МУЛЬТИПЛИКАТИВНО-АДДИТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ЛАМБЕКА С КРУЛЛЕВЫМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ: НИЖНЯЯ СЛОЖНОСТНАЯ ОЦЕНКА

С.Л. Кузнецов, Т.Г. Пшеницын
Семинар “Вероятностные и субструктурные логики”
18 февраля 2025 года

1. Аксиомы и правила

$$\frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Pi, B \setminus A, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{B, \Pi \Rightarrow A}{\Pi \Rightarrow B \setminus A} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow C \quad \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, A \,/\, B, \Pi, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{\Pi, B \Rightarrow A}{\Pi \Rightarrow A \,/\, B}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \cdot B}$$

$$\frac{\Gamma, A_i, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A_1 \wedge A_2, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow A_1 \quad \Pi \Rightarrow A_2}{\Pi \Rightarrow A_1 \wedge A_2} \qquad \frac{\Gamma, A_1, \Delta \Rightarrow C \quad \Gamma, A_2, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A_1 \vee A_2, \Delta \Rightarrow C} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow A_i}{\Pi \Rightarrow A_1 \vee A_2}$$

$$\frac{(\Pi \Rightarrow A^n)_{n=1}^{\infty}}{\Pi \Rightarrow A^{\mathrm{Kr}}} \qquad \frac{\Gamma, A^n, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, A^{\mathrm{Kr}}, \Delta \Rightarrow B}$$

Под A^n понимается $\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$ (при $n > 0$).

Ещё два “макроса”: $[A]^l B := A \setminus (B \cdot A)$; $[A]^r B := (A \cdot B) \,/\, A$.

2. Кодирование машин Тьюринга

Дана машина Тьюринга $\mathtt{M}$ с алфавитом Γ, содержащим входной алфавит Σ, множеством состояний Q, содержащим выделенное начальное состояние q_0 и множество конечных состояний F. Допустим, она останавливается всегда за положительное чётное число шагов. Запись $w \vdash_{\mathtt{M}} w'$ означает, что конфигурация w' получается из конфигурации w за один шаг. Начальная конфигурация имеет вид wq_0.

Определим два языка:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{x_0\#x_2\#\ldots\#x_{2k}\#x_{2k-1}^{\mathrm{R}}\#\ldots\#x_1^{\mathrm{R}} \mid \\ &\qquad x_{2i} \vdash_{\mathtt{M}} x_{2i+1} \text{ при } i \in \{0,\ldots,k-1\}, x_0 = wq_0, w \in \Sigma^*, x_{2k} \in \Gamma^* F \Gamma^*\}, \\ L_2 &:= \{q_0\#x_2\#\ldots\#x_{2k}\#x_{2k-1}^{\mathrm{R}}\#\ldots\#x_1^{\mathrm{R}} \mid x_{2i-1} \vdash_{\mathtt{M}} x_{2i} \text{ при } i \in \{1,\ldots,k\}\}. \end{aligned}$$

Язык L_i задаётся линейной контекстно-свободной грамматикой $\mathcal{G}_i = \langle N_i, T, P_i, S_i \rangle$, то есть, грамматикой, в которой правила имеют вид $X \to \alpha Y \beta$ либо $X \to \alpha$, где α, β — строки из терминальных символов. Более того, можно сделать так, чтобы β было во всех правилах непусто.

Определим два бинарных отношения $\triangleright_1$ и $\triangleright_2$:

(1) $c \triangleright (\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_m \cdot go_i) \setminus (X \cdot go_i)$, если $X \to \alpha_1 \ldots \alpha_m c$ лежит в P_i;
(2) $c \triangleright go_i \setminus (c \cdot go_i)$ при $c \in T_i$.

Определим следующие формулы.

(1) $\mathrm{Rel}(c) := A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ — все формулы, находящиеся в отношении $\triangleright$ с символом c (то есть, $c \triangleright A_i$).

(2) $\mathrm{Bgn}(\mathtt{M}) := \left(\left(\bigwedge\limits_{c \in T} (go \cdot \mathrm{Rel}(c))\right) / \, go\right)^{\mathrm{Kr}}.$

(3) $\mathrm{Clr}(\Sigma) := cl \cdot \left(\bigwedge\limits_{c \in \Sigma} ((c \cdot cl) \setminus cl)\right)^{\mathrm{Kr}} \cdot cl \setminus acc.$

(4) $\mathrm{End}(\mathtt{M}) := ((S_1 \cdot go_1) \setminus acc) \wedge ((S_2 \cdot go_2) \setminus \mathrm{Clr}(\Sigma)).$

(5) $\mathrm{Cmp}(\mathtt{M}) := (q_0 \cdot (go_1 \vee go_2))/go \cdot \mathrm{Bgn}(\mathtt{M}) \cdot go \cdot \mathrm{End}(\mathtt{M}).$

Лемма 1. *Секвенция $w, \mathrm{Cmp}(\mathtt{M}) \Rightarrow acc$ выводится тогда и только тогда, когда машина Тьюринга $\mathtt{M}$ принимает слово $w \in \Sigma^+$.*

