

**Математические методы механики  
Конференция, посвященная памяти  
академика А.Г. Куликовского  
Москва, 18 марта 2025 г.**



**Неустойчивость поверхностей раздела в теории фильтрации**

**Г.Г. Цыпкин**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российская академия наук, Москва*

- Течения нефти и газа в пластах.
- Течения в почвах и грунтах. Гидрология.
- Течения в высокотемпературных породах. Геотермальные системы.

# Неустойчивость течений в почвах и грунтах

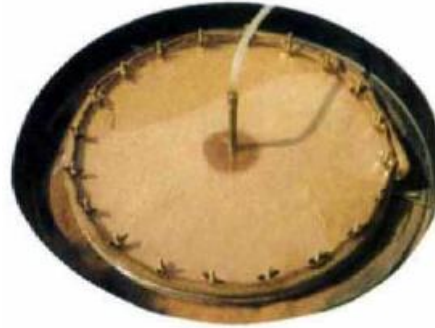




# Неустойчивость при инъекции жидкости и её кипении в пористой среде

$T=50\text{ C}$

$T=150\text{ C}$



*a*

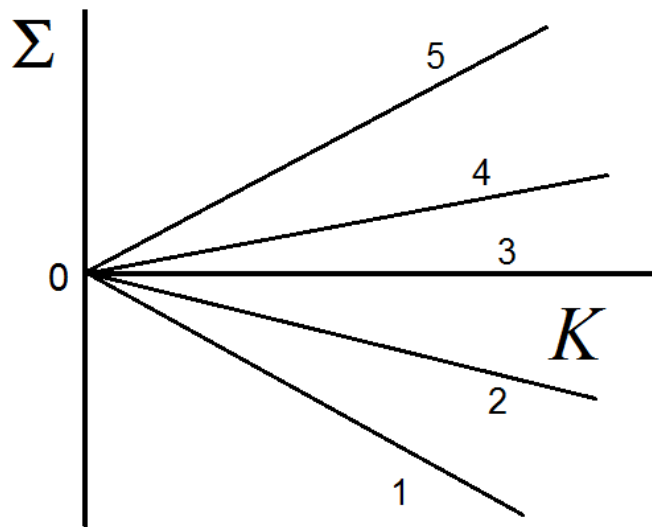
*b*

Лабораторный эксперимент.  
Инжекция жидкого эфира  
в слой песка.  
Fitzgerald & Woods, Nature  
1994

# Задача Саффмана-Тейлора

## Спонтанный переход к неустойчивости

$$x = a e^{iny + \sigma t} \quad \frac{\sigma}{n} \left( \frac{\mu_1}{k_1} + \frac{\mu_2}{k_2} \right) = (\rho_1 - \rho_2) g + \left( \frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) V.$$

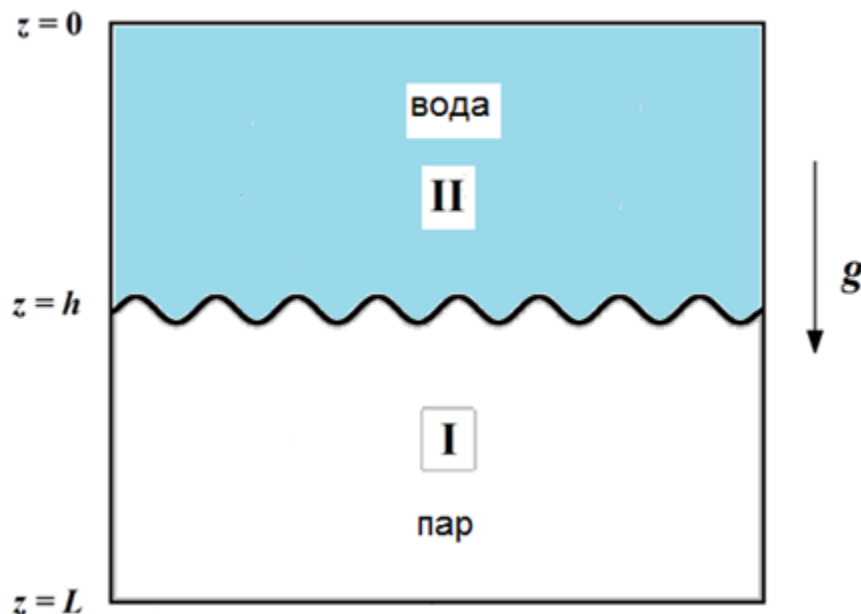


Saffman, Taylor, Proc. Roy. Soc. 1958

При переходе к неустойчивости все моды нейтрально устойчивы (3).  
Наиболее неустойчивая мода, соответствует бесконечно большому  
волновому числу или возмущению бесконечно малого размера

# Устойчивости слоя воды над слоем пара в геотермальной системе

Натурные наблюдения показывают существование геотермальных систем, когда слой воды расположен над слоем пара

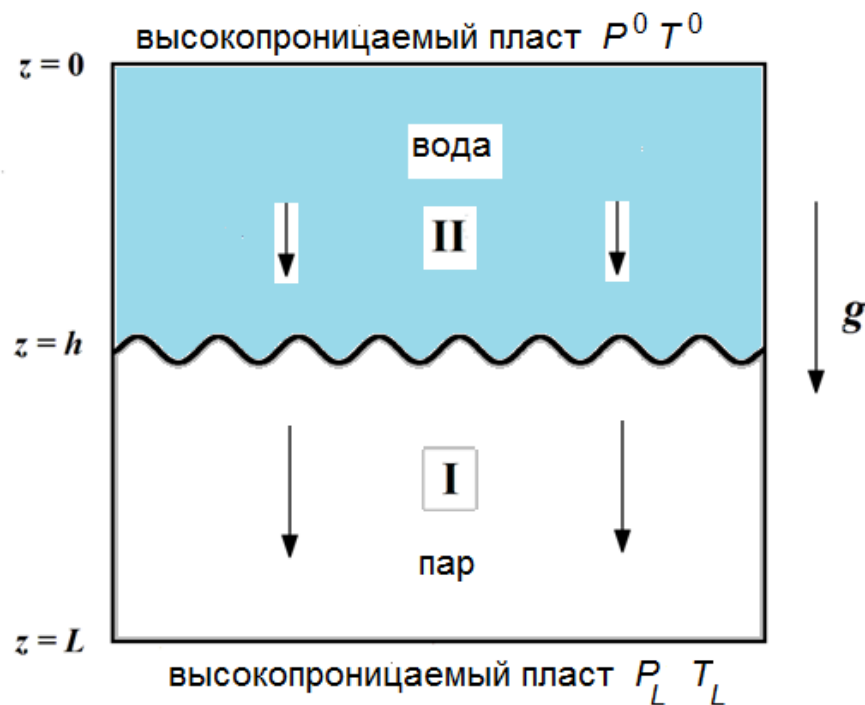


G. Schubert, J.M. Straus, 1980, *J. Geophys. Res.* 1980

Непроницаемое дно  $z=L$ , поток массы через поверхность раздела отсутствует  
Устойчивое состояние физической системы при проницаемости  $k < 4 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$

Устойчивое состояние наблюдается в геотермальных системах типа  
«вода над паром» при проницаемостях на два порядка выше

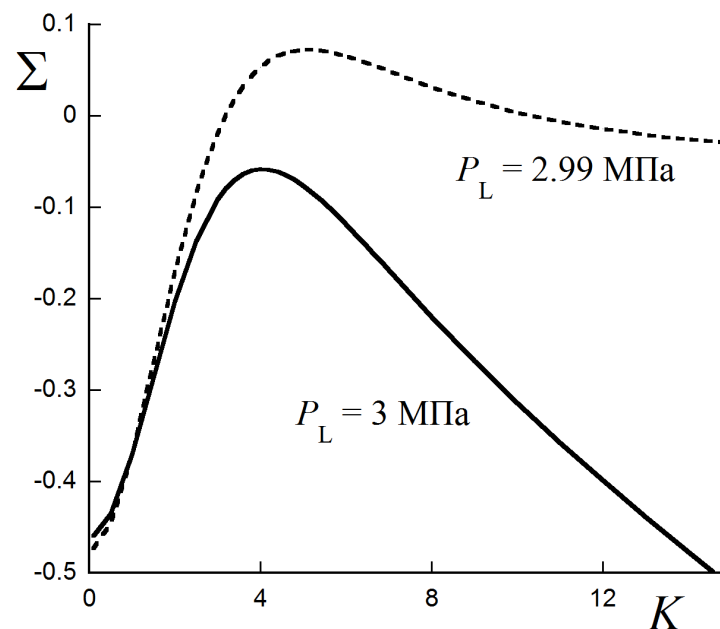
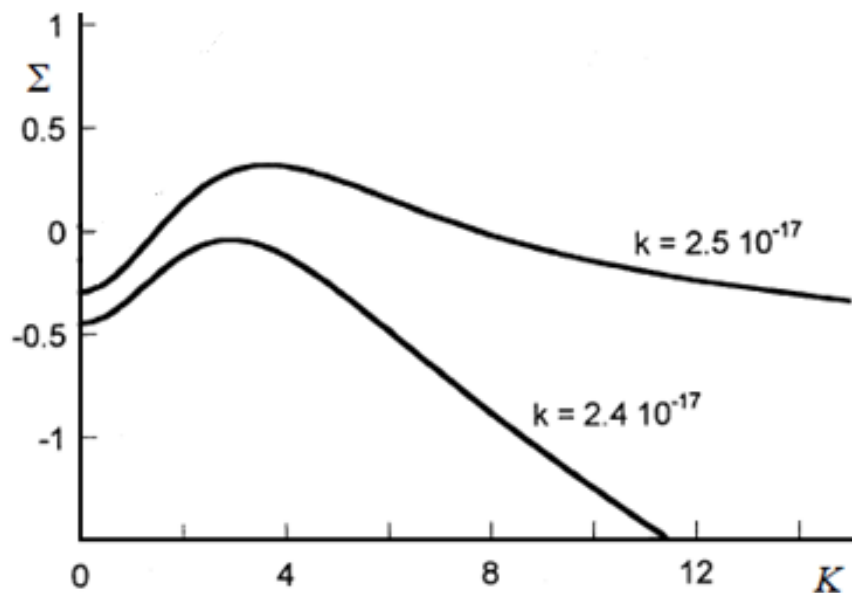
# Устойчивости слоя воды над слоем пара в геотермальной системе. Обобщение задачи Шуберта-Штрауса



