{SO}_4$. Следовательно,
алгебраические группы

$$\boxed{\mathrm{SO}_4} \quad \text{и} \quad \boxed{\mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{SL}_2}$$

не изоморфны, но их подлежащие многообразия
 SO_4 и $\mathrm{PSL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ изоморфны.

Пример (компактные вещественные группы Ли)

Возьмем $A = \mathrm{SU}_d$ и пусть S является той же группой, что и выше. Тогда мы получаем, что

$$G/C = (\mathrm{SU}_d \times \mathrm{SU}_d)/C,$$

$$G/\widehat{\sigma}(C) = \mathrm{PU}_d \times \mathrm{SU}_d$$

— неизоморфные компактные вещественные группы Ли, подлежащие многообразия которых

$$\boxed{(\mathrm{SU}_d \times \mathrm{SU}_d)/C} \quad \text{и} \quad \boxed{\mathrm{PU}_d \times \mathrm{SU}_d}$$

диффеоморфны.

Пример (компактные вещественные группы Ли)

Замечание

При $d = p^r$, где p — простое число, это утверждение было доказано в 1965 П. Ф. Баумом и В. Браудером (P. F. Baum, W. Browder). Они вывели неизоморфность групп $(SU_d \times SU_d)/C$ и $PU_d \times SU_d$ из неизоморфности их колец Понтрягина $H_*((SU_d \times SU_d)/C, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ и $H_*(PU_d \times SU_d, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (описание этих колец является весьма непростой задачей).

Пример (компактные вещественные группы Ли)

Если $d = 2$, то $G/C = SO_4$, $G/\widehat{\sigma}(C) = SO_3 \times SU_2$. Поэтому
компактные группы Ли

$$\boxed{SO_4} \text{ и } \boxed{SO_3 \times SU_2}. \quad (*)$$

неизоморфны, но их подлежащие многообразия
 SO_4 и $SO_3 \times SU_2$ диффеоморфны.

Замечание

Пример (*) известен давно и вошел в учебники: см. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, где диффеоморфизм между SO_4 и $SO_3 \times SU_2$ строится с помощью кватернионов.

Построенные выше неизоморфные связные полупростые алгебраические группы (компактные вещественные группы Ли) и изоморфными (диффеоморфными) подлежащими многообразиями не являются простыми. Следующие теоремы показывают, что это не случайно:

Теорема

Пусть G_1 и G_2 — алгебраические группы, одна из которых связна и проста. Следующие свойства эквивалентны:

- G_1 и G_2 — изоморфные алгебраические группы;
- $\underline{G_1}$ и $\underline{G_2}$ — изоморфные алгебраические многообразия.

Теорема

Две связные компактные вещественные простые группы Ли изоморфны тогда и только тогда, когда их подлежащие многообразия гомотопически эквивалентны.

Указанная конструкция неизоморфных алгебраических групп с изоморфными подлежащими многообразиями находит применение к следующим вопросам о структуре групп автоморфизмов алгебраических многообразий, находящимся в фокусе внимания специалистов в последнее десятилетие.

(Q1) Дана (абстрактная) группа S . Существует ли такое алгебраическое многообразие Z , что S вкладывается в $\text{Aut}(Z)$?

(Q2) Если да, то каковы свойства такого Z ? Существуют ли такие Z в определенных выделенных классах алгебраических многообразий (например, рациональных)? Каковы “экстремальные” значения инвариантов таких Z (например, минимум их размерностей)? И т.д.

(Q3) В какие группы вкладываются группы автоморфизмов алгебраических многообразий определенного типа (например, линейны ли они)?

$$S = \text{Aut}(F_n)$$

Ниже рассмотрен случай $S = \text{Aut}(F_n)$.