3. Конструкция

В конструкции используются следующие машины Тьюринга с входным алфавитом $\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

- $\mathtt{M}^{bs}$ — принимает строки $w\sigma_2\sigma_1^x$, где x — Σ_0-индекс/Π_0-индекс истинной формулы.
- $\overline{\mathtt{M}}^{st}_{\forall}$ — принимает строки $w\sigma_2\sigma_1^x\sigma_2\sigma_1^y\sigma_2\sigma_1^t$, где t не является кодом корректного протокола работы машины Тьюринга, доказывающим, что y — индекс одного из конъюнктов формулы с индексом x.
- $\mathtt{M}^{st}$ — принимает строки $w\sigma_2\sigma_1^x\sigma_2\sigma_1^y$, где y — индекс одного из конъюнктов/дизъюнктов формулы с индексом x.

Формулы, используемые в конструкции:

(1) $\mathrm{Pass} := acc \, / \, acc;$

(2) $\mathrm{En}^{bs} := acc \, / \, \mathrm{Cmp}(\mathtt{M}^{bs});$

(3) $\mathrm{Mir} := (\mathrm{Clr}(\{\sigma_1, \sigma_2\}) \cdot acc \setminus \sigma_1 \, / \, \sigma_1) \, / \, go_1 \wedge (\sigma_2 \cdot go_3) \, / \, go_2;$

(4) $\mathrm{Go} := [go_1]^r \sigma_1 \wedge [go_2]^r [go_3]^l \sigma_1;$

(5) $\mathrm{Rfl}(A) := \sigma_1^{\mathrm{Kr}} \, / \, \big(\mathrm{Mir} \cdot go \cdot ([go]^l \mathrm{Go})^{\mathrm{Kr}} \cdot go \setminus (go_1 \vee (go_2 \cdot (go_3 \setminus A)))\big);$

(6) $\mathrm{Chc} := \mathrm{Rfl}\left((acc \, / \, \mathrm{Cmp}(\overline{\mathtt{M}}^{st}_{\forall})) \setminus \sigma_1^{\mathrm{Kr}}\right) \setminus \sigma_1^{\mathrm{Kr}} \wedge \big(acc \, / \, (\mathrm{Cmp}(\mathtt{M}^{st}) \vee (((p_{\exists} \cdot en) \setminus ok) \setminus acc))\big) \setminus \sigma_1^{\mathrm{Kr}};$

(7) $\mathrm{En}^{st}_{\forall} := \mathrm{Rfl}(\mathrm{Chc});$

(8) $\mathrm{En}^{st}_{\exists} := acc \, / \, \big[\sigma_2 \cdot go \cdot ([go]^l \sigma_1)^{\mathrm{Kr}} \cdot go \setminus (\mathrm{Cmp}(\mathtt{M}^{st}) \vee (((p_{\forall} \cdot en) \setminus ok) \setminus acc))\big];$

(9) $\mathrm{En}_{\mathtt{Q}} := ok \, / \left(\mathrm{En}^{bs} \vee \mathrm{En}^{st}_{\mathtt{Q}}\right)$ (здесь $\mathtt{Q} \in \{\forall, \exists\}$);

(10) $\mathrm{En}(0) := \mathrm{Pass} \wedge en \setminus ((p_{\exists} \setminus \mathrm{En}_{\exists}) \wedge (p_{\forall} \setminus \mathrm{En}_{\forall}));$

(11) $\mathrm{En}(k+1) := \mathrm{Pass} \wedge en \setminus \big(en \cdot \mathrm{En}(k)^{\mathrm{Kr}}\big).$

Лемма 2. *Дана невозрастающая последовательность натуральных чисел $k_1 \geq \ldots \geq k_M$ и дан индекс $x = \langle \varepsilon, \alpha, e \rangle$ инфинитарной вычислимой формулы, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\alpha < \omega^\omega$ и $e \in \omega$. Рассмотрим секвенцию*

$$p_{\mathtt{Q}}, en, \mathrm{En}(k_M), \ldots, \mathrm{En}(k_1), \Psi, \sigma_1^x \Rightarrow ok \tag{1}$$

В ней $\mathtt{Q} = \exists$, если $\varepsilon = 0$, и $\mathtt{Q} = \forall$, если $\varepsilon = 1$; $\Psi \in \{\sigma_1, \sigma_2\}^*$ начинается и заканчивается символом σ_2.

(1) Если секвенция (1) выводима, то x — индекс истинной формулы.

(2) Если x — индекс истинной формулы и $\omega^{k_1} + \ldots + \omega^{k_M} > \alpha$, то секвенция (1) выводима.

Лемма 3 (обобщение леммы 1)**.** *Секвенция $\mathrm{En}(k_M), \ldots, \mathrm{En}(k_1), w, \mathrm{Cmp}(\mathtt{M}) \Rightarrow acc$ выводится тогда и только тогда, когда машина Тьюринга $\mathtt{M}$ принимает слово $w \in \Sigma^+$.*