О вкладе А. М. Вершика в эргодическую теорию*

А. А. Лодкин

Наследие Анатолия Моисеевича столь разнообразно, что смертному не дано составить сколько-нибудь полное описание его идей и результатов. Общеизвестно, что его талант характеризовался универсальностью и умением видеть глубокие и часто неожиданные связи между различными объектами и задачами, способностью посмотреть на вещи с неожиданной стороны. Другая особенность его творчества состояла в том, что он интересовался главным образом теми задачами, которые могут научить чему-то новому. Интересные постановки задач А. М. порой ценил не менее, чем решения. Он даже пропагандировал идею создания журналов, в которых, кроме доказанных результатов, публиковались бы интересные подходы и гипотезы. Надо признать, что статьи такого характера он порой публиковал и в классических журналах.

Его учителями были сначала Г. П. Акилов и Л. В. Канторович, а затем, в аспирантуре, переехавший в Ленинград В. А. Рохлин. В. А. привез в наш город две науки: эргодическую теорию и топологию. Его эргодический семинар был весьма популярен. Среди гостей семинара были В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, Д. В. Аносов, В. М. Алексеев и, несколько позже, их ученики Б. М. Гуревич, В. И. Оселедец, А. Б. Каток, А. М. Степин, Г. А. Маргулис. Семинар действовал примерно до 1968 года. В конце 60-х гг. А. М. завел собственные семинары.

Отличительной чертой большинства задач, изучавшихся А. М. Вершиком, было сочетание асимптотических методов в задачах с растущим числом частиц или комбинаторных объектов со статистическим подходом.

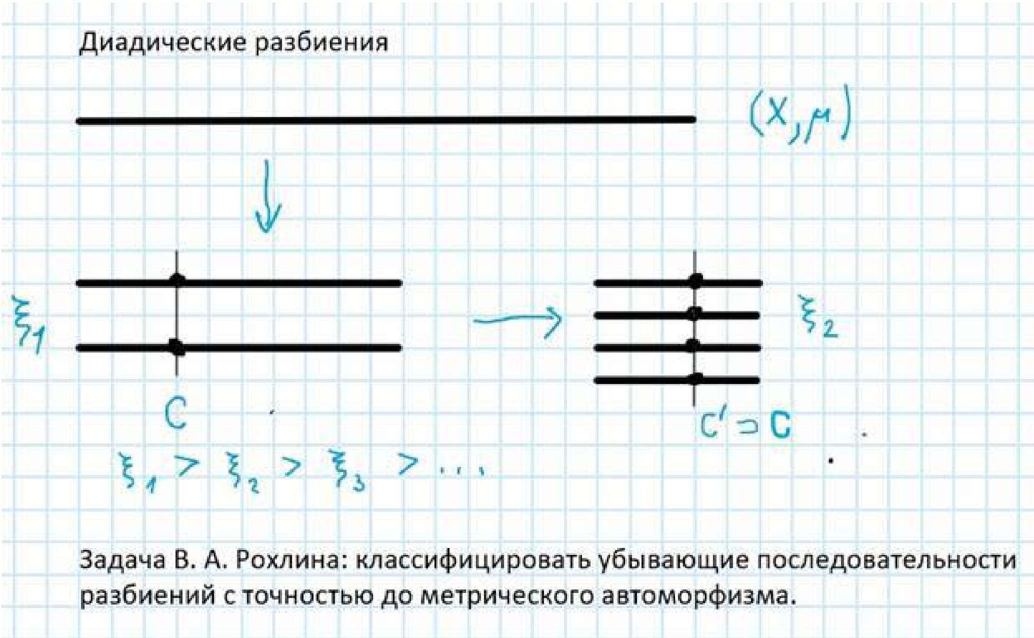
Остановимся на двух достижениях А. М. Вершика в эргодической теории, относящихся к 1960-80-м годам, которые останутся в истории математики.

