

Основы теории открытых квантовых систем II.

Лекция 1. Вычисления с линейными и квадратичными формами по бозонным операторам рождения и уничтожения

Теретёнков Александр Евгеньевич

3 февраля 2025 г.

В прошлом семестре...

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[\hat{H}, \rho_t] + \sum_j \left(\hat{C}_j \rho_t \hat{C}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \rho_t - \frac{1}{2} \rho_t \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \right)$$

Линейные и квадратичные формы

Рассмотрим гильбертово пространство $\otimes_{j=1}^n \ell_2$. В таком пространстве можно задать n пар операторов рождения и уничтожения по формулам

$$\begin{aligned}\hat{a}_i |\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n\rangle &= \sqrt{\nu_i} |\nu_1, \dots, \nu_i - 1, \dots, \nu_n\rangle, \\ \hat{a}_i^\dagger |\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n\rangle &= \sqrt{\nu_i + 1} |\nu_1, \dots, \nu_i + 1, \dots, \nu_n\rangle,\end{aligned}$$

где $|\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_n\rangle$, $\nu_i \in \mathbb{Z}_+$ — базис в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$.

Линейные и квадратичные формы

Такие операторы удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0.$$

Линейные и квадратичные формы

Так как мы будем работать с квадратичными и линейными комбинациями из этих операторов, то нам будет удобно составить из операторов рождения и уничтожения $2n$ -мерный вектор $\mathbf{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{a}_1^\dagger, \dots, \hat{a}_n^\dagger)^T$. Тогда введём естественные обозначения

$$f^T \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^T f \equiv \sum_{i=1}^n (f_i \hat{a}_i + f_{i+n} \hat{a}_i^\dagger), \quad \forall f \in \mathbb{C}^{2n},$$

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} \hat{a}_i \hat{a}_j + K_{i+n,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + K_{i,j+n} \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger + K_{i+n,j+n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger),$$

Линейные и квадратичные формы

Отметим, что данное определение не предполагает нормального упорядочения операторов рождения и уничтожения, которое мы будем обозначать парами двоеточий. В частности,

$$: \mathbf{a}^T K \mathbf{a} : \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} \hat{a}_i \hat{a}_j + K_{i+n,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + K_{i,j+n} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i + K_{i+n,j+n} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger),$$

Эрмитово сопряжение матриц $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ будем обозначать $^+$.

Линейные и квадратичные формы

Определим $2n \times 2n$ -мерные матрицы как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица в $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Тогда канонические коммутационные соотношения (ККС) в таких обозначениях принимают вид

$$[f^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T g] = -f^T J g, \quad \forall g, f \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Линейные и квадратичные формы

Определение. $\sim$ -сопряжение векторов и матриц определяется формулами:

$$\tilde{g} = E\bar{g}, \quad g \in \mathbb{C}^{2n}, \quad \tilde{K} = E\bar{K}E, \quad K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

где черта сверху обозначает (поэлементное) комплексное сопряжение.

Линейные и квадратичные формы

Упражнение. Тогда эрмитово сопряжение действует по формулам

$$(g^T \mathbf{a})^\dagger = \tilde{g}^T \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a}^T K \mathbf{a})^\dagger = \mathbf{a}^T \tilde{K}^T \mathbf{a}, \quad \forall g \in \mathbb{C}^{2n}, K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

в частности, $(\mathbf{a}^T K \mathbf{a})^\dagger = \mathbf{a}^T \tilde{K} \mathbf{a}$ при $K = K^T$.

Замечание. $\sim$ -сопряжение инволютивно

$$\tilde{\tilde{K}} = K, \quad \tilde{\tilde{g}} = g, \quad \forall g \in \mathbb{C}^{2n}, K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

и полулинейно

$$(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)^\sim = \bar{\lambda}_1 \tilde{K}_1 + \bar{\lambda}_2 \tilde{K}_2, \quad \forall K_1, K_2 \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Будем писать tr для следа по пространству $\bigotimes_{j=1}^n \ell_2$ и Tr для следа по пространству $\mathbb{C}^{2n}$.