Tsyarkin, Il'ichev, TiPM, 2004; , Il'ichev, Tsyarkin Eur. J. Mech. B/Fluid. 2005

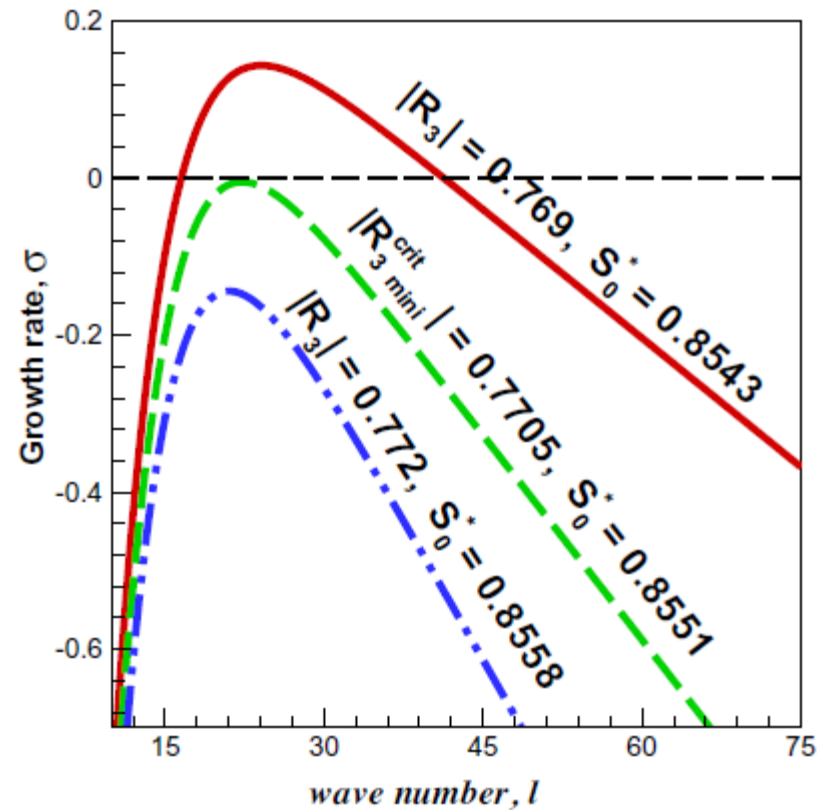
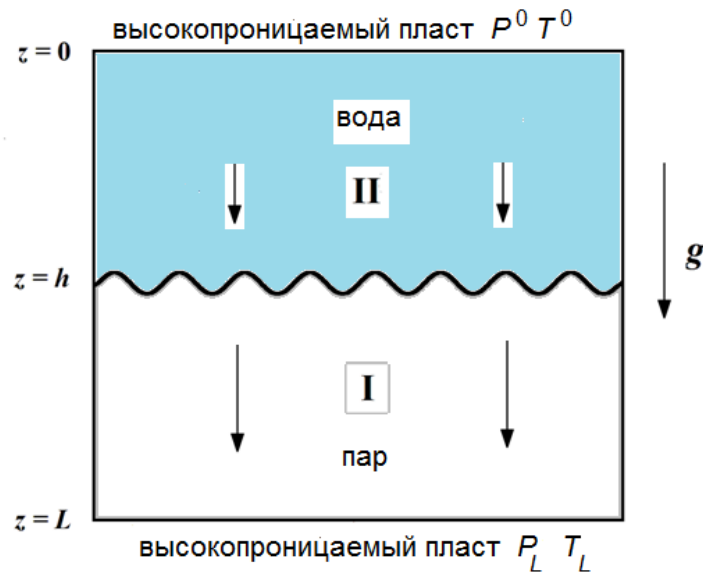
Устойчивое состояние физической системы при проницаемости  $k = 10^{-15} \text{ м}^2$