1. Задача Рохлина о классификации монотонных (убывающих) последовательностей разбиений

Рассмотрим простейший случай: диадические разбиения пространства Лебега.

Последовательность называется диадической, если элементы фактор-разбиения ξ_n/ξ_{n+1} состоят из двух точек. Для простоты рассмотрим случай, когда условные меры этих точек одинаковы. С каждым измеримым разбиением ξ связана σ-алгебра $\mathcal{A}_\xi$ ξ-измеримых множеств. Убывающую последовательность $\mathcal{A}_{\xi_1} \supset \mathcal{A}_{\xi_2} \supset \dots$ σ-алгебр теперь называют фильтрацией.

*Выступление на заседании Санкт-Петербургского математического общества 4 февраля 2025 г.



Задача о классификации конечных последовательностей оказалась простой, её решила О. В. Гусева, аспирантка В. А. Рохлина. Другая его аспирантка, Р. М. Белинская, доказала, что разбиение на траектории эргодического автоморфизма (которое уже неизмеримо) можно представить в виде пересечения убывающей диадической последовательности разбиений. Вскоре А. М. Вершик доказал [1], что любые две эргодические диадические последовательности лакунарно (то есть, после одинакового подходящего прореживания) изоморфны и, следовательно, их пересечения метрически изоморфны.

Последний факт о единственности (с точностью до траекторного изоморфизма) эргодических преобразований пространства Лебега тем самым дал положительный ответ и на более скромный первоначальный вопрос Рохлина: верно ли, что повороты окружности на различные углы (несоизмеримые с длиной окружности) имеют изоморфные траекторные разбиения.

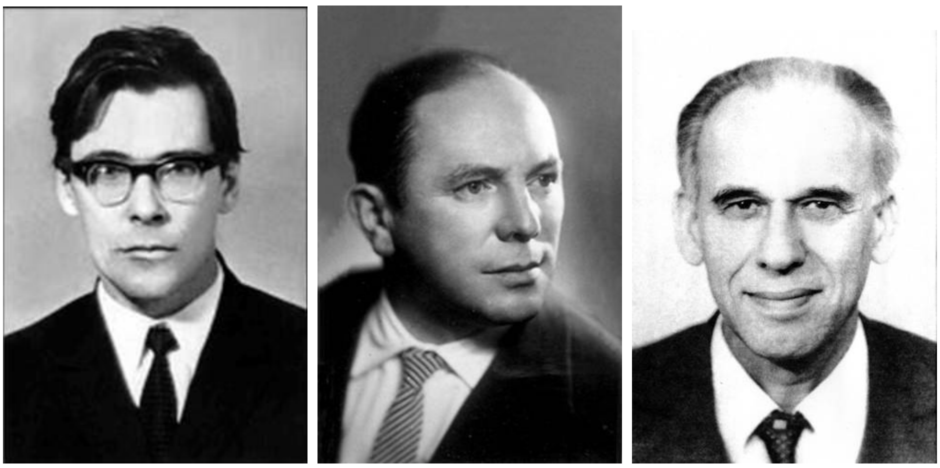
Интересно, что траекторная теория тесно связана с теорией алгебр фон Неймана, в частности, факторов, через конструкцию скрещенного произведения. Оказалось, что вопрос фон Неймана о единственности, с точностью до изоморфизма, гиперконечного фактора фон Неймана типа II_1 эквивалентен обсуждаемому выше вопросу об изоморфизме траекторных разбиений и был в 1963 году решен в положительном смысле Г. Даем операторными методами.

Следующий важный результат появился в результате исправления одной ошибки. В статье о лакунарном изоморфизме А. М. объявил (без доказательства), что убывающие диадические последовательности изоморфны сами по себе, то есть не лакунарно. Исправление этого ошибочного утверждения потребовало значительных усилий.

