

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА: СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

А.В. Аксенов¹, А.Д. Полянин²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

«Математические методы механики». Конференция, посвященная
памяти академика А.Г. Куликовского.

Математический институт им. В.А. Стеклова, 18 марта 2025 г.

1. Введение

В плазменной электронной магнитной гидродинамике разработан подход, в котором электронная составляющая плазмы представлена в виде набора случайных или регулярно распределенных точечных электронных вихрей. Локальные нестационарные движения в соответствующей двумерной вихревой системе описываются сильно нелинейным уравнением^{1,2,3}

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2.$$

Уравнение Крылова⁴

$$u_t(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = \sigma,$$

где σ ($\sigma < 0$) – произвольная постоянная.

¹Smirnov V.V., Chukbar K.V. *J. Experimental & Theoretical Physics*. 2001. V. 93. No. 1. 126–135.

²Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V. *Plasma Physics Reports*. 2014. V. 30. No. 3. 214–217.

³Ohkitani K., Sultu F. Al. *J. Physics A: Math. & Theor.* 2013. V. 46. No. 20. 205501. 19 pp.

⁴Крылов Н.В. *Сиб. матем. журн.*. 1976. Т. 17. № 2. 290–303.

В докладе будет рассмотрено обобщенное нестационарное уравнение магнитной гидродинамики с нелинейностью типа Монжа–Ампера относительно старших производных по пространственным переменным и степенной нелинейностью производной по времени

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \sigma(u_t)^m, \quad \sigma \neq 0, \quad (1.1)$$

где m, σ — константы.

Однородное уравнение Монжа — Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

имеет решение

$$u = f(ax + by),$$

где $f = f(z)$ — произвольная функция. Решение $ax + by$ является функционально-инвариантным решением.

Нестационарные уравнения типа Монжа — Ампера, как и стационарные уравнения типа Монжа — Ампера, имеет свойства, необычные для более простых квазилинейных уравнений, которые линейны относительно старших производных. В частности, в отличие от подавляющего большинства других уравнений математической физики, которые не зависят явно от независимых переменных, они не имеют простых решений типа бегущей волны $u = U(ax + by + ct)$ и более сложных «двумерных» решений вида $u = V(ax + by, t)$, где a, b, c — произвольные постоянные, $U' \not\equiv 0$ и $V_t \not\equiv 0$.

В данной работе основное внимание уделено построению точных решений уравнения (1.1).

Под точными решениями нелинейных уравнений с частными производными понимаются решения, которые выражаются:

- (а) через элементарные функции;
- (б) через элементарные функции и неопределённые интегралы (решения в квадратурах);
- (с) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем ОДУ.

Под редукциями рассматриваемого уравнения обычно понимаются уравнения меньшей размерности или более низкого порядка, все решения которых являются решениями данного уравнения.

Редукции играет ключевую роль в построении точных решений дифференциальных уравнений и приводят к более простым уравнениям. Для нелинейных уравнений в частных производных наиболее важными являются одномерные редукции, с помощью которых можно выразить их решения через решения гораздо более простых обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Симметрии формулы размножения решений нестационарного уравнения типа Монжа — Ампера

Операторы симметрии уравнения (1.1) ищем в виде

$$X = \xi^1(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, y, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2.1)$$

2.1. Основной случай при $m \neq 2$

Применяя критерий инвариантности⁴, получим следующую переопределенную линейную однородную систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_t^1 &= 0, & \xi_u^1 &= 0, & \xi_t^2 &= 0, & \xi_u^2 &= 0, \\ \xi_x^3 &= 0, & \xi_y^3 &= 0, & \xi_u^3 &= 0, \\ \eta_t &= 0, & \eta_u + \frac{2\xi_x^1 + 2\xi_y^2 - m\xi_t^3}{m-2} &= 0, \\ \xi_{xx}^1 &= 0, & \xi_{xy}^1 &= 0, & \xi_{yy}^1 &= 0, \\ \xi_{xx}^2 &= 0, & \xi_{xy}^2 &= 0, & \xi_{yy}^2 &= 0, \\ \xi_{tt}^3 &= 0, & \eta_{xx} &= 0, & \eta_{xy} &= 0, & \eta_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

⁴Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.