## Переход к неустойчивости при конечном волновом числе.



Tsyarkin, Il'ichev, TiPM, 2004; , Il'ichev, Tsyarkin Eur. J. Mech. B/Fluid. 2005

# Переход к неустойчивости при конечном волновом числе



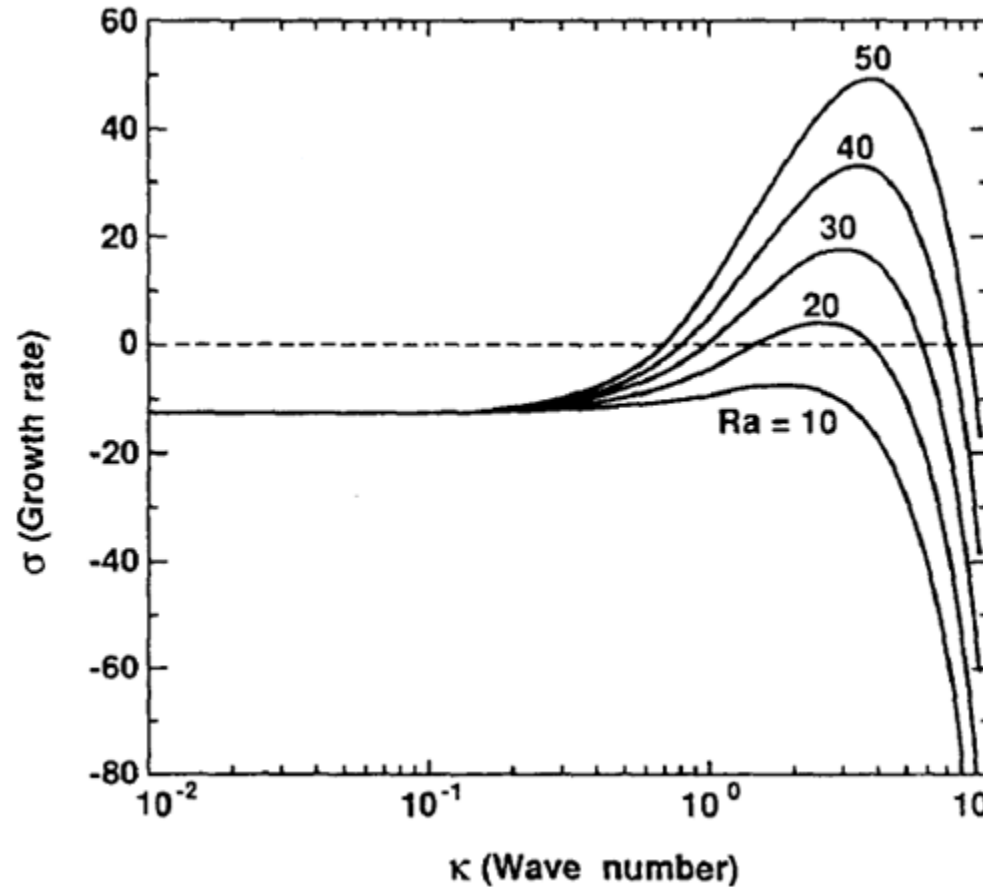
Z.H. Khan, D. Pritchard. IJHMT. 2013

$R_3$  – число Рэлея  $R_3 = k\rho^2 CgL/\lambda\mu$



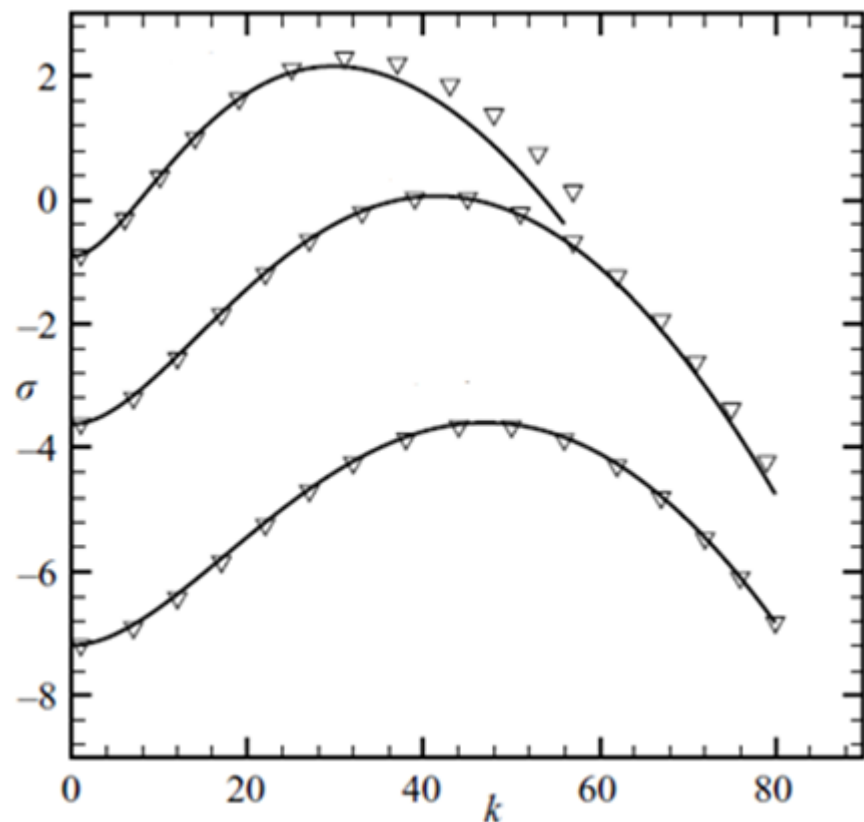
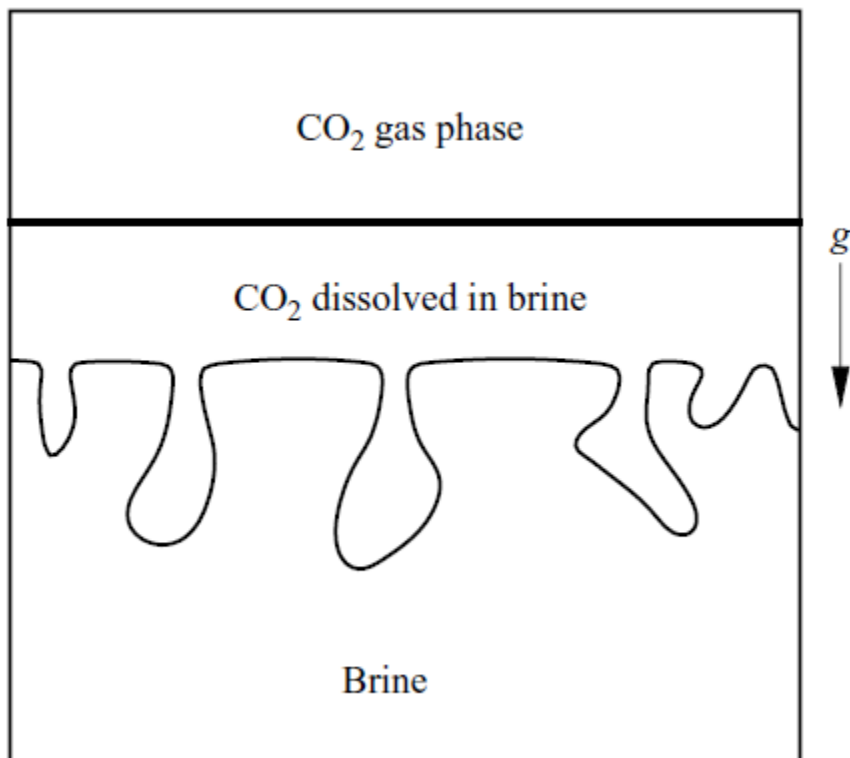
# Переход к неустойчивости при конечном волновом числе

Слой воды над слоем смеси пар-вода в  
геотермальном резервуаре



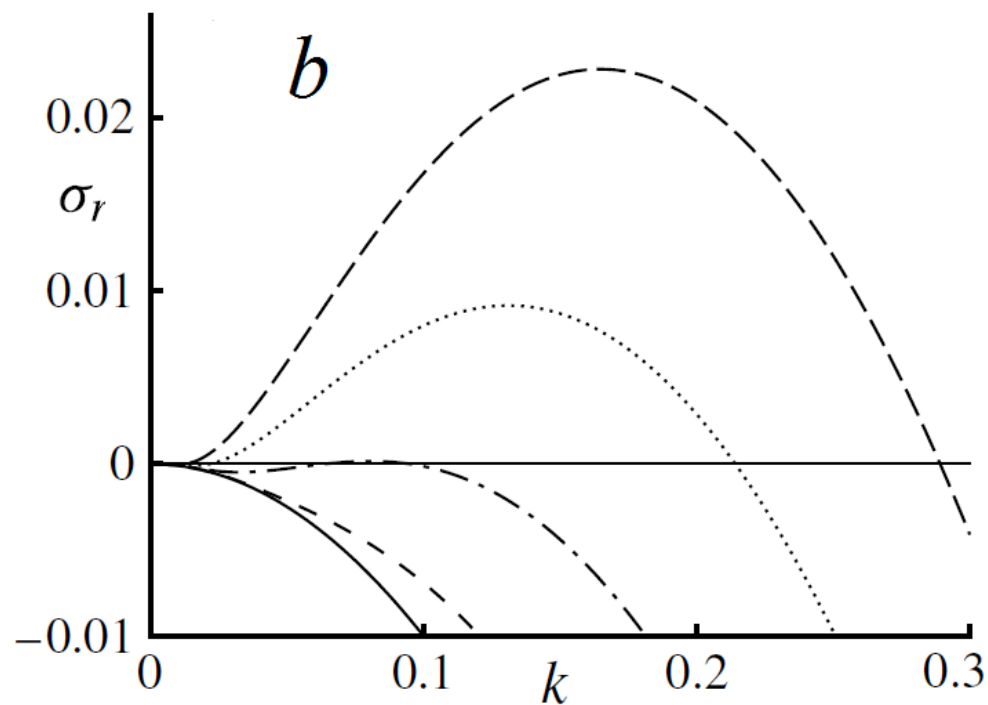
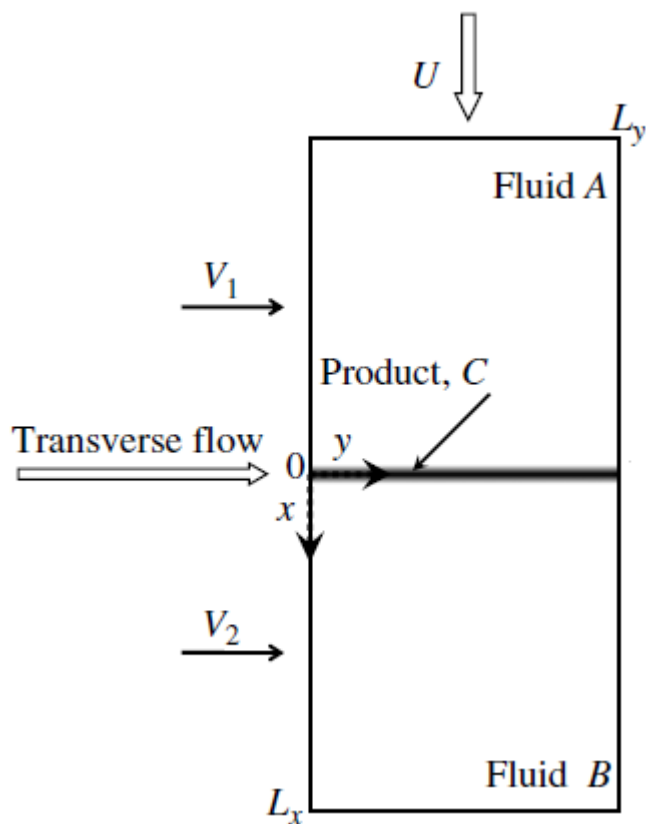
# Переход к неустойчивости при конечном волновом числе. Инжекция CO<sub>2</sub> в пласт, насыщенный раствором соли.

Riaz, M. Hesse, H. A. Tchelepi and F. M. Orr Jr., *Onset of convection in a gravitationally unstable diffusive boundary layer in porous media*  
J. Fluid Mech., 2006

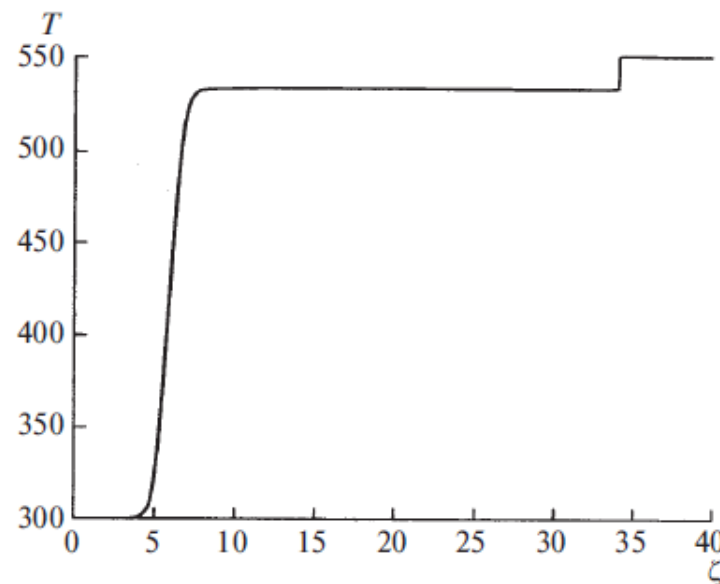
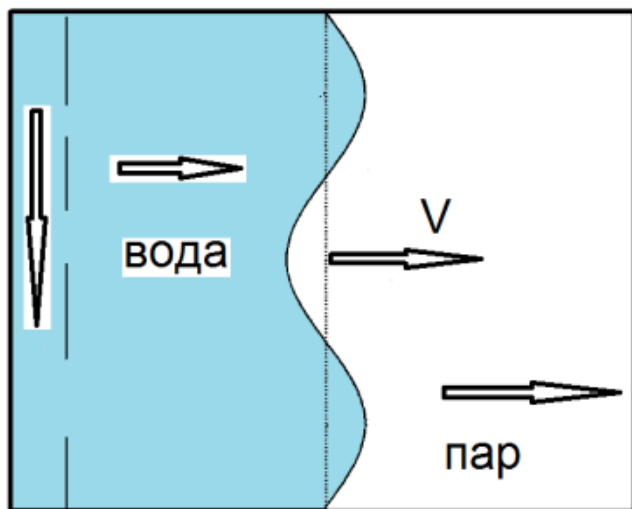


# Переход к неустойчивости при конечном волновом числе. Исследование устойчивого течения двух реагирующих жидкостей

S.H. Hejazi, J. Azaiez, Stability of reactive interfaces in saturated porous media under gravity in the presence of transverse flows J. Fluid Mech. 2012.