Результатом стал выдающийся результат А. М. Вершика в теории фильтраций — **открытие нестандартных последовательностей разбиений**, то есть последовательностей, не изоморфных стандартной [2, 5]. Последнюю можно определить так: разбиение ξ_n отрезка [0, 1] с лебеговой мерой есть разбиение на классы вещественных чисел, у которых в двоичной системе совпадают знаки с номерами, большими n. Для различения последовательностей разбиений А. М. Вершиком были изобретены довольно хитроумные инварианты предельного типа (по конечным кускам последовательности неизоморфность увидеть невозможно). В их определении важную роль играла метрика Канторовича -т-— Рубинштейна, восходящая к задаче о перемещении масс, а также энтропийные методы. Впоследствии с помощью этих инвариантов удалось построить континуум попарно неизоморфных последовательностей [3].

Любопытно, как А. М. наглядно интерпретировал существование нестандартной последовательности. Убывание последовательности $\{\xi_n\}$ разбиений означает, что $\xi_n = \xi_{n+1} \vee \eta_n$, где разбиение η_n отвечает за "информационную добавку". Предположим, что $\bigwedge_{n\geq 0} \xi_n = \nu$ — тривиальное разбиение. Верно ли, что последовательность $\{\eta_n\}$ определяет всю последовательность $\{\xi_n\}$? Предположим, что РЖ Математика каждый год, начиная от $-\infty$, выпускает том, содержащий лишь существенно новое в математике, открытое в данном году. Оказывается, что в случае нестандартной последовательности прочтение всех этих томов не позволяет полностью восстановить картину математики на любой данный год!

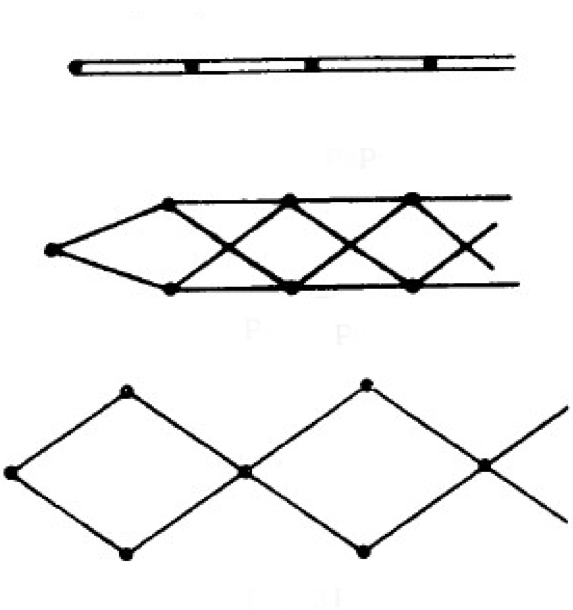
Описанный результат составляет основную часть докторской диссертации (1973) А. М. Вершика. Можно сказать, что её главные компоненты опираются на знания, унаследованные им от своих первых учителей: от Г. П. Акилова — индуктивные и проективные пределы, от Л. В. Канторовича — метрику Канторовича — Рубинштейна, от В. А. Рохлина — измеримые разбиения, энтропию. Так сказать, три источника и три составные части учения.



Г. П. Акилов (1921–1986), Л. В. Канторович (1912–1986), В. А. Рохлин (1919–1984)