Обозначения:

- G — алгебраическая группа (не обязательно связная и/или аффинная),
- G^0 — связная компонента единицы группы G ,
- $X := \underline{G} \times \cdots \times \underline{G}$ (n сомножителей) снабжено алгебраическим действием группы $\text{Aut}(F_n)$ (как объяснено выше) и группы $\text{Int}(G)$ (диагонально).
- R — такая замкнутая подгруппа группы $\text{Int}(G)$, для которой существует категорный фактор

$$\pi_{X//R}: X \rightarrow X//R. \quad (*)$$

Два основных случая, когда категорный фактор $(*)$ существует:

(F) R конечна;

(R) G аффинна, а R редуктивна.

Action of $S = \text{Aut}(F_n)$ on $X//R$

Поскольку действия групп $S = \text{Aut}(F_n)$ и R на X коммутируют, действие группы $S = \text{Aut}(F_n)$ на X спускается до ее действия на $X//R$.

Если это последнее действие эффективно, это дает вложение групп

$$\text{Aut}(F_n) \hookrightarrow \text{Aut}(X//R).$$

Основной вопрос:

Для каких G , n и R это действие группы $\text{Aut}(F_n)$ на $X//R$ эффективно?

Теорема

Если группа R конечна и $n \geq 2$, то следующие свойства эквивалентны:

- Действие группы $\text{Aut}(F_n)$ на $X // R$ эффективно.
- Группа G^0 неразрешима.

Следствие

Пусть группа R конечна, группа G^0 неразрешима и $n \geq 2$.

(a) Следующие группы

- $\text{Aut}(F_n)$;
- F_2 ;
- группа кос B_n с n нитями при $n \geq 3$

допускают вложение в $\text{Aut}(X//R)$.

(b) Группа $\text{Aut}(X//R)$ неабелева и при $n \geq 3$ нелинейна.

(c) Если группа G связна и аффинна, а R тривиальна, то $X//R$ является неприводимым рациональным алгебраическим многообразием и группа $\text{Aut}(X//R)$ вложена в группу Кремоны ранга $n \dim(G)$.

Теорема

Для каждого простого числа $p \neq \text{char}(k)$ существует конечная p -группа F со следующим свойством.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над k , а $\iota: F \hookrightarrow \text{GL}(V)$ — такое вложение групп, что в $\iota(F)$ нет неединичных элементов центра группы $\text{GL}(V)$ (такие пары (V, ι) существуют для каждой конечной группы F). Пусть $G = \text{GL}(V)$, а R — образ группы $\iota(F)$ при каноническом отображении $\text{GL}(V) \rightarrow \text{Int}(\text{GL}(V))$. Тогда $X//R$ — нерациональное (даже стабильно) аффинное многообразие, снабженное эффективным действием группы $\text{Aut}(X//R)$.

Теорема

Пусть $G = \mathrm{SL}_2$ или PSL_2 , $n \geq 2$, $\mathrm{char}(k) = 0$, и пусть группа R конечна. Тогда $X//R$ — неприводимое аффинное $3n$ -мерное рациональное алгебраическое многообразие, снабженное эффективным действием группы $\mathrm{Aut}(X//R)$.

Обозначение:

Если S — группа, обозначим через

$$\mathrm{var}_k(S) \quad (\text{соответственно, } \mathrm{Crem}_k(S))$$

минимум размерностей алгебраических многообразий Z
(соответственно, минимум рангов групп Кремоны Cr над k),
для которых S вложима в $\mathrm{Aut}(Z)$ (соответственно, в Cr).

Если таких Z (соответственно, Cr) нет, положим

$$\mathrm{var}_k(S) = \infty \quad (\text{resp. } \mathrm{Crem}_k(S) = \infty).$$

Следствие

Если $S = F_n$ при $n \geq 1$ или $S = B_n$ при $n \geq 3$, то

$$\mathrm{var}_k(S) \leq 3n, \quad \mathrm{Crem}_k(S) \leq 3n.$$

Замечание

Эти оценки чисел $\mathrm{var}_k(B_n)$ and $\mathrm{Crem}_k(B_n)$ на порядок лучше тех, которые следуют из работы D. Krammer, *Braid groups are linear*, Annals of Math. **155** (2002), 131–156, в которой доказана вложимость группы B_n в $\mathrm{GL}_{n(n-1)/2}$.