# Исследование устойчивости фронта кипения при инъекции воды в геотермальный резервуар, насыщенный паром



## ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

1. За фронтом образуется «полочка» температуры.  $T_2 = \text{const}$ , но  $\delta T_2 \neq 0$
2. При рассмотрении возмущений давления и температуры области за и перед фронтом бесконечны, а возмущения затухают на бесконечности.

## Основные уравнения и условия на поверхности фазового перехода

$$\phi \frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_j \mathbf{v}_j = 0, \quad \mathbf{v}_j = -\frac{k}{\mu_j} \operatorname{grad} P_j,$$

$$(\rho C)_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_j C_j \mathbf{v}_j \cdot \operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\lambda_j \operatorname{grad} T),$$

$$\lambda_{1,2} = \phi \lambda_j + (1 - \phi) \lambda_s, \quad (\rho C)_{1,2} = \phi \rho_j C_j + (1 - \phi) \rho_s C_s,$$

$$\rho_w = \rho_{w0} [1 + \alpha_w (P_w - P_0)], \quad P_w = \rho_v R T, \quad j = v, w.$$

На поверхности фазового перехода условия баланса массы, энергии, импульса и уравнение Клаузиуса–Клапейрона равновесия воды и пара

$$\phi \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n = \frac{k \rho_v}{\mu_v \rho_w} (\operatorname{grad} P_v)_{n1} - \frac{k}{\mu_w} (\operatorname{grad} P_w)_{n2}$$

$$\phi q \rho_v V_n + \frac{k q \rho_v}{\mu_v} (\operatorname{grad} P_v)_{n1} = \lambda_2 (\operatorname{grad} T)_{n2} - \lambda_1 (\operatorname{grad} T)_{n1}$$

$$\frac{P_*}{P_a} = \exp \left( A + \frac{B}{T_*} \right) \equiv f(T_*), \quad A = 12.512, \quad B = -4611.73 \text{ K} \quad T_+ = T_- = T_*, \quad P_+ = P_- = P_*$$



## Линеаризованная система основных уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a_{P1,2} \Delta P, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_{T1,2} \Delta T \quad a_{P1} = \frac{kP_0}{\phi \mu_v}, \quad a_{P2} = \frac{k}{\phi \mu_v \alpha}, \quad a_{T1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{(\rho C)_{1,2}}$$

## Стационарное решение в виде бегущей волны

$$2 - \left( \frac{P_*}{P_0} \right) - \frac{\lambda_1 T_0}{\phi q \rho_v a_{T1}} \left( \frac{T_*}{T_0} - 1 \right) = 0 \quad 1 + \frac{\rho_v}{\rho_w} \left( \frac{P_*}{P_0} - 2 \right) + \frac{a_{P0}}{P_0} \frac{\nabla P_-}{V} = 0, \quad a_{P0} = \frac{kP_0}{\phi \mu_w}$$

$$P_*, T_*$$

## Метод нормальных мод

$$P_i = P_i(\xi, z, t) = P_{ist} + \delta P_i, \quad T_i = T_i(\xi, z, t) = T_{ist} + \delta T_i, \quad \eta = \eta(z, t)$$

$$\delta P_{1,2} = P'_{1,2}(\xi) \exp(i\kappa z + \sigma t), \quad \delta T_{1,2} = T'_{1,2}(\xi) \exp(i\kappa z + \sigma t), \quad \eta = \eta' \exp(i\kappa z + \sigma t), \quad \eta' = \text{const}$$

$$a_{P1,2} \frac{d^2 P'_{1,2}}{d\xi^2} + V \frac{dP'_{1,2}}{d\xi} - (a_{P1,2} \kappa^2 + \sigma) P'_{1,2} = 0 \quad a_{T1,2} \frac{d^2 T'_{1,2}}{d\xi^2} + V \frac{dT'_{1,2}}{d\xi} - (a_{T1,2} \kappa^2 + \sigma) T'_{1,2} = 0$$

$$P'_1 = d_1 \exp \left[ -\frac{V}{2a_{P1}} - \sqrt{\frac{V^2}{4a_{P1}^2} + \frac{\sigma}{a_{P1}} + \kappa^2} \right] \xi$$

$$T'_1 = e_1 \exp \left[ -\frac{V}{2a_{T1}} - \sqrt{\frac{V^2}{4a_{T1}^2} + \frac{\sigma}{a_{T1}} + \kappa^2} \right] \xi$$

$$P'_2 = d_2 \exp \left[ -\frac{V}{2a_{P2}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{P2}^2} + \frac{\sigma}{a_{P2}} + \kappa^2} \right] \xi$$

$$T'_2 = e_2 \exp \left[ -\frac{V}{2a_{T2}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{T2}^2} + \frac{\sigma}{a_{T2}} + \kappa^2} \right] \xi$$

# Однородная система 5 уравнений для $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \eta'$

$$d_1 - d_2 = \left[ \nabla P_- + \frac{V}{a_{P1}} (P_* - P_0) \right] \eta',$$

$$e_1 - e_2 = \frac{V}{a_{T1}} (T_* - T_0) \eta',$$

$$d_1 - \frac{df}{dT} e_2 = \frac{V}{a_{P1}} (P_* - P_0) \eta',$$

$$\begin{aligned} & \left[ \phi \left( 1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \sigma - \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{V^2}{a_{P1}^2} (P_* - P_0) \right] \eta' + \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} d_1 \left( \frac{V}{2a_{P1}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{P1}^2} + \frac{\sigma}{a_{P1}} + \kappa^2} \right) + \\ & + \frac{k}{\mu_w} d_2 \left( -\frac{V}{2a_{P2}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{P2}^2} + \frac{\sigma}{a_{P2}} + \kappa^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \phi q \rho_v \sigma + \frac{k q \rho_v}{\mu_v} \frac{V^2}{a_{P1}^2} (P_* - P_0) + \lambda_1 \frac{V^2}{a_{T1}^2} (T_* - T_0) \right] \eta' - d_1 \frac{k q \rho_v}{\mu_v} \left( \frac{V}{2a_{P1}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{P1}^2} + \frac{\sigma}{a_{P1}} + \kappa^2} \right) - \\ & - e_2 \lambda_2 \left( -\frac{V}{2a_{T2}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{T2}^2} + \frac{\sigma}{a_{T2}} + \kappa^2} \right) - e_1 \lambda_1 \left( \frac{V}{2a_{T1}} + \sqrt{\frac{V^2}{4a_{T1}^2} + \frac{\sigma}{a_{T1}} + \kappa^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

## Дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
 & [\alpha_1 \Sigma + \alpha_2 (\Gamma_1 - 1) - \alpha_3 \Gamma_2] [\Gamma_3 + \Gamma_4 + \alpha_4 \Gamma_1] + \quad \Sigma = a_{T1} \sigma / V^2 \\
 & + \frac{dF}{dT} [\alpha_5 \Sigma + \alpha_6 (1 - \Gamma_1) + \alpha_7 (1 - \Gamma_4)] [\alpha_8 \Gamma_1 + \alpha_9 \Gamma_2] = 0 \quad K = a_{T1} \kappa / V
 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{a_{T1}}{a_{P1}} \left( \frac{P_*}{P_0} - 1 \right), \quad \alpha_3 = \frac{a_{T1}}{a_{P1}} a_{P0} \frac{\nabla P_-}{P_0 V}$$

$$\alpha_4 = \frac{\phi q \rho_v}{\lambda_1 T_0} a_{T1} \frac{dF}{dT}, \quad \alpha_5 = \frac{\phi q \rho_v}{\lambda_1 T_0} a_{T1}, \quad \alpha_6 = \frac{a_{T1}}{a_{P1}} \frac{\phi q \rho_v}{\lambda_1 T_0} a_{T1} \left( \frac{P_*}{P_0} - 1 \right)$$

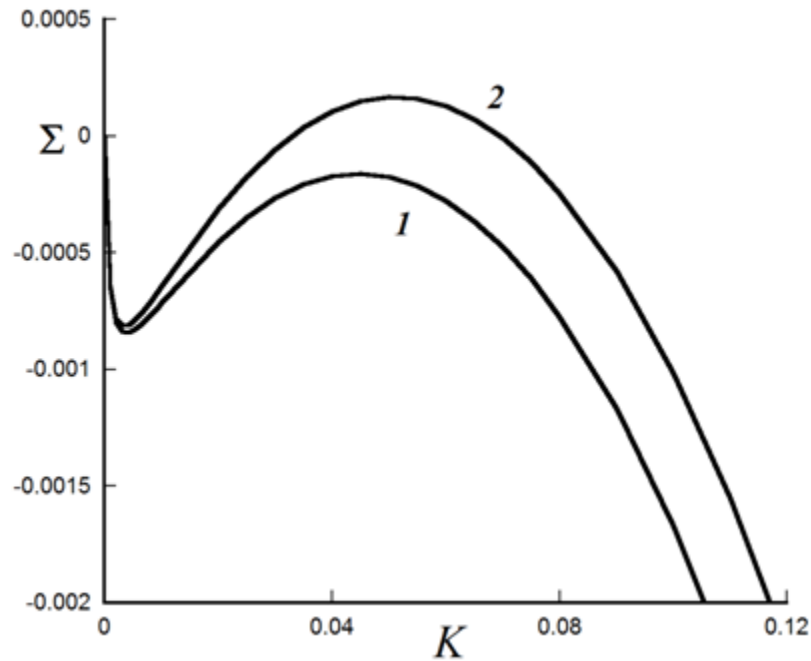
$$\alpha_7 = \left( \frac{T_*}{T_0} - 1 \right), \quad \alpha_8 \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad \alpha_9 = \frac{a_{P0}}{a_{P1}}, \quad \frac{dF}{dT} = \frac{df/P_0}{dT/T_0}$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a_{P1}}{a_{T1}} \Sigma + \frac{a_{P1}^2}{a_{T1}^2} K^2}, \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a_{P2}}{a_{T1}} \Sigma + \frac{a_{P2}^2}{a_{T1}^2} K^2}$$