Решение системы уравнений (2.2) дается формулами

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3, \\ \xi^2 &= \alpha_4 x + \alpha_5 y + \alpha_6, \\ \xi^3 &= \alpha_7 t + \alpha_8, \\ \eta &= \frac{mc_7 - 2(\alpha_1 + \alpha_5)}{m - 2} u + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \alpha_{11},\end{aligned}$$

где α_j ($j = 1, \dots, 11$) — произвольные постоянные.

Утверждение 1. *Базис алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1.1) при $m \neq 2$ имеет вид*

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= x \frac{\partial}{\partial y}, & X_7 &= x \frac{\partial}{\partial u}, & X_8 &= y \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_9 &= x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}, & X_{10} &= y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_{11} &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{mu}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}$$

Из утверждения 1 следует:

Утверждение 2. При $m \neq 2$ преобразование

$$\begin{aligned}\bar{x} &= a_1x + b_1y + c_1, \quad \bar{y} = a_2x + b_2y + c_2, \quad \bar{t} = pt + q, \quad p \neq 0, \\ \bar{u} &= ku + a_3x + b_3y + c_3, \\ k &= p |p|^{\frac{2}{m-2}} |a_1b_2 - a_2b_1|^{-\frac{2}{m-2}}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, p, q$ — произвольные постоянные, преобразует уравнение (1.1) в себя.

Одиннадцатипараметрическое преобразование (2.3) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (1.1) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = \Phi(x, y, t)$ — решение уравнения (1.1) при $m \neq 2$, то функция

$$u = \frac{1}{k} [\Phi(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2, pt + q) - (a_3x + b_3y + c_3)]$$

также является решением этого уравнения.

2.2. Симметрии уравнения (1.1) в специальном случае при $m = 2$

Операторы симметрии уравнения (1.1) при $m = 2$, как и ранее, ищем в виде (2.1). Используя критерий инвариантности, в этом случае приходим к переопределенной системе определяющих уравнений

$$\begin{aligned}\xi_t^1 &= 0, & \xi_u^1 &= 0, & \xi_t^2 &= 0, & \xi_u^2 &= 0, \\ \xi_x^3 &= 0, & \xi_y^3 &= 0, & \xi_u^3 &= 0, & \xi_x^1 + \xi_y^2 - \xi_t^3 &= 0, \\ \eta_t &= 0, & \xi_{xx}^1 &= 0, & \xi_{xx}^2 &= 0, & \xi_{xy}^2 &= 0, & \xi_{yy}^2 &= 0, \\ \xi_{tt}^3 &= 0, & \eta_{xx} &= 0, & \eta_{xy} &= 0, & \eta_{yy} &= 0, \\ \eta_{xu} &= 0, & \eta_{xu} &= 0, & \eta_{uu} &= 0.\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3, \\ \xi^2 &= \alpha_4 x + \alpha_5 y + \alpha_6, \\ \xi^3 &= (\alpha_1 + \alpha_5)t + \alpha_7, \\ \eta &= \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} u + \alpha_{11},\end{aligned}$$

где α_j ($j = 1, \dots, 11$) — произвольные постоянные.

Утверждение 3. *Базис алгебры Ли операторов симметрии уравнения (1.1) при $m = 2$ имеет вид*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5 &= y \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= x \frac{\partial}{\partial y}, & X_7 &= x \frac{\partial}{\partial u}, & X_8 &= y \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_9 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_{10} &= x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}, & X_{11} &= y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Из утверждения 3 следует:

Утверждение 4. *При $m = 2$ преобразование*

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1 x + b_1 y + c_1, & \bar{y} &= a_2 x + b_2 y + c_2, \\ \bar{t} &= pt + q, & p &= a_1 b_2 - a_2 b_1, & a_1 b_2 - a_2 b_1 &\neq 0, \\ \bar{u} &= ku + a_3 x + b_3 y + c_3, & k &\neq 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, k, q$ — произвольные постоянные, преобразует исходное уравнение (1.1) в себя.

