

Основы теории открытых квантовых систем II.

Лекция 4. Фермионная динамика с квадратичным генератором. Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Теретёнков Александр Евгеньевич

24 февраля 2025 г.

В прошлых лекциях...

ККС

$$[f^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T g] = -f^T J g, \quad \forall g, f \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Фермионный случай

Рассмотрим гильбертово пространство $\otimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{2^n}$. В таком гильбертовом пространстве можно ввести n пар операторов рождения и уничтожения по формулам (обратные **преобразования Иордана-Вигнера**)

$$\begin{aligned}c_i &= (\otimes_{j=1}^{i-1} \sigma_3) \otimes \sigma^- \otimes (\otimes_{j=i+1}^n I_2), & i &= 1, \dots, n, \\c_i^\dagger &= (\otimes_{j=1}^{i-1} \sigma_3) \otimes \sigma^+ \otimes (\otimes_{j=i+1}^n I_2), & i &= 1, \dots, n,\end{aligned}$$

где $\sigma_3, \sigma^-, \sigma^+$ — матрицы Паули, а I_2 — единичная матрица:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Фермионный случай

Фермионные операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям (КАС)

$$\{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij}, \quad \{c_i, c_j\} = 0.$$

Введём $2n$ -вектора $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n, c_1^\dagger, \dots, c_n^\dagger)^T$ операторов рождения-уничтожения. Тогда обозначим

$$f^T \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^T f \equiv \sum_{i=1}^n (f_i c_i + f_{i+n-1} c_i^\dagger), \quad \forall f \in \mathbb{C}^{2n},$$

$$\mathbf{c}^T K \mathbf{c} \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_{i,j} c_i c_j + K_{i+n,j} c_i^\dagger c_j + K_{i,j+n} c_i c_j^\dagger + K_{i+n,j+n} c_i^\dagger c_j^\dagger),$$

$$\forall K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}.$$

Фермионный случай

КАС примут вид

$$\{f^T \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}\} = f^T E g, \quad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n},$$

Фермионный случай

КАС примут вид

$$\{f^T \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}\} = f^T E g, \quad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n},$$

Для вычислений нам также понадобится \sim -сопряжение. Теперь действие эрмитового сопряжения может быть представлено формулами $(g^T \mathbf{c})^\dagger = \tilde{g}^T \mathbf{c}$ и $(\mathbf{c}^T K \mathbf{c})^\dagger = -\mathbf{c}^T \tilde{K} \mathbf{c}$, где $K = -K^T$.

Фермионный случай

КАС примут вид

$$\{f^T \mathbf{c}, g^T \mathbf{c}\} = f^T E g, \quad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n},$$

Для вычислений нам также понадобится \sim -сопряжение. Теперь действие эрмитового сопряжения может быть представлено формулами $(g^T \mathbf{c})^\dagger = \tilde{g}^T \mathbf{c}$ и $(\mathbf{c}^T K \mathbf{c})^\dagger = -\mathbf{c}^T \tilde{K} \mathbf{c}$, где $K = -K^T$. По аналогии с бозонным случаем будем писать tr для следа матриц в пространстве $\bigotimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2$ и Tr для следа матриц в пространстве \mathbb{C}^{2n} .

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. Пусть $A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$

$$\mathbf{c}^T A \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \frac{A - A^T}{2} \mathbf{c} + \frac{1}{2} \text{Tr } A E,$$

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. Пусть $A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$

$$\mathbf{c}^T A \mathbf{c} = \mathbf{c}^T \frac{A - A^T}{2} \mathbf{c} + \frac{1}{2} \text{Tr } AE,$$

Лемма. Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T A \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \frac{1}{2} \mathbf{c}^T B \mathbf{c} + g^T \mathbf{c} \right] = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T (AEB - BEA) \mathbf{c} + \\ + \mathbf{c}^T (Aeg - BEf) + \mathbf{c}^T (fg^T - gf^T) \mathbf{c}.$$

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. (Квадратичные и линейные формы между экспонентами от квадратичных форм) Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c}} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T B \mathfrak{c} + g^T \mathfrak{c} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T e^{AE} B e^{-EA} \mathfrak{c} + g^T e^{-EA} \mathfrak{c}.$$

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. (Квадратичные и линейные формы между экспонентами от квадратичных форм) Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ и $f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c}} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T B \mathfrak{c} + g^T \mathfrak{c} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T e^{AE} B e^{-EA} \mathfrak{c} + g^T e^{-EA} \mathfrak{c}.$$

Лемма. (Производная экспоненты) Пусть $K_t = K_t^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}[0, +\infty)$, тогда

$$\left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T K_t \mathfrak{c}} \right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T K_t \mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E \mathfrak{c},$$

причём матрица $\left(\frac{d}{dt} e^{K_t E} \right) e^{-K_t E} E$ антисимметрична.