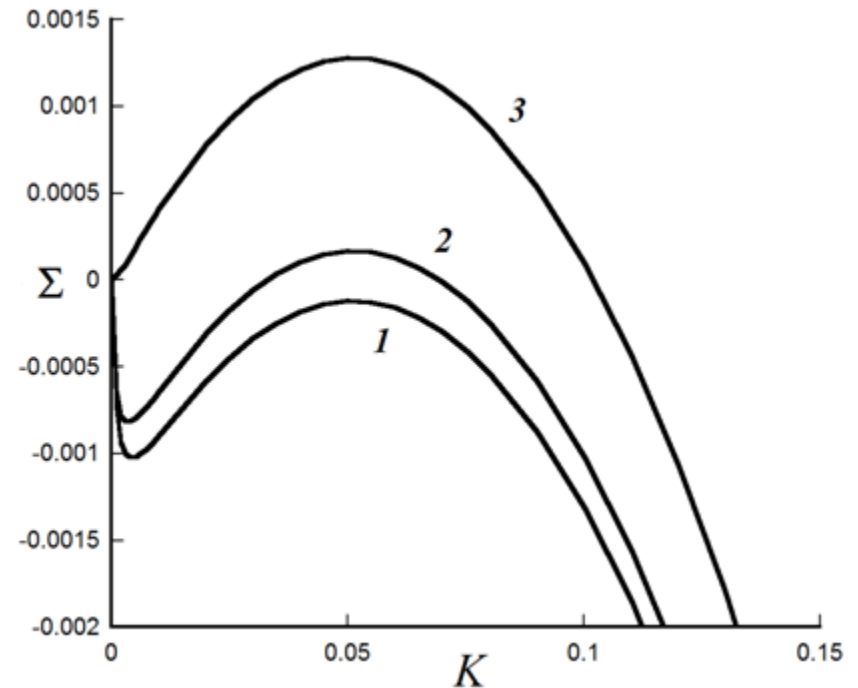
$$\Gamma_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a_{T2}}{a_{T1}} \Sigma + \frac{a_{T2}^2}{a_{T1}^2} K^2}, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \Sigma + K^2}$$

# Дисперсионные кривые

## Переход к неустойчивости при конечном волновом числе



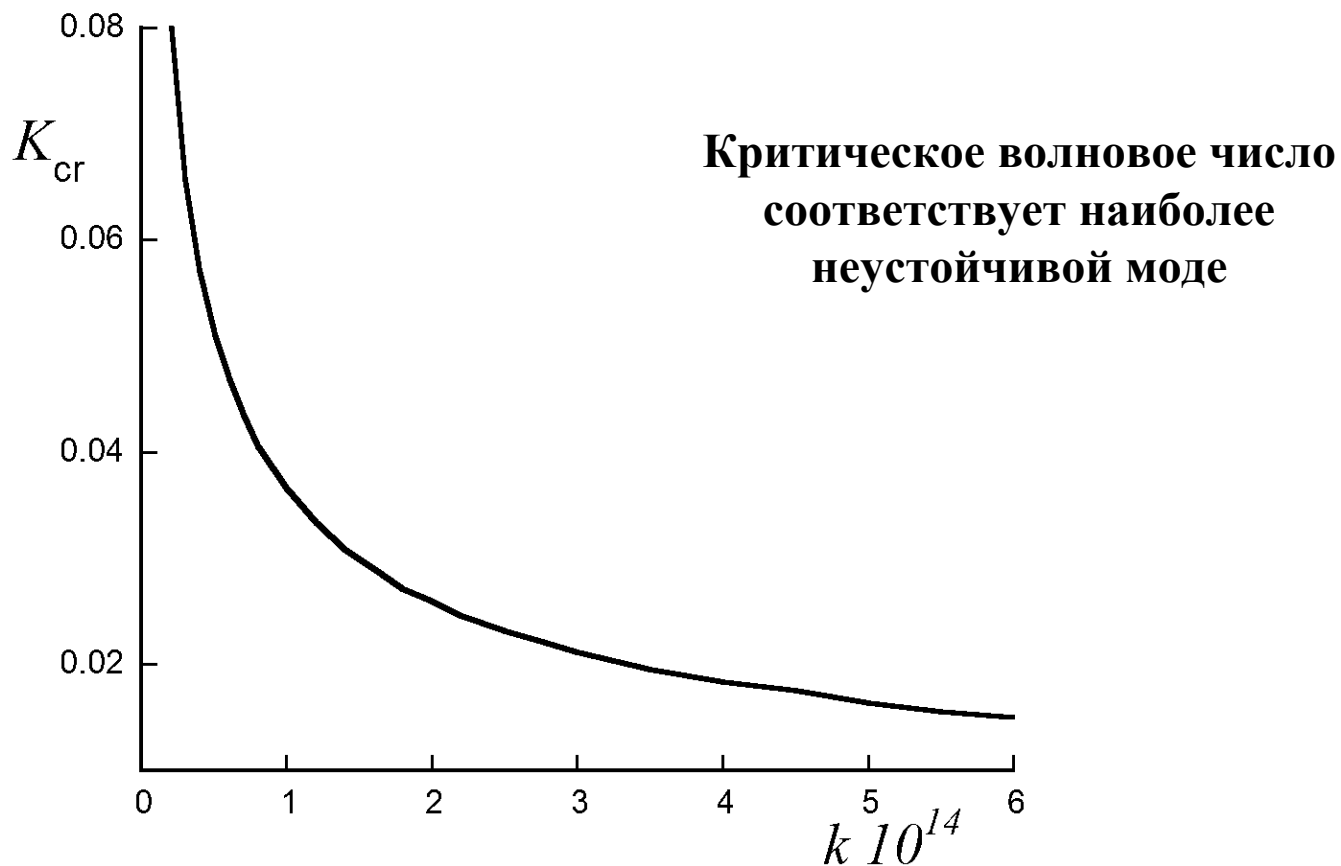
$\phi = 0.2, k = 5 \times 10^{-15} \text{ m}, P_0 = 1.3 \times 10^6 \text{ Pa};$   
 1, 2:  $T_0 = 579, 580 \text{ K}.$



$\phi = 0.2, P_0 = 1.3 \times 10^6 \text{ Pa}, T = 580 \text{ K};$   
 1–3:  $k = 4 \times 10^{-15}, 5 \times 10^{-15}, 10^{-13} \text{ m}^2.$

Критическое волновое число  $K_{cr}$  - значение  $K$ , при котором дисперсионная кривая касается оси  $\Sigma = 0$ . Число  $K_{cr}$  зависит от параметров задачи.

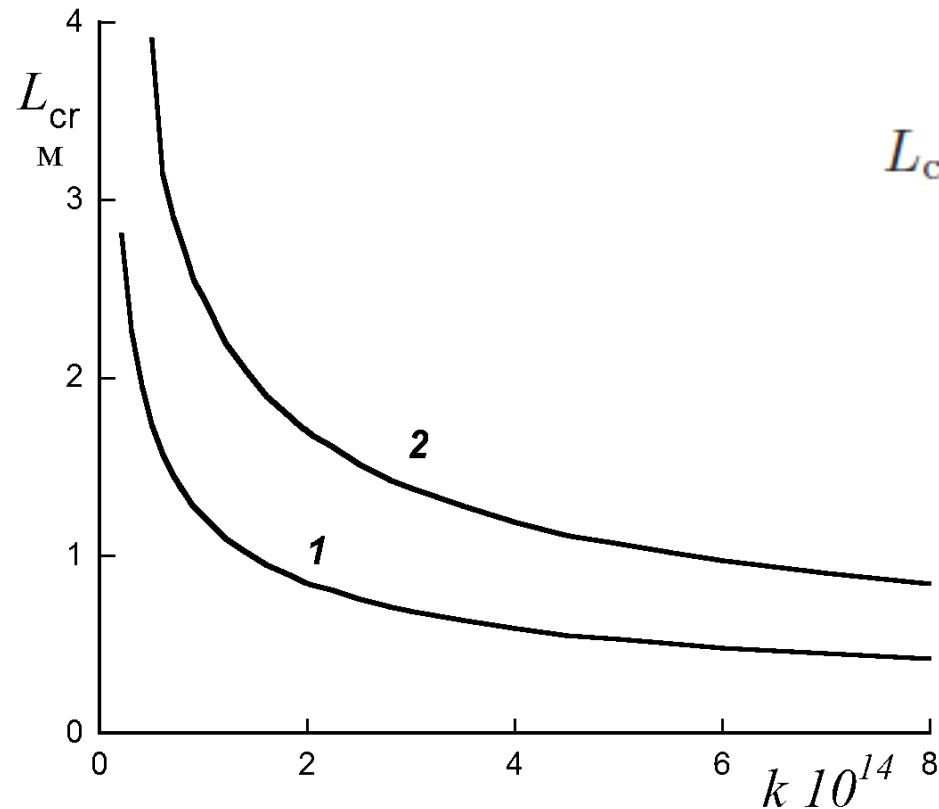
# Зависимость критического волнового числа от проницаемости