Одиннадцатипараметрическое преобразование (2.4) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (1.1) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = \Phi(x, y, t)$ — решение уравнения (1.1) при $m = 2$, то функция

$$u = \frac{1}{k} [\Phi(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2, pt + q) - (a_3x + b_3y + c_3)]$$

также является решением этого уравнения.

3. Двумерные симметричные редукции

3.1. Двумерные редукции уравнения (1.1) в основном случае при $m \neq 2$

1°. В общем случае при любом m , переходя в (1.1) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi, \eta), \quad \xi = x + a_1 t, \quad \eta = y + a_2 t, \quad (3.1)$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа — Ампера

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma(a_1 U_\xi + a_2 U_\eta)^m.$$

Решение вида (3.1) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 - X_3 = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

2°. При $m \neq 2$, переходя в уравнении (1.1) к переменным автомоделного типа

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}} U(\xi, \eta), \quad \xi = xt^\alpha, \quad \eta = yt^\beta, \quad (3.2)$$

где α и β — произвольные постоянные, получим двумерное уравнение типа Монжа — Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma \left(\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta + \frac{2\alpha + 2\beta + m}{m-2} U \right)^m. \quad (3.3)$$

Решение вида (3.3) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \alpha X_9 + \beta X_{10} - X_{11} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{(2\alpha + 2\beta + m)u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

3°. При $m \neq 2$, переходя в уравнении (1.1) к переменным предельного автомодельного типа

$$u = \exp\left[\frac{2(\alpha + \beta)}{m - 2}t\right]U(\xi, \eta), \quad \xi = x \exp(\alpha t), \quad \eta = y \exp(\beta t), \quad (3.4)$$

где α и β — произвольные постоянные, получим другое двумерное уравнение типа Монжа — Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma\left(\alpha\xi U_{\xi} + \beta\eta U_{\eta} + \frac{2(\alpha + \beta)}{m - 2}U\right)^m. \quad (3.5)$$

Решение вида (3.5) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = \alpha X_9 + \beta X_{10} - X_3 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2(\alpha + \beta)u}{m - 2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

3.2. Двумерные редукции уравнения (1.1) в специальном случае при $m = 2$

1°. При $m = 2$ имеются решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{\lambda t} U(x, y), \quad (3.6)$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается двумерным уравнением

$$U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma \lambda^2 U^2.$$

Решение вида (3.6) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = X_3 + \lambda X_9 = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial}{\partial u}.$$

2°. При $m = 2$ имеются другие решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\gamma x} U(y, t), \quad (3.7)$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается двумерным уравнением

$$UU_{yy} - U_y^2 = \sigma \gamma^{-2} U_t^2.$$

Решение вида (3.7) является инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований, задаваемой оператором симметрии

$$Y = X_1 + \gamma X_9 = \frac{\partial}{\partial x} + \gamma u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Замечание 1. Более сложные двумерные редукции уравнения (1.1) можно получить, заменив в решениях (3.1), (3.2), (3.4), (3.6), (3.7) пространственные переменные их произвольными линейными комбинациями по правилу $x \implies a_1 x + b_1 y$ и $y \implies a_2 x + b_2 y$.

4. Одномерные симметричные редукции и точные решения

4.1. Одномерные редукции уравнения (1.1)

в основном случае при $m \neq 2$

1°. При $m \neq 2$ простейшим инвариантным решением уравнения (1.1), допускающим преобразование масштабирования, является решение в виде произведения соответствующих степеней независимых переменных

$$u = A(xy)^{-\frac{2}{m-2}t^{\frac{m}{m-2}}}, \quad A = \left[\frac{4(m+2)(m-2)^{m-3}}{\sigma m^m} \right]^{\frac{1}{m-2}}. \quad (4.1)$$

Эту формулу можно использовать при тех значениях параметров m и σ , когда A — действительное число.

Ниже рассмотрено несколько инвариантных решений, которые обобщают решение (4.1) и могут быть получены с помощью простых методов, описанных в^{5,6}.