2. Диаграммы Браттели и адический автоморфизм

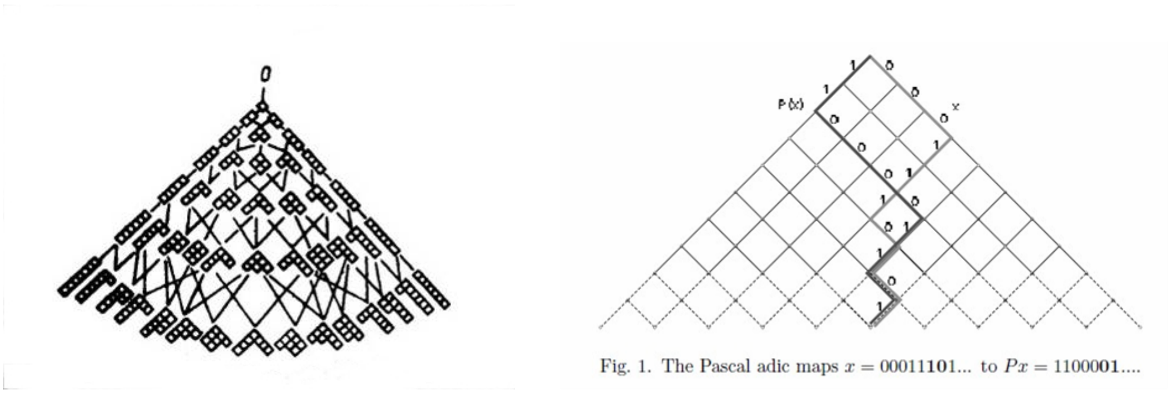
Эта тема началась с работ по аппроксимации эргодических автоморфизмов пространства с мерой последовательностью периодических автоморфизмов. Пионерским результатом в этом направлении была знаменитая теорема о равномерной аппроксимации Халмоша -— Рохлина 1940-х годов. Усовершенствовав конструкцию башен, возникающих в этой теореме, **А. М. предложил универсальную, так называемую адическую, модель произвольного эргодического автоморфизма на подходящем марковском компакте** (обобщение одометра бесконечной разрядности) [4]. Этот марковские компакты оказались ничем иным, как диаграммами (графами) У. Браттели (с помощью которых классифицируются так называемые AF-алгебры), но дополнительно снабженные (частичным) лексикографическим порядком на пространстве бесконечных путей. Автоморфизм состоит в том, что путь переходит в следующий в смысле этого порядка. Впоследствии такие преобразования, получившие большую популярность, стали называться преобразованиями Браттели -– Вершика.



Если в символической динамике рассматриваются преобразования сдвига в пространстве последовательностей, то адические преобразования действуют трансверсально (термин Ш. Ито), как бы перебирая состояния на этаже “с переносом разряда”.

В 1983 году нам с А. М. удалось обобщить [6] теорему о трансверсальной реализации одного автоморфизма на случай действия аменабельной группы автоморфизмов.

Вот интересные популярные графы.



Графы Юнга и Паскаля

Автоморфизм Паскаля, несмотря на кажущуюся простоту, до сих пор хранит загадку: никто не сомневается, что спектр такого автоморфизма чисто непрерывен, но доказать это пока никому не удалось.

Творческая активность А. М. с годами только росла. Мы не затронули здесь многочисленные результаты в эргодической теории, полученные им с его учениками в последние десятилетия. На последнем заседании своего семинара, в котором он принимал участие, на следующий день после своего 90-летия, Анатолий Моисеевич выступил с изложением программы дальнейших исследований, которые считал перспективными [7]

Список литературы

[1] А. М. Вершик. Теорема о лакунарном изоморфизме монотонных последовательностей разбиений. *Функц. анал. и его прил.* **2**, вып. 3, 17-21 (1968).

[2] А. М. Вершик. Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения. *ДАН СССР* **193**, вып. 4, 748-751 (1970).

[3] А. М. Вершик. Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей. *Функц. анал. и его прил.* **5**, вып. 3, 16-18 (1971).

[4] А. М. Вершик. Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории. *Записки научн. семин. ЛОМИ* **115**, 72-82 (1982).

[5] А. М. Вершик. Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений. *Алгебра и анализ* **6**, вып. 4, 1-68 (1994).

[6] A. A. Lodkin, A. M. Vershik. Approximation for actions of amenable groups, and transversal automorphisms. In "*Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory*"(Busteni, 1983). *Lect. Notes in Math.* **1132**, 331-346 (1985).

[7] О некоторых задачах. Выступление А. М. Вершика на семинаре по теории представлений и динамическим системам 29 декабря 2023 г. https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=41473&option_lang=rus