$$\phi = 0.2, T_0 = 570 \text{ K.}$$



## Зависимость характерного масштаба наиболее неустойчивого возмущения от проницаемости

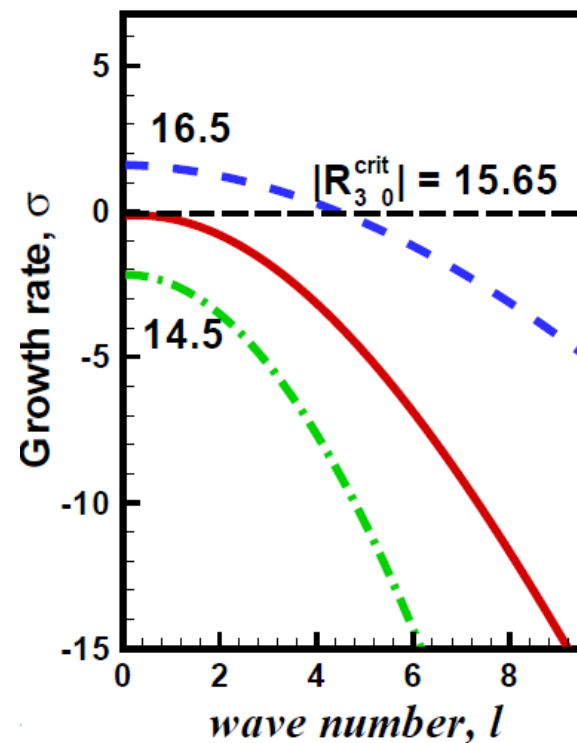
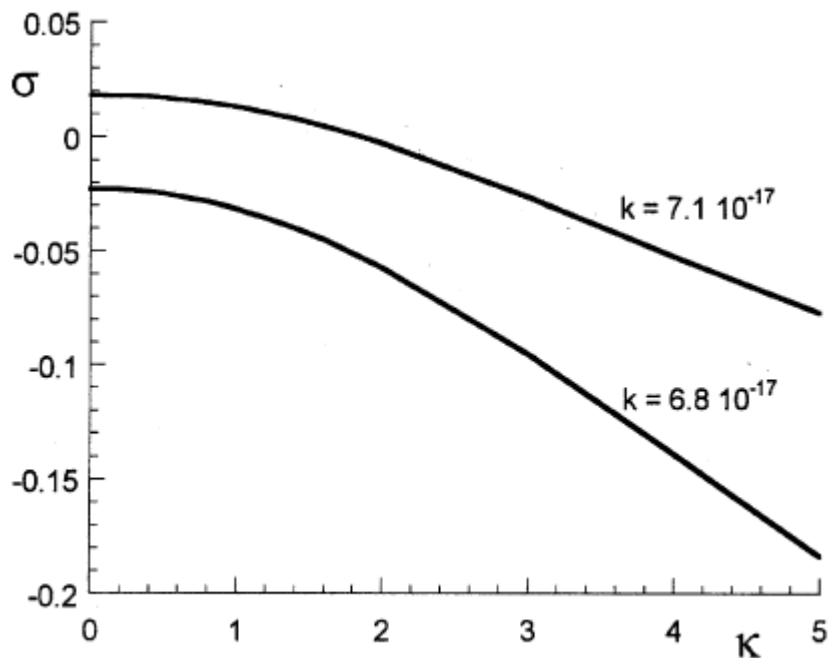


$$L_{cr} = \frac{\pi}{\kappa} = \frac{\pi a_{T1}}{K_{cr} V}$$

$\nabla P_- = 10^5$  Па/м (кривая 1) и  $\nabla P_- = 5 \cdot 10^4$  Па/м (кривая 2) в области за фронтом.  $\phi = 0.2$ ,  $T_0 = 570$  К.

# Возможные типы переходов к неустойчивости и нарушения равновесия системы вода над паром.

Переход к неустойчивости при нулевом волновом числе.

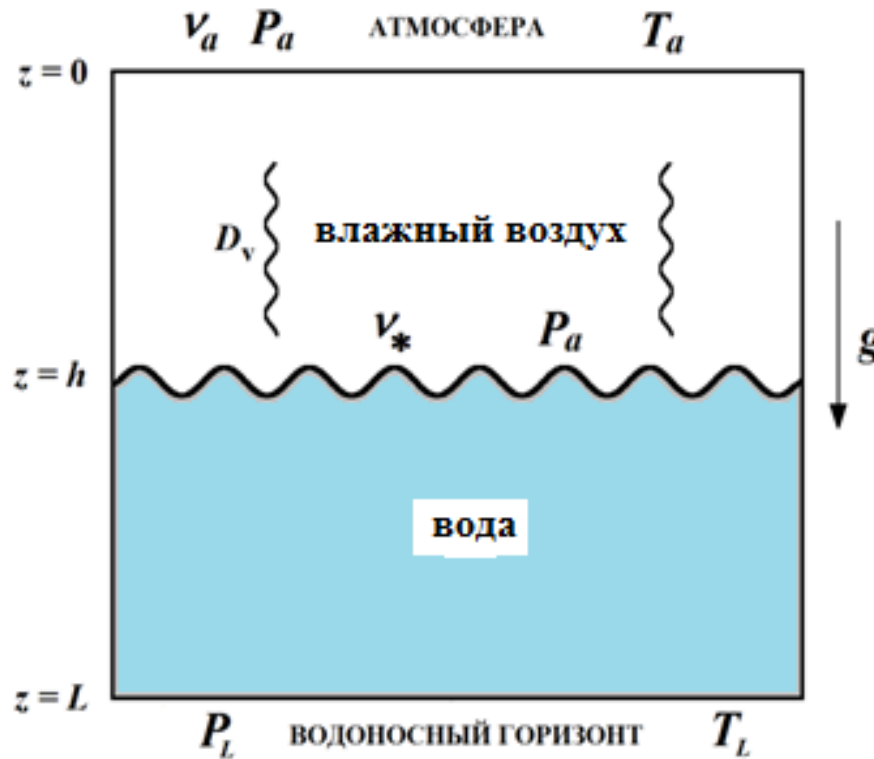


Tsyarkin, Il'ichev, TiPM, 2004; , Il'ichev,  
Tsyarkin Eur. J. Mech. B/Fluid. 2005

Z.H. Khan, D. Pritchard. IJHMT. 2013  
R3 - Rayleigh number  $R3 = k\rho^2 CgL/\lambda\mu$

# Неустойчивость в грунтах и породах.

## Переход к неустойчивости при нулевом волновом числе.



+

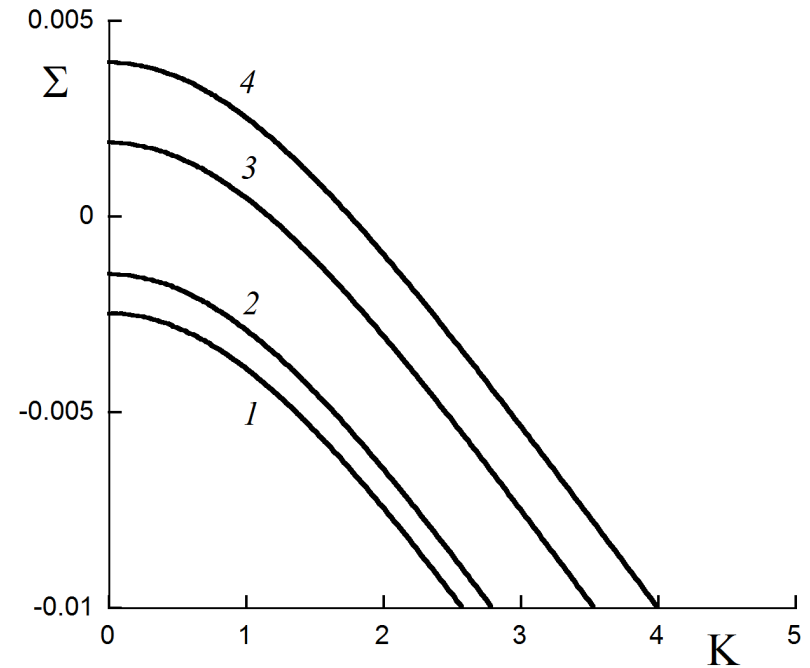
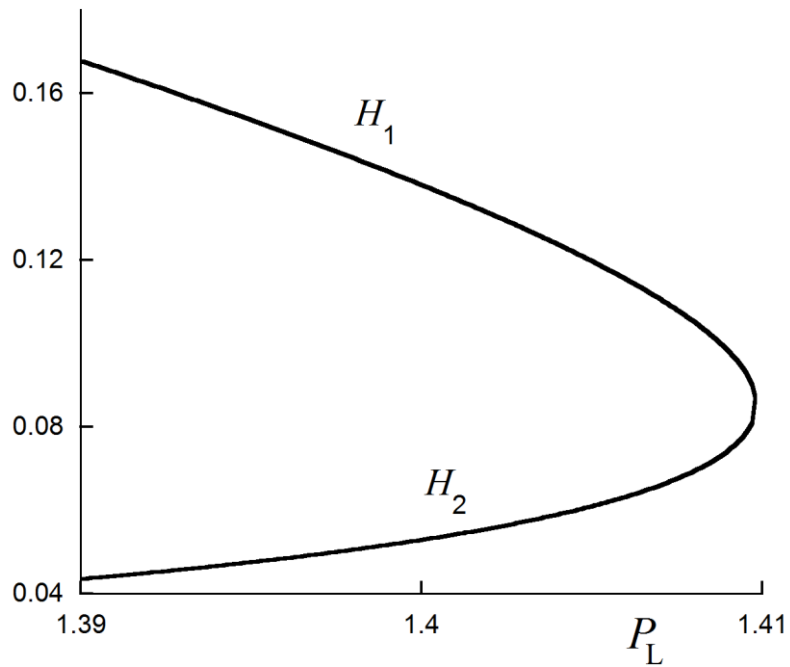
Задача - слой  
воды над  
слоем  
воздуха