⁶Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*. 2021. V. 9. № 4. 345. 30 pp.

⁷Аксенов А.В., Полянин А.Д. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений. *Теоретическая и математическая физика*. 2022. Т. 211. № 2. 567–594.

Решение (4.1) является частным случаем более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u = x^{-\frac{2}{m-2}} t^{\frac{m}{m-2}} f(z), \quad z = y + \beta \ln t, \quad (4.2)$$

где β — свободный параметр, а функция $f = f(z)$ описывается ОДУ

$$\frac{2m}{(m-2)^2} f f''_{zz} - \frac{4}{(m-2)^2} (f'_z)^2 = \sigma \left(\frac{m}{m-2} f + \beta f'_z \right)^m.$$

Решение вида (4.2) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_9 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = -\beta X_2 + X_{11} = -\beta \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{mu}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Решение (4.1) является частным случаем другого более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u = x^{-\frac{2}{m-2}} t^{\frac{m}{m-2}} g(\xi), \quad \xi = y + \lambda \ln x, \quad (4.3)$$

где λ — свободный параметр, а функция $f = f(z)$ удовлетворяет ОДУ

$$\lambda g'_\xi g''_{\xi\xi} - \frac{2m}{(m-2)^2} g g''_{\xi\xi} + \frac{4}{(m-2)^2} (g'_\xi)^2 = -\sigma \left(\frac{m}{m-2} g \right)^m, \quad m \neq 2.$$

Решение вида (4.3) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_{11} = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{m u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = \lambda X_2 - X_9 = \lambda \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Решение (4.1) также является частным случаем другого более широкого семейства инвариантных решений вида

$$u = (xy)^{-\frac{2}{m-2}}\varphi(\eta), \quad \eta = t + \gamma \ln y, \quad (4.4)$$

где γ — свободный параметр, а функция $\varphi = \varphi(\eta)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{2m\gamma^2}{(2-m)^2}\varphi\varphi''_{\eta\eta} - \frac{4\gamma^2}{(2-m)^2}(\varphi'_\eta)^2 + \frac{2\gamma(m-6)}{(2-m)^3}\varphi\varphi'_\eta - \frac{4(m+2)}{(2-m)^3}\varphi^2 = \sigma(\varphi'_\eta)^m.$$

Решение вида (4.4) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_9 = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{m-2}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = \gamma X_3 - X_{10} = y\frac{\partial}{\partial y} - \gamma\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{m-2}\frac{\partial}{\partial u}.$$

2°. Уравнение (1.1) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = t^{\frac{2\alpha+m}{m-2}} x^{\frac{2(\beta-1)}{m-2}} V(\zeta), \quad \zeta = t^\alpha x^\beta y \quad (4.5)$$

редуцируется к ОДУ второго порядка, которое здесь не приводится ввиду его громоздкости.

Решение вида (4.5) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_9 - \beta X_{10} = x \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2(\beta-1)u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = X_{11} - \alpha X_{10} = t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(2\alpha+m)u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

3°. Уравнение (1.1) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = \exp\left(\frac{2\alpha t}{m-2}\right) x^{\frac{2(\beta-1)}{m-2}} V(\zeta), \quad \zeta = \exp(\alpha t) x^\beta y \quad (4.6)$$

редуцируется к ОДУ второго порядка, которое здесь не приводится.

Решение вида (4.6) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_3 - \alpha X_{10} = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2\alpha u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = X_9 - \beta X_{10} = x \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2(\beta-1)u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

4°. Уравнение (1.1) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = t^{\frac{2\alpha+m}{m-2}} \exp\left(\frac{2\beta x}{m-2}\right) V(\zeta), \quad \zeta = t^\alpha \exp(\beta x) y \quad (4.7)$$

редуцируется к ОДУ второго порядка, которое здесь не приводится.

Решение вида (4.7) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_{11} - \alpha X_{10} = t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(2\alpha + m)u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = X_1 - \beta X_{10} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2\beta u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

5°. Уравнение (1.1) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = \exp\left(\frac{2\alpha t + 2\beta x}{m-2}\right) V(\zeta), \quad \zeta = \exp(\alpha t + \beta x)y \quad (4.8)$$

редуцируется к ОДУ второго порядка, которое здесь не приводится.