Квадратичный фермионный супероператор

Определение. Квадратичный фермионный супероператор:

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathbf{c}^T \Gamma \rho \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \Gamma_L \mathbf{c} \rho + \rho \mathbf{c}^T \Gamma_R \mathbf{c} + \rho g_R^T \mathbf{c} + g_L^T \mathbf{c} \rho + \lambda \rho,$$

где $\Gamma, \Gamma_L = -\Gamma_L^T, \Gamma_R = -\Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Иногда матрицы составленную из всех коэффициентов при квадратичных формах генератора называют матрицей формы (shape matrix):

- Prosen, T. (2008). Third quantization: a general method to solve master equations for quadratic open Fermi systems. New Journal of Physics, 10(4), 043026.

Квадратичный фермионный супероператор

Лемма.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^+(\rho) &= \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathfrak{c} - \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{c} \rho - \rho \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{c} + \rho \tilde{g}_L^T \mathfrak{c} + \tilde{g}_R^T \mathfrak{c} \rho + \bar{\lambda} \rho, \\ \mathcal{L}^*(\hat{X}) &= \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathfrak{c} - \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{c} \hat{X} - \hat{X} \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{c} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathfrak{c} + \tilde{g}_L^T \mathfrak{c} \hat{X} + \bar{\lambda} \hat{X}.\end{aligned}$$

Квадратичный фермионный супероператор

Лемма. Пусть $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*(I) = 0$, тогда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c},$$

где

$$H = -H^T = -\tilde{H}, \quad \Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad f = \tilde{f}.$$

Квадратичный фермионный супероператор

Утверждение. При $\hat{H} = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T H \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}$ ($H = -H^T$, $H = -\tilde{H}$ и $h = \tilde{h}$) и $\hat{C}^{(i)} = \gamma_i^T \mathbf{c}$ генератор ГКСЛ принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c} + f^T \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c},$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T,$$

Более того, возможность написать Γ и f в таком виде эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geq 0, \quad f = \tilde{f}.$$

Мы будем рассматривать генераторы без линейных членов:

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}(\rho) \equiv -i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c}, \rho \right] + \mathbf{c}^T \rho \Gamma \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \rho - \frac{1}{2} \rho \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c}$$

Тогда

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}^*(\hat{X}) = i \left[\frac{1}{2} \mathbf{c}^T H \mathbf{c}, \hat{X} \right] + \mathbf{c}^T \hat{X} \Gamma^T \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c} \hat{X} - \frac{1}{2} \hat{X} \mathbf{c}^T \Gamma^T \mathbf{c}.$$

Лемма. Действие сопряжённого генератора на попарные произведения операторов рождения-уничтожения определяется формулами

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}^* (\mathfrak{c} \mathfrak{c}^T) = E \left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T + \mathfrak{c} \mathfrak{c}^T \left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2} \right) E + E\Gamma^T E.$$

Определение. Определим **матрицу вторых моментов** D состояния ρ по формуле

$$D \equiv \text{tr}(\mathfrak{c} \mathfrak{c}^T \rho).$$

Определение. Определим **матрицу вторых моментов** D состояния ρ по формуле

$$D \equiv \text{tr}(\mathbf{c} \mathbf{c}^T \rho).$$

Утверждение. Пусть

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}_{H,\Gamma}(\rho_t),$$

тогда соответствующая матрица вторых моментов удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}D_t = E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E\Gamma_t^T E.$$

Утверждение.

$$D^T = \tilde{D}, \quad DE \geq 0.$$

$$D + D^T = E.$$

Определение. Матрица антиковариаций

$$A = \frac{D - D^T}{2}.$$

Утверждение. Матрица антиковариаций удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}A_t = E \left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) A_t + A_t \left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2} \right) E + E \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} E.$$

Если в начальный момент времени $D_0 + D_0^T = E$, то $D_t + D_t^T = E$ в произвольный момент времени.

Определение. Состояние ρ называется **чётным гауссовским состоянием**, если его характеристическая функция $\chi_W(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{\boldsymbol{\theta}^T E \varsigma})$ представима в виде экспоненты от квадратичной формы по $\boldsymbol{\theta}$.

Утверждение.

$$\chi_W(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{\boldsymbol{\theta}^T E \mathbf{c}}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T A \boldsymbol{\theta}}$$

$$\chi_N(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E-J}{2} \mathbf{c}} e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E+J}{2} \mathbf{c}}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T (A + \frac{1}{2} J) \boldsymbol{\theta}},$$

$$\chi_A(\boldsymbol{\theta}) \equiv \text{tr}(\rho e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E+J}{2} \mathbf{c}} e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E-J}{2} \mathbf{c}}) = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T (A - \frac{1}{2} J) \boldsymbol{\theta}}.$$

- Cahill, Kevin E., and Roy J. Glauber. "Density operators for fermions." Physical Review A 59.2 (1999): 1538.