Цыпкин, МЖГ, 2017

Цыпкин, Ильичев ДАН, 2007  
Shargatov, Il'ichev, Tsypkin IJHMT. 2015

# Неустойчивость в грунтах и породах.

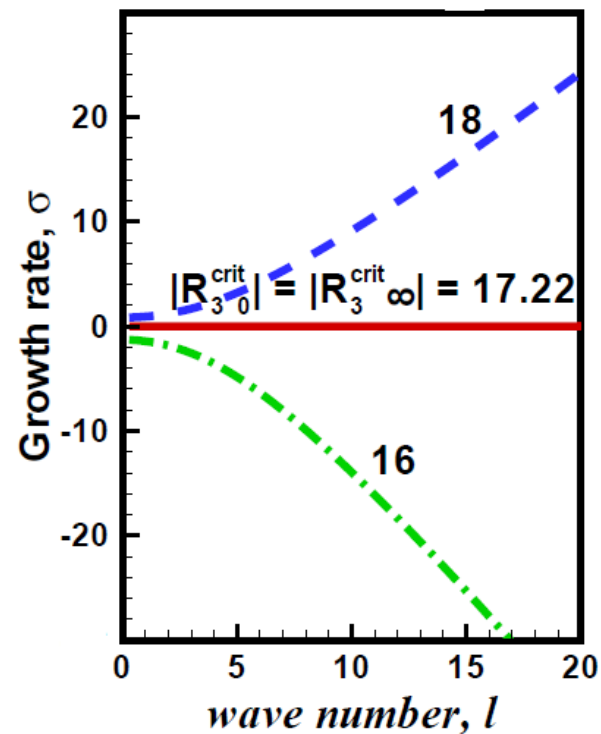
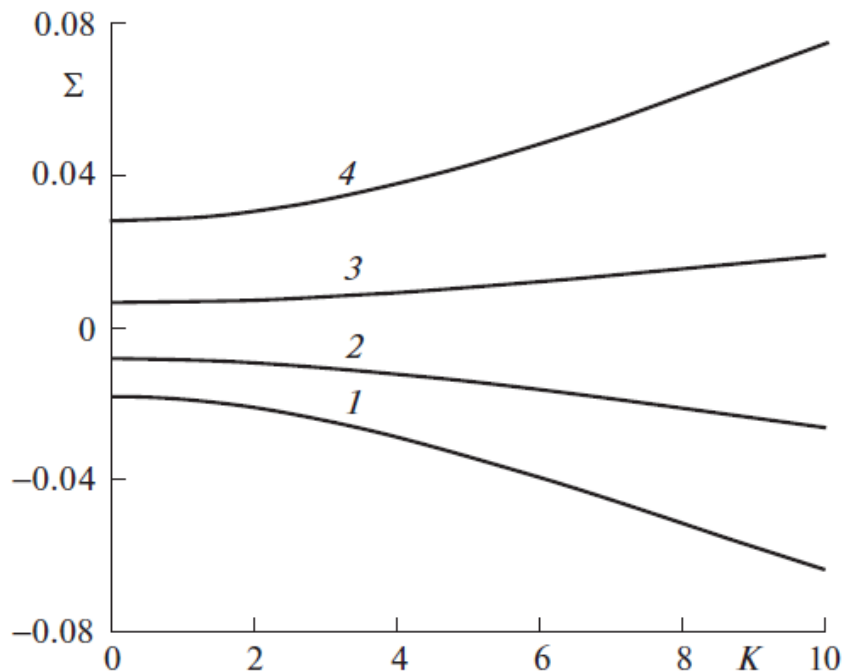
## Переход к неустойчивости при нулевом волновом числе.



Исчезновение базового решения при слиянии устойчивого и неустойчивого решения

# Возможные типы переходов к неустойчивости и нарушения равновесия системы вода над паром.

## Спонтанный переход к коротковолновой неустойчивости .



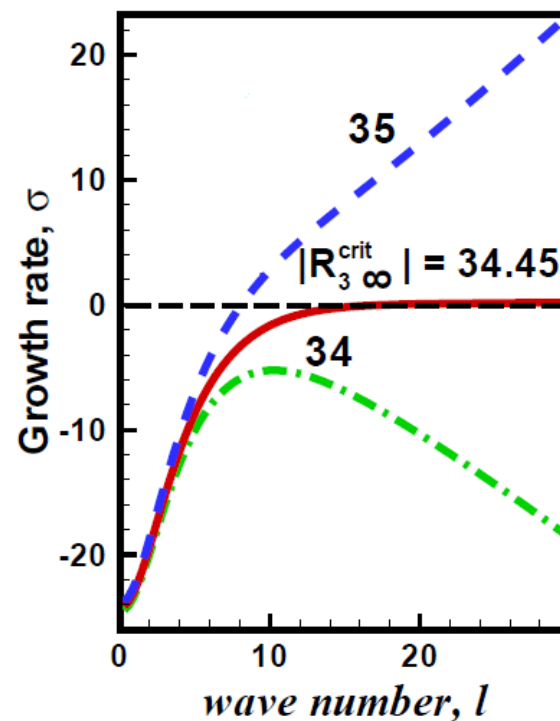
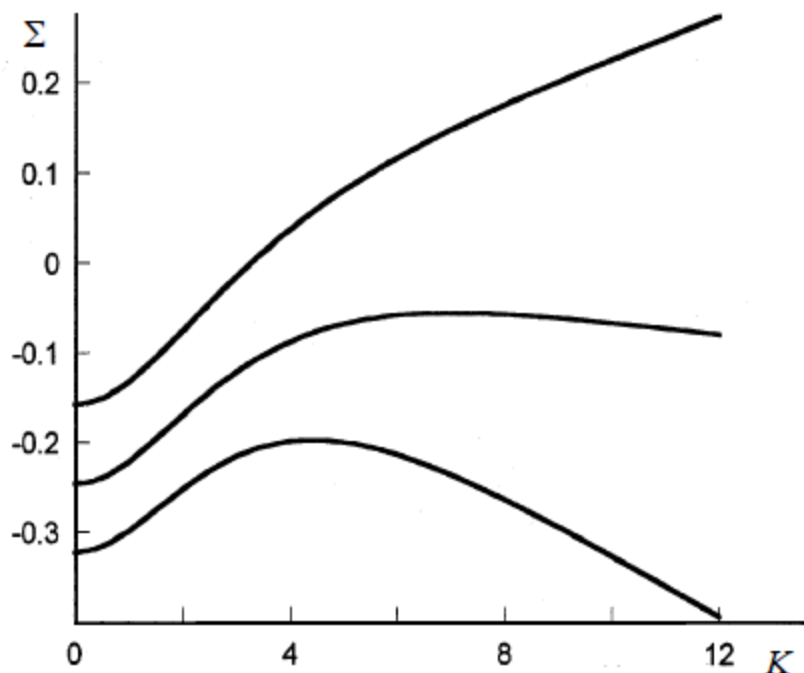
Tsyarkin, Il'ichev, TiPM, 2004; , Il'ichev,  
Tsyarkin Eur. J. Mech. B/Fluid. 2005

Z.H. Khan, D. Pritchard. IJHMT. 2013  
R3 – число Рэлея  $R3 = k\rho^2 CgL/\lambda\mu$



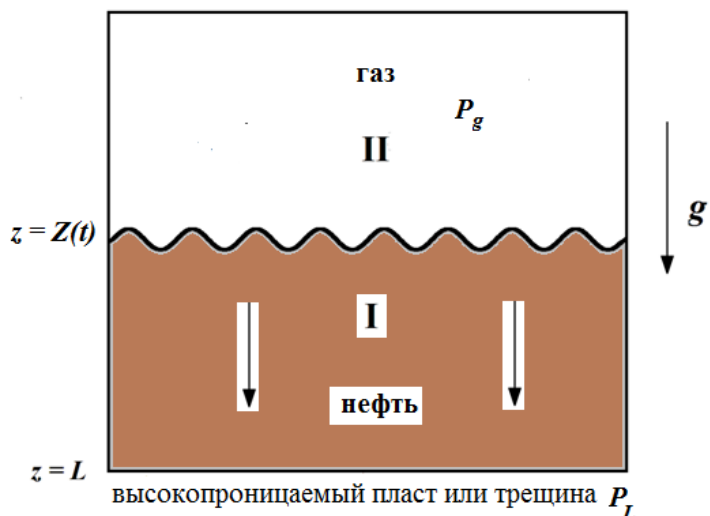
# Возможные типы переходов к неустойчивости и нарушения равновесия системы вода над паром.

Переход к неустойчивости при бесконечно больших волновых числах.



Иlichev, Tsypkin Trans. Por. Media. 2004; Eur. J. Mech. B Fluids, 2005;  
Цыпкин, Ильичев ДАН, 2007; Khan, Pritchard ИЖМТ, 2013, 2014; Shargatov,  
Иlichev, Tsypkin ИЖМТ, 2015; Цыпкин, МЖГ, 2017 и др.