Поясним введённые обозначения на примере. Рассмотрим $2n \times 2n$ -матрицу $\alpha \alpha^T \rho$ с операторнозначными компонентами

$$\alpha \alpha^T \rho \equiv \begin{pmatrix} \hat{a}_1^2 \rho & \cdots & \hat{a}_1 \hat{a}_n \rho & \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rho & \cdots & \hat{a}_1 \hat{a}_n^\dagger \rho \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_n \hat{a}_1 \rho & \cdots & \hat{a}_n^2 \rho & \hat{a}_n \hat{a}_1^\dagger \rho & \cdots & \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger \rho \\ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rho & \cdots & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n \rho & (\hat{a}_1^\dagger)^2 \rho & \cdots & \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n^\dagger \rho \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1 \rho & \cdots & \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rho & \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rho & \cdots & (\hat{a}_n^\dagger)^2 \rho \end{pmatrix},$$

След

Тогда

$$\mathrm{tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T \rho) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\hat{a}_1^2 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_n \rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1 \hat{a}_n^\dagger \rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_n \hat{a}_1 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^2 \rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_n \hat{a}_1^\dagger \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger \rho) \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n \rho) & \mathrm{tr}((\hat{a}_1^\dagger)^2 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_n^\dagger \rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1 \rho) & \cdots & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \rho) & \mathrm{tr}(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rho) & \cdots & \mathrm{tr}((\hat{a}_n^\dagger)^2 \rho) \end{pmatrix},$$

— $2n \times 2n$ -матрица с комплексными числовыми элементами, а

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{a} \mathbf{a}^T \rho) = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i^2 + (\hat{a}_i^\dagger)^2) \rho$$

— оператор в $\otimes_{j=1}^n \ell_2$.

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Лемма. (Симметризация форм) Пусть $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} K^T J = \mathbf{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} K J.$$

Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T f g^T \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}^T f g^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T g f^T \mathbf{a}) + \frac{1}{2}[\mathbf{a}^T f, g^T \mathbf{a}] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (f g^T + g f^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} f^T J g = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (f g^T + g f^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(g f^T J), \end{aligned}$$

где были использованы ККС. Произвольную матрицу $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ можно представить в виде $K = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, поэтому по линейности получаем требуемую формулу. □

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Лемма. (Симметризация форм) Пусть $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} K^T J = \mathbf{a}^T \frac{1}{2}(K + K^T) \mathbf{a} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} K J.$$

Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T f g^T \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}^T f g^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T g f^T \mathbf{a}) + \frac{1}{2}[\mathbf{a}^T f, g^T \mathbf{a}] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (f g^T + g f^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} f^T J g = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (f g^T + g f^T) \mathbf{a} - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(g f^T J), \end{aligned}$$

где были использованы ККС. Произвольную матрицу $K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ можно представить в виде $K = \sum_{i=1}^{4n^2} f_i g_i^T$, поэтому по линейности получаем требуемую формулу. □

Эта лемма важна, когда нам необходимо приравнять две формы, так как приравнивать можно только симметризованные формы.

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Лемма. Пусть $K = K^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда нормально упорядоченная и неупорядоченная формы связаны формулой

$$\mathbf{a}^T K \mathbf{a} =: \mathbf{a}^T K \mathbf{a} : + \frac{1}{2} \text{Tr} EK.$$

Упражнение. (Коммутатор двух форм.) Пусть $K = K^T, M = M^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда:

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}, \frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + f^T \mathbf{a} \right] = \\ = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (MJK - KJM) \mathbf{a} + (f^T JK - g^T JM) \mathbf{a} - g^T J f.$$

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Лемма. Пусть $K = K^T, M = M^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда (в предположении, что экспоненты хорошо определены):

$$\begin{aligned} & e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T M \mathbf{a} + f^T \mathbf{a} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} - g^T \mathbf{a}} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-KJ} M e^{JK} \mathbf{a} + \left(e^{-KJ} M \frac{e^{JK} - I}{JK} Jg + e^{-KJ} f \right)^T \mathbf{a} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} g^T J \frac{e^{-KJ} - I}{KJ} M + f^T \right) \frac{e^{JK} - I}{JK} Jg. \end{aligned}$$

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Доказательство. Обозначим

$\mathbf{a}(\tau) = e^{(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a})\tau} \mathbf{a} e^{-(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a})\tau}$. Дифференцируя по τ , мы получим уравнения Гейзенберга:

$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{a}(\tau) = [\frac{1}{2}\mathbf{a}^T(\tau) K \mathbf{a}(\tau) + g^T \mathbf{a}(\tau), \mathbf{a}(\tau)]$. С учётом выражений для коммутаторов мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{a}(\tau) = JK \mathbf{a}(\tau) + Jg, \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}.$$

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, его решение $\mathbf{a}(\tau) = e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg$. Для квадратичных и линейных форм имеем:

$$\begin{aligned} & e^{\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}\right)\tau} \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T M \mathbf{a} + f^T \mathbf{a} \right) e^{-\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + g^T \mathbf{a}\right)\tau} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}^T(\tau) M \mathbf{a}(\tau) + f^T \mathbf{a}(\tau) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg \right)^T M \left(e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg \right) + \\ &+ f^T \left(e^{JK\tau} \mathbf{a} + \frac{e^{JK\tau} - I}{JK} Jg \right). \end{aligned}$$

При $\tau = 1$, собирая члены при каждой степени $\mathbf{a}$, получим доказываемую формулу.