Гауссовские состояния

Утверждение.

$$\rho_N(\boldsymbol{\theta}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T R \boldsymbol{\theta} + r}$$

$$R = 4(2J - EA^{-1}E)^{-1}, \quad A = -\frac{1}{2}E(2R^{-1} - J)^{-1}E,$$

$$e^r = \frac{1}{\sqrt{\det R}}.$$

Утверждение.

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathbf{c}^T K \mathbf{c} + s}$$

$$D = E \frac{1}{1 + e^{KE}}, \quad A = -\frac{E}{2} \operatorname{th} \frac{KE}{2},$$

$$e^s = \frac{1}{\sqrt{\det(e^{KE} + I)}}.$$

Динамика матрицы плотности

Утверждение. Нормальный символ $\rho_t(\boldsymbol{\theta})$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_t(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \rho_t(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta}^T P_t^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \rho_t(\boldsymbol{\theta}) + \\ & + \boldsymbol{\theta}^T (\Gamma_t - \Gamma_t^T) \boldsymbol{\theta} \rho_t(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2} \text{Tr} \Gamma_t^T J \rho_t(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

где

$$Q_t = J \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} J - \frac{E}{2} \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) J - J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) \frac{E}{2},$$

$$P_t^T = (\Gamma_t - \Gamma_t^T) J - \left(iH + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2} \right) E.$$

Пример: Классический резервуар

Интересно, что в фермионном случае классический резервуар $\Gamma = \Gamma^T$ приводит к более простым уравнениям, чем в бозонном случае. А именно, принимает вид

$$A_t = e^{-E(iH+\Gamma)t} A_0 e^{(iH-\Gamma)Et}.$$

В прошлом семестре...

В результате усреднения по пуассоновскому случайному процессу получался ГКСЛ-генератор

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(U\rho U^\dagger - \rho), \quad \lambda \geq 0,$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В общем случае можно рассматривать сложный Пуассоновский процесс, тогда

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \mathcal{L}(\rho) = \int_{\Omega} \lambda(dp)(U_p \rho U_p^\dagger - \rho), \quad \lambda(dp) \geq 0,$$

$$U_p = e^{-\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H_p \mathbf{a}},$$

- A. E. Teretenkov, "Dynamics of Moments of Arbitrary Order for Stochastic Poisson Compressions", Math. Notes, 107:4 (2020), 695–698 , arXiv: 1909.10454.
- Tomasz Linowski, Alexander Teretenkov, Łukasz Rudnicki, "Dissipative evolution of quantum Gaussian states", Phys. Rev. A, 106:5 (2022), 52206 , 12 pp., arXiv: 2105.12644.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Лемма.

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \int_{\Omega} \lambda(dp) (U_p^\dagger \hat{X} U_p - \hat{X}).$$

Лемма. Пусть $H = H^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда

$$e^{\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a}} \mathbf{a} e^{-\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H \mathbf{a}} = S \mathbf{a}, \quad S = e^{iJH}.$$

Лемма.

$$\mathcal{L}^*(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a}) = \int_{\Omega} \lambda(dp) (\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M}) \otimes_{m=1}^M \mathbf{a}, \quad S_p = e^{iJH_p}.$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Пусть

$$U_p = e^{-\frac{i}{2} \mathbf{a}^T H_p \mathbf{a}},$$

где $H_p = H_p^T = \tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ — непрерывная функция и $\langle \bigotimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_0 < \infty$, тогда:

Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \bigotimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_t = \exp \left(\int_{\Omega} \lambda(dp) (\bigotimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M}) t \right) \langle \bigotimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_0,$$

где $S_p = e^{iJH_p}$, $\langle \bigotimes_{m=1}^M \mathbf{a} \rangle_t \equiv \text{tr} (\rho_t \bigotimes_{m=1}^M \mathbf{a})$, $I_{(2n)^M}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^M}$.

Доказательство: Уравнение ГКСЛ в представлении Гейзенберга для оператора $\hat{X}_t = (\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t = \int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t.$$

Полученное уравнение является линейным обыкновенным уравнением относительно операторно-значного тензора $(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t$. Тогда решение может быть представлено посредством матричной экспоненты от $(2n)^M \times (2n)^M$ -матрицы $\int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t$, а именно

$$(\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_t = e^{\int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t} (\otimes_{m=1}^M \mathbf{a})_0.$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. □

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В частности, для первых и вторых моментов имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} \rangle_t &= e^{\int \lambda(dp) (S_p - I_{2n})t} \langle \mathbf{a} \rangle_0, \\ \langle \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \rangle_t &= e^{\int \lambda(dp) (S_p \otimes S_p - I_{4n^2})t} \langle \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \rangle_0.\end{aligned}$$