Решение вида (4.8) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$Y_1 = X_3 - \alpha X_{10} = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2\alpha u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2 = X_1 - \beta X_{10} = \frac{\partial}{\partial x} - \beta y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2\beta u}{m-2} \frac{\partial}{\partial u}.$$

4.2. Одномерные редукции уравнения (1.1) в специальном случае при $m = 2$

1°. При $m = 2$ уравнение (1.1) имеет решение вида

$$\begin{aligned} u &= \exp(a_1x + b_1y + c_1t)U(\xi), \\ \xi &= a_2x + b_2y + c_2t, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi)$ удовлетворяет автономному ОДУ

$$UU''_{\xi\xi} - (U'_\xi)^2 = \sigma(a_1b_2 - a_2b_1)^{-2}(c_1U + c_2U'_\xi)^2. \quad (4.10)$$

Решение вида (4.9) является инвариантным относительно двухпараметрической группы преобразований, задаваемой операторами симметрии

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}, \\ Y_2 &= \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Уравнение (4.10) при $c_1 = 0$ легко интегрируется и имеет простое решение

$$U = (A\xi + B)^{-k}, \quad k = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{\sigma c_2^2},$$

где A, B — произвольные постоянные.

При $c_2 = 0$ общее решение уравнения (4.10) дается формулой

$$U = A \exp(\lambda \xi^2 + B\xi), \quad \lambda = \frac{1}{2}\sigma c_1^2(a_1b_2 - a_2b_1)^{-2}.$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. При $m = 2$ уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u = e^{\alpha t} V(z), \quad z = xy,$$

где α — произвольная постоянная, а функция $V = V(z)$ удовлетворяет неавтономному ОДУ

$$2\zeta V'_z V''_{zz} + (V'_z)^2 + \sigma \alpha^2 V^2 = 0.$$

5. Редукции с аддитивным разделением переменных, ведущие к стационарным уравнениям Монжа — Ампера

1°. Уравнение (1.1) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = At + w(x, y), \quad (5.1)$$

где A — произвольная постоянная, а функция w описывается стационарным неоднородным уравнением Монжа — Ампера с постоянной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = \sigma A^m.$$

2°. Нетрудно проверить, что уравнение (1.1) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (5.1), которое выражается в элементарных функциях

$$u = C_1x^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}(\sigma A^m + C_2^2)y^2 + C_4x + C_5y + At + C_6,$$

где $A, C_1, \dots, C_5$ ($C_1 \neq 0$) — произвольные постоянные.

3°. Используя результаты⁷, можно получить, например, следующие точные решения вида (5.1) уравнения (1.1):

$$u = At \pm \frac{\sqrt{-\sigma A^m}}{C_2} x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y + C_5,$$

$$u = At + \frac{1}{x + C_1} \left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2} \right) + \frac{\sigma A^m}{12C_2} (x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$u = At \pm \frac{2\sqrt{-\sigma A^m}}{3C_1C_2} (C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где $C_1, \dots, C_6$ — произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ — произвольная функция.

⁸Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton–London, 2012.

4°. Уравнение (1.1) допускает более сложные, чем (5.1), решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = (ax + by + c)t + w(x, y),$$

где a, b, c — произвольные постоянные, а функция w описывается стационарным неоднородным уравнением Монжа — Ампера с переменной правой частью

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = \sigma(ax + by + c)^m. \quad (5.2)$$

При $a = 1, b = c = 0$ уравнение (5.2) имеет, например, следующие точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w = \pm \frac{2\sqrt{-\sigma}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} y + \varphi(x), \quad m \neq 2;$$

$$w = C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{C_2^2}{4C_1} x^2 + \frac{\sigma}{2C_1(m+1)(m+2)} x^{m+2}, \quad m \neq -1, -2;$$

$$w = \frac{1}{x} \left(C_1 y^2 + C_2 y + \frac{C_2^2}{4C_1} \right) + \frac{\sigma}{2C_1(m+2)(m+3)} x^{m+3}, \quad m \neq -2, -3,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