# Устойчивость поверхности раздела при добычи нефти из месторождения с газовой шапкой. Приближение Бринкмана



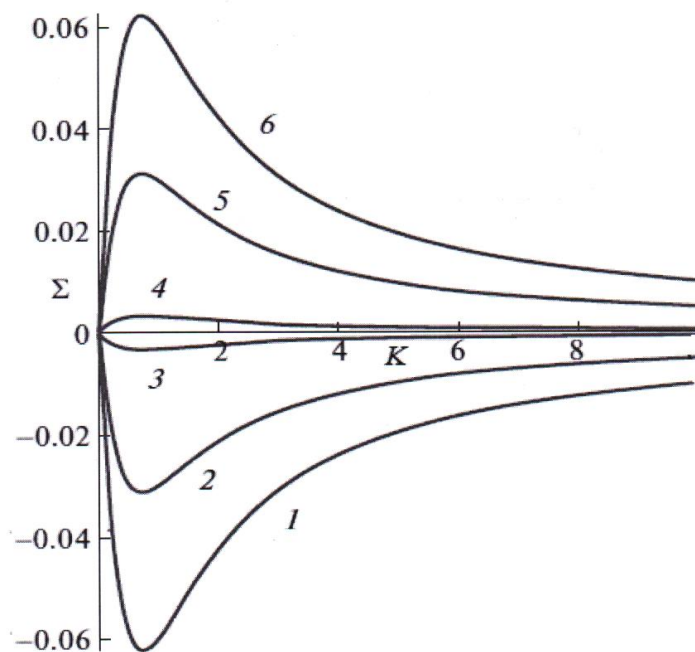
$$-\nabla (P + \rho g z) + \mu_e \Delta \vec{V} - \frac{\mu}{k} \vec{V} = 0$$

$$\mu_e = \mu / \phi$$

$$L_{cr} \leq 10^{-4} \text{ м}$$

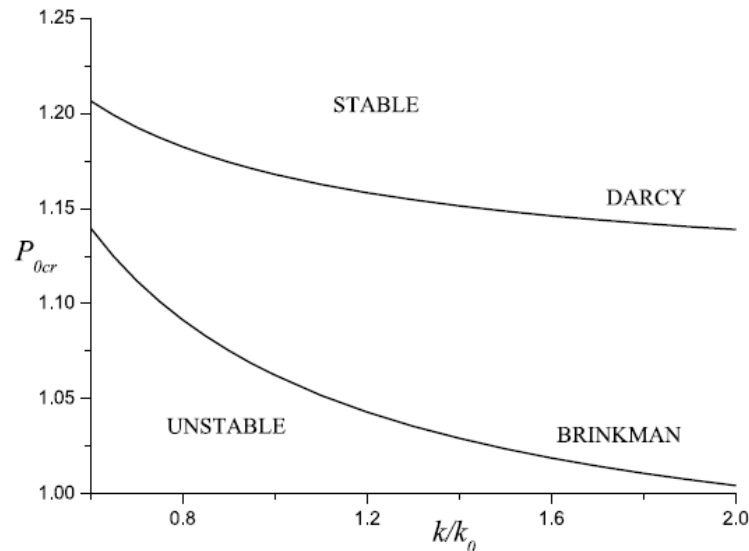
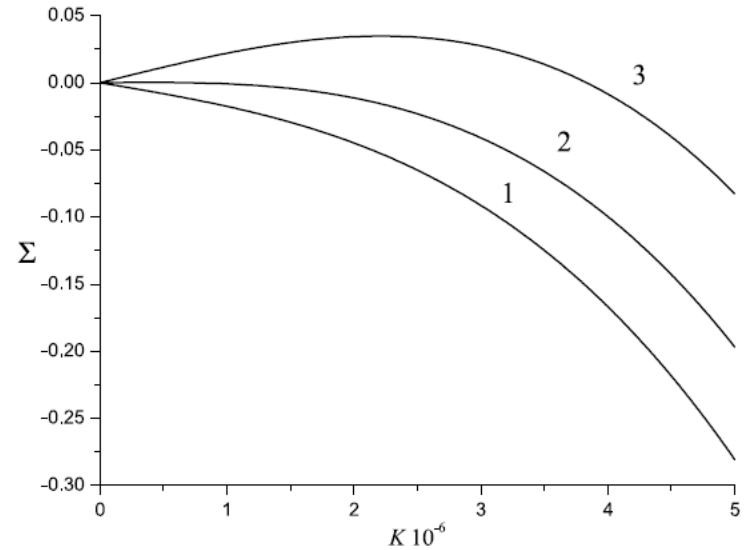
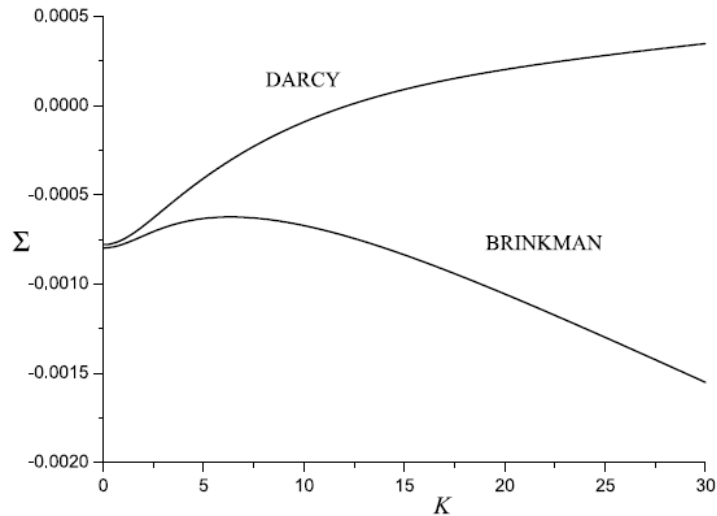
Размер поры в песчанике =  $10^{-4}$  м

Неустойчивость  $P_L < P_g$ ,  
для Дарси коротковолновая неустойчивость  
в приближении Бринкмана – спонтанная  
наиболее быстро растущее возмущение  
имеет конечный размер.



Цыпкин, Шаргатов МЖГ, 2022

# Устойчивость поверхности раздела, когда слой воды расположен над слоем влажного воздуха в горных породах. Приближение Бринкмана

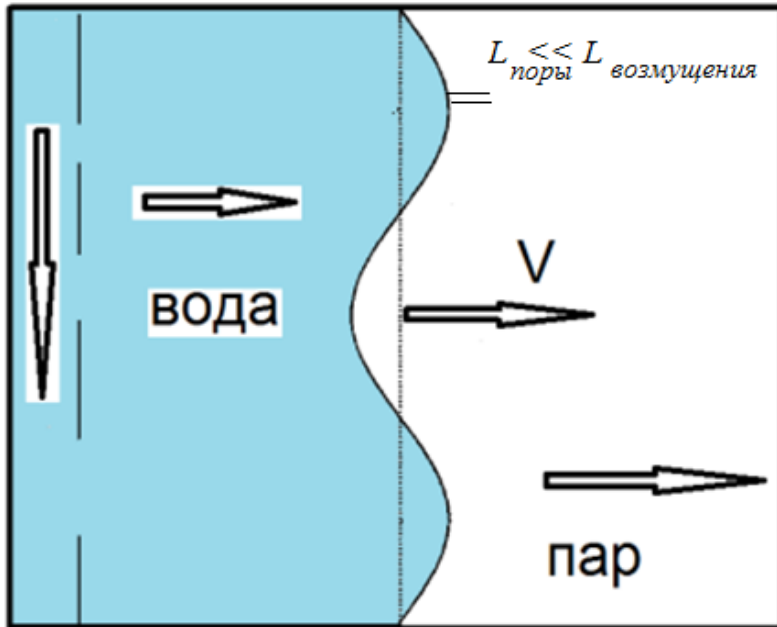


Il'ichev, Tsyarkin TiMP. 2023

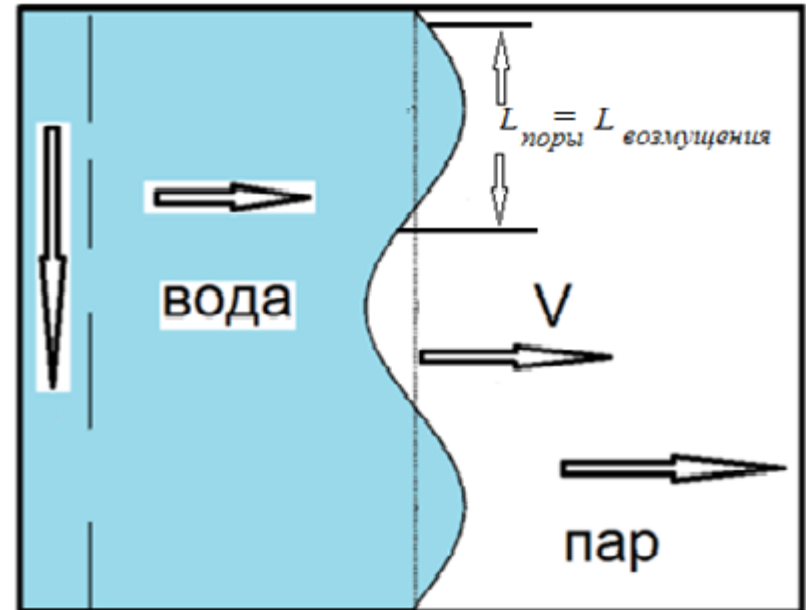
$$L_{cr} \leq 10^{-4} \text{ м}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

$$\Sigma \rightarrow +\infty \text{ при } K \rightarrow +\infty ?$$



Макроскопические пальцы



Одни поры (каналы) заполняются водой, другие – паром. Образование двухфазного течения в зоне смеси пар – вода.

$$L_{\text{поры}} < L_{\text{возмущения}}$$

**Методы микромеханики в случае возмущений малого масштаба**