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Лемма. (Производная экспоненты.) Пусть $K_t = K_t^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} + g_t^T \mathbf{a} + c_t} \right) e^{-\frac{1}{2} \mathbf{a}^T K_t \mathbf{a} - g_t^T \mathbf{a} - c_t} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T e^{-K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \\ &+ \frac{1}{2} g_t^T J \frac{e^{-K_t J} - I}{K_t J} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{K_t J} - I}{K_t J} g_t \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} (\operatorname{sh}(K_t J) - K_t J) \frac{1}{K_t J} g_t + c_t \right). \end{aligned}$$

Упражнение. $e^{-K_t J} \frac{d}{dt} e^{K_t J} J^{-1}$ — симметрична.

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Идея доказательства предыдущей леммы:

Лемма. Формула Фейнмана-Вилкокса

$$e^{-R_t} \frac{d}{dt} e^{R_t} = \int_0^1 ds e^{-sR_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} e^{R_t} \right) e^{-R_t} = \int_0^1 ds e^{sR_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{-sR_t}$$

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Доказательство. Обозначим

$$F_t(s) = \frac{d}{dt} e^{sR_t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} F_t(s) &= \frac{d}{dt} (R_t e^{sR_t}) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t} + R_t \frac{d}{dt} (e^{sR_t}) = \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t} + R_t F_t(s) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (e^{-sR_t} F_t(s)) = e^{-sR_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t}$$

$$e^{-R_t} \frac{d}{dt} e^{R_t} = \int_0^1 ds e^{-sR_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t}$$

Вычисления с квадратичными и линейными формами

Доказательство. Обозначим

$$F_t(s) = \frac{d}{dt} e^{sR_t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} F_t(s) &= \frac{d}{dt} (R_t e^{sR_t}) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t} + R_t \frac{d}{dt} (e^{sR_t}) = \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t} + R_t F_t(s) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (e^{-sR_t} F_t(s)) = e^{-sR_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t}$$

$$e^{-R_t} \frac{d}{dt} e^{R_t} = \int_0^1 ds e^{-sR_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t}$$

Квадратичный супероператор

Рассмотрим квадратичный супероператор общего вида:

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathbf{a}^T \Gamma \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma_L \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \Gamma_R \mathbf{a} + \rho g_R^T \mathbf{a} + g_L^T \mathbf{a} \rho + \lambda \rho,$$

где $\Gamma, \Gamma_L = \Gamma_L^T, \Gamma_R = \Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Квадратичный супероператор

Определим $\mathcal{L}^*$

$$\text{tr}((\mathcal{L}^*(\hat{X}))^\dagger \rho) = \text{tr}(\hat{X}^\dagger \mathcal{L}(\rho)).$$

и $\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \left(\mathcal{L}(\rho^\dagger) \right)^\dagger.$$

Упражнение.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+(\rho) &= \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} + \rho \tilde{g}_L^T \mathbf{a} + \tilde{g}_R^T \mathbf{a} \rho + \bar{\lambda} \rho, \\ \mathcal{L}^*(\hat{X}) &= \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} \hat{X} + \hat{X} \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{a} + \tilde{g}_L^T \mathbf{a} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X}.\end{aligned}$$

Квадратичный супероператор

Определим $\mathcal{L}^*$

$$\text{tr}((\mathcal{L}^*(\hat{X}))^\dagger \rho) = \text{tr}(\hat{X}^\dagger \mathcal{L}(\rho)).$$

и $\mathcal{L}^+$

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \left(\mathcal{L}(\rho^\dagger) \right)^\dagger.$$

Упражнение.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+(\rho) &= \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} \rho + \rho \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} + \rho \tilde{g}_L^T \mathbf{a} + \tilde{g}_R^T \mathbf{a} \rho + \bar{\lambda} \rho, \\ \mathcal{L}^*(\hat{X}) &= \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_L \mathbf{a} \hat{X} + \hat{X} \mathbf{a}^T \tilde{\Gamma}_R \mathbf{a} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathbf{a} + \tilde{g}_L^T \mathbf{a} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X}.\end{aligned}$$

Квадратичный супероператор

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*(I) = 0$, тогда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a},$$

где

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad H = H^T = \tilde{H}, \quad f = \tilde{f}.$$

Квадратичный супероператор

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*(I) = 0$, тогда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a},$$

где

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad H = H^T = \tilde{H}, \quad f = \tilde{f}.$$

Доказательство.