6. Редукции с мультипликативным разделением переменных, ведущие к стационарным уравнениям Монжа — Ампера

1°. Уравнение (1.1) при $m \neq 2$ имеет решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = (t + A)^{\frac{m}{m-2}} U(x, y),$$

где A — произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается стационарным уравнением Монжа — Ампера

$$U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma \left(\frac{m}{m-2} \right)^m U^m. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1), в свою очередь, допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$U = x^{\frac{2}{2-m}} \theta(y),$$

где $\theta = \theta(y)$ удовлетворяет автономному ОДУ

$$2m\theta\theta''_{yy} - 4(\theta'_y)^2 = \sigma(m-2)^2 \left(\frac{m}{m-2} \right)^m \theta^m.$$

Подстановка $Z(\theta) = (\theta'_y)^2$ приводит это уравнение к линейному ОДУ первого порядка

$$m\theta Z'_\theta - 4Z = \sigma(m-2)^2 \left(\frac{m}{m-2}\right)^m \theta^m,$$

которое легко интегрируется.

2°. Уравнение (1.1) при $m = 2$ допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\lambda t} U(x, y),$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается стационарным уравнением Монжа — Ампера

$$U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma\lambda^2 U^2. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) допускает решение с мультипликативным разделением переменных, которое выражается в элементарных функциях

$$U = C_1 e^{\beta x} \theta(y), \quad \theta = \exp\left[\frac{1}{2}\sigma(\lambda/\beta)^2 y^2 + C_2 y\right]$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

7. Редукции с обобщенным разделением переменных, приводящие к двумерному нестационарному уравнению

1°. Уравнение (1.1) допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2}y^2 + axy + \frac{1}{2}a^2x^2 + by + U(x, t),$$

где a, b — произвольные постоянные, а функция $U = U(x, t)$ описывается сравнительно простым нелинейным уравнением

$$U_{xx} = \sigma U_t^m. \quad (7.1)$$

Для уравнения магнитной гидродинамики, которое определяется значениями $m = \sigma = 1$ в (1.1), редуцированное уравнение (7.1) является линейным уравнением теплопроводности.

Некоторые точные решения уравнения (7.1) описаны ниже.

2°. Уравнение (7.1) имеет простое решение с аддитивным разделением переменных

$$U = At + \frac{1}{2}\sigma A^m x^2 + Bx + C,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

3°. Уравнение (7.1) имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов $U = T(t)X(x)$, в том числе простое решение

$$U = A(t + C_1)^{\frac{m}{m-1}}(x + C_2)^{\frac{2}{1-m}}, \quad A = \left[\frac{2(m+1)(m-1)^{m-2}}{\sigma m^m} \right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4°. Уравнение (7.1) имеет решение типа бегущей волны

$$U = U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается простым автономным ОДУ

$$U''_{zz} = \sigma \lambda^m (U'_z)^m,$$

общее решение которого при $m \neq 1, 2$ определяется формулой

$$U = \frac{1}{(2-m)\sigma \lambda^m} \left[(1-m)\sigma \lambda^m z + C_1 \right]^{\frac{2-m}{1-m}} + C_2,$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнение (7.1) имеет также более общее решение вида

$$u = ax^2 + bx + ct + U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где a, b, c, λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$U''_{zz} = \sigma(\lambda U'_z + c)^m - 2a.$$

5°. Уравнение (7.1) при $m \neq 1$ допускает автомодельные решение

$$U = t^{\frac{m+2\beta}{m-1}} V(\zeta), \quad \zeta = xt^\beta,$$

где функция $V(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$V''_{\zeta\zeta} = \sigma\left(\frac{m+2\beta}{m-1}V + \beta\zeta V'_\zeta\right)^m.$$

6°. Уравнение (7.1) при $m \neq 1$ имеет инвариантное решение вида

$$U = t^{\frac{m}{m-1}} \theta(z), \quad z = x + \beta \ln t, \quad (7.2)$$

где β — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается автономным ОДУ

$$\theta''_{zz} = \sigma \left(\frac{m}{m-1} \theta + \beta \theta'_z \right)^m.$$

Общее решение этого уравнения при $\beta = 0$, что соответствует решению с мультипликативным разделением переменных (7.2), можно представить в неявной форме.

