Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 6. Иерархическая динамика моментов. Модели с инвариантным пространством Онзагера. Модели с точно-решаемым спектром

Теретёнков Александр Евгеньевич

10 марта 2025 г.

В прошлой лекции...

Утверждение.

$$\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t = G_I(t) \sum_{I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3} \psi_{I_1}(t) \beta_{I_2}(t) \langle \mathfrak{a}_{I_3} \rangle_0,$$

где сумма пробегает все возможные разложения I на объединения трёх непересекающихся множеств I_1, I_2, I_3.
В случае постоянных коэффициентов, имеем

$$\begin{aligned}
G(t) &= e^{Bt}, \\
\psi(t) &= \int_0^t d\tau \; e^{-B\tau} \varphi = \frac{1 - e^{-Bt}}{B} \varphi, \\
\beta_{12}(t) &= \int_0^t d\tau \; e^{-(B_1 + B_2)\tau} \Xi_{12} = \frac{1 - e^{-(B_1 + B_2)t}}{B_1 + B_2} \Xi_{12}.
\end{aligned}$$

Усреднение динамики с квадратичным генератором по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(e^{\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}}\rho_t - \rho_t), \qquad \lambda > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t =& \lambda\Big((G_I(1) - 1)\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t \\ &+ G_I(1) \sum_{I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3, I_3 \neq I} \psi_{I_1}(1)\beta_{I_2}(1)\langle \mathfrak{a}_{I_3} \rangle_t\Big),\end{aligned}$$

где $G_I(t)$, $\psi_{I_1}(1)$, $\beta_{I_2}(1)$ определены формулами для случая постоянных коэффициентов.

Пространство Онзагера

Будем рассматривать гильбертово пространство

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}^{2^N}$$

Матрицы Паули на j-м узле

$$\sigma_j^\alpha = I \otimes \ldots \otimes \underbrace{\sigma^\alpha}_{j \bmod N} \otimes \ldots \otimes I, \qquad \alpha \in \{x, y, x\},$$

где σ^α — матрицы Паули

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пространство Онзагера

Струны (строки) Онзагера длины $m + 1 \geqslant 2$

$$[\alpha\alpha']_j^{j+m} \equiv \sigma_j^\alpha \sigma_{j+1}^z \dots \sigma_{j+m-1}^z \sigma_{j+m}^{\alpha'}, \qquad \alpha, \alpha' \in \{x, y\}$$

Струны (строки) Онзагера длины 1

$$\sigma_j^z$$

Линейную оболочку струн Онзагера будем называть ***пространством Онзагера***.

Пространство Онзагера

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}$ — ГКСЛ-генератор такой, что H принадлежит простиранству Онзагера и каждый из C_k

1) принадлежит пространству Онзагера, либо
2) унитарный оператор с генератором из пространства Онзагера, либо
3) имеет вид $p_x \sigma_j^x + p_y \sigma_j^y$, $p_x, p_y \in \mathbb{R}$, либо
4) произведение любого числа операторов из пунктов 2) и 3),

тогда полугруппа $e^{\mathcal{L}^* t}$ оставляет пространство Онзагера инвариантным.

- A. Teretenkov, O. Lychkovskiy, "Exact dynamics of quantum dissipative XX models: Wannier-Stark localization in the fragmented operator space", Physical Review B, 109:14 (2024), L140302 , 7 pp, arXiv: 2405.17310.

Замечания

1. Преобразования Йордана-Вигнера превращают пространство Онзагера в квадратичные комбинации по фермионным операторам рождения и уничтожения.
2. В условиях предыдущего утверждения полугруппа $e^{\mathcal{L}^* t}$ оставляет инвариантным линейную оболочку антикоммутаторов элементов из пространства Онзагера (и пространств, охватываемых симметризованными произведениями струн Онзагера более высокого порядка).
3. Мы имеем экспоненциально много (по N) таких инвариантных пространств, размерность которых полиномиально по N. Подобное явление для уравнения Шрёдингера называется фрагментацией гильбертова пространства, поэтому мы можно называть это ***"фрагментацией операторного пространства"***.
4. Но прямая сумма этих инвариантных пространств не покрывает всю $\mathbb{C}^{2^N \times 2^N}$.

XX-модель без диссипации

Рассмотрим частный случай XX цепочки спино 1/2

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y\right),$$

без диссипации

$$C_k = 0.$$

Трансляционно-инвариантные струны Онзагера

Обозначим

$$A^n \equiv \sum_{j=1}^{N} [xx]_j^{j+n}, \qquad A^{-n} \equiv \sum_{j=1}^{N} [yy]_j^{j+n},$$

$$B^n \equiv \sum_{j=1}^{N} [xy]_j^{j+n}, \qquad B^{-n} \equiv -\sum_{j=1}^{N} [yx]_j^{j+n},$$

где $n = 1, \cdots, N-2$ и

$$A^0 \equiv -\sum_{j=1}^{N} \sigma_j^