1) Из $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, с учётом формулы из упражнения, получим

$$\tilde{\Gamma}^T = \Gamma, \quad \tilde{\Gamma}_R = \Gamma_L, \quad \tilde{g}_R = g_L, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

Доказательство.

1) Из $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, с учётом формулы из упражнения, получим

$$\tilde{\Gamma}^T = \Gamma, \quad \tilde{\Gamma}_R = \Gamma_L, \quad \tilde{g}_R = g_L, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

2) Из $\mathcal{L}^*(I) = 0$, с учётом формулы из упражнения (и леммы про симметризацию), получим

$$\frac{\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^T}{2} + \tilde{\Gamma}_L + \tilde{\Gamma}_R = 0, \quad \tilde{g}_L + \tilde{g}_R = 0, \quad \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J = 0.$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Определим $H \equiv i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$, тогда

$$\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma), \quad \Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Определим $H \equiv i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$, тогда

$$\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma), \quad \Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Отметим, что если $\tilde{\Gamma}^T = \Gamma$ и $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J$, то $\lambda = -\frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\Gamma} J$ и условие $\lambda = \bar{\lambda}$ выполняется автоматически.

Для линейных членов получаем $g_L = -\tilde{g}_L = \tilde{g}_R = -g_R$, что эквивалентно условию $\tilde{f} = f$, если определить $f = ig_L$.

Для квадратичных членов получим

$$\Gamma_L + \tilde{\Gamma}_L = \Gamma_R + \tilde{\Gamma}_R = -\frac{1}{2}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Определим $H \equiv i(\Gamma_L - \tilde{\Gamma}_L) = -i(\Gamma_R - \tilde{\Gamma}_R)$, тогда

$$\Gamma_L = -i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma), \quad \Gamma_R = i\frac{1}{2}H - \frac{1}{4}(\Gamma^T + \Gamma).$$

Отметим, что если $\tilde{\Gamma}^T = \Gamma$ и $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} J$, то $\lambda = -\frac{1}{2} \text{Tr } \tilde{\Gamma} J$ и условие $\lambda = \bar{\lambda}$ выполняется автоматически.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) = & -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} \rho - \\ & - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma^T J \rho. \end{aligned}$$

С учётом формулы леммы про симметризацию получаем требуемую формулу. □

Квадратичный супероператор

Упражнение. При $\hat{H} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T H \mathbf{a} + h^T \mathbf{a}$ ($H = H^T = \tilde{H}$, $h = \tilde{h}$) и $\hat{C}_i = \gamma_i^T \mathbf{a} + c_i$ генератор ГКСЛ

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\hat{H}, \rho] + \sum_j \left(\hat{C}_j \rho \hat{C}_j^\dagger - \frac{1}{2} \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \rho - \frac{1}{2} \rho \hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j \right)$$

принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a},$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T, \quad l = \sum_i \bar{c}_i \gamma_i, \quad f = h + i \frac{l - \tilde{l}}{2}.$$

Более того, возможность написать Γ и f в таком виде эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geq 0, \quad f = \tilde{f}.$$

Динамика первых и вторых моментов

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho) \equiv -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \rho \right] + \mathbf{a}^T \rho \Gamma \mathbf{a} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}, \rho \}.$$

С учётом упражнения:

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, \hat{X} \right] + \mathbf{a}^T \hat{X} \Gamma^T \mathbf{a} - \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^T \Gamma^T \mathbf{a}, \hat{X} \}.$$

Динамика первых и вторых моментов

Лемма.

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\mathbf{a}) = J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} + iJf,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,\Gamma,f}^*(\mathbf{a} \mathbf{a}^T) = & J \left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \mathbf{a}^T \left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \right) J + \\ & + J\Gamma^T J + iJf \mathbf{a}^T - i\mathbf{a} f^T J. \end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

Доказательство.

1) Пусть $g \in \mathbb{C}^{2n}$. Вычислим (с учётом другого упражнения)

$$i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a} + f^T \mathbf{a}, g^T \mathbf{a} \right] = g^T (i J H \mathbf{a} + i J f).$$

В силу ККС имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ([\mathbf{a}^T, g^T \mathbf{a}] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [g^T \mathbf{a}, \mathbf{a}]) = \\ &= -\frac{1}{2} (g^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T [\mathbf{a}, \mathbf{a}^T] g) = \\ &= \frac{1}{2} (g^T J \Gamma^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \Gamma^T J g) = g^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

В силу произвольности g приходим к первой формуле.