7°. Уравнение (7.1) при $m \neq 1$ имеет другое инвариантное решение вида

$$U = \exp\left(\frac{2\beta}{m-1}t\right) W(\xi), \quad \xi = x \exp(\beta t),$$

где β — произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$W''_{\xi\xi} = \sigma \left(\frac{2\beta}{m-1} W + \beta \xi W'_\xi \right)^m.$$

8°. Уравнение (7.1) при $m = -1$ с помощью преобразования Эйлера⁸:

$$u(x, t) + w(\xi, \tau) = x\xi, \quad x = w_\xi, \quad t = -\tau/\sigma,$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$w_\tau = w_{\xi\xi}.$$

⁸Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton–London, 2012.

8. Преобразование Эйлера — Лежандра

Преобразуем исходное уравнение (1.1) с помощью контактного преобразования Эйлера — Лежандра, которое определяется следующими формулами:

$$t = T, \quad x = U_X, \quad y = U_Y, \quad u = XU_X + YU_Y - U \quad (\text{прямое преобразование}); \quad (8.1)$$

$$T = t, \quad X = u_x, \quad Y = u_y, \quad U = xu_x + yu_y - u \quad (\text{обратное преобразование}), \quad (8.2)$$

где $u = u(t, x, y)$ и $U = U(T, X, Y)$, а производные по времени связаны соотношением

$$u_t = -U_T. \quad (8.3)$$

Используя (8.1)–(8.2), находим вторые производные

$$u_{xx} = JU_{YY}, \quad u_{xy} = u_{yx} = -JU_{XY}, \quad u_{yy} = JU_{XX},$$

где

$$J = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \quad \frac{1}{J} = U_{XX}U_{YY} - U_{XY}^2. \quad (8.4)$$

Заменяя в уравнении (1.1) старые производные на новые по формулам (8.3)–(8.4) и дополнительно сделав подстановку $U = -W$, приходим к уравнению аналогичного вида с другим показателем степени у первой производной

$$W_{XX}W_{YY} - W_{XY}^2 = \sigma^{-1}(W_T)^{-m}. \quad (8.5)$$

Если функция $U = U(T, X, Y)$ является решением уравнения (8.5), то формулы (8.1) определяют соответствующее решение уравнения (1.1) в параметрической форме. Обратно, если функция $u = u(t, x, y)$ является решением уравнения (1.1), то формулы (8.2) определяют соответствующее решение уравнения (8.5) в параметрической форме.

Литература

1. Smirnov V.V., Chukbar K.V. “Phonons” in two-dimensional vortex lattices. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2001. V. 93. No. 1. 126–135.
2. Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V. Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. *Plasma Physics Reports*. 2014. V. 30. No. 3. 214–217.
3. Ohkitani K., Sultu F. Al. Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices. *J. Physics A: Math. & Theor.* 2013. V. 46. No. 20. 205501. 19 pp.
4. Krylov N.V. Sequences of convex functions, and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation. *Siberian Math. J.*, 17:2 (1976), 226–236.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
6. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*. 2021. V. 9. № 4. 345. 30 pp.

7. Аксенов А.В., Полянин А.Д. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений. *Теоретическая и математическая физика*. 2022. Т. 211. № 2. 567–594.
8. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton–London, 2012.
9. Polyanin A.D., Aksenov A.V. Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: Symmetries, closed-form solutions, and reductions. *Mathematics*. 2024. V. 12. № 13. 2127. 29 pp.
10. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Symmetries, reductions and exact solutions of nonstationary Monge–Ampère type equations. *Mathematics*. 2025. V. 13. № 3. 525. 24 pp.
11. Аксенов А.В., Полянин А.Д. Обзор по точным решениям и редукциям уравнений типа Монжа — Ампера. *Теоретическая и математическая физика*. 2025 (принята к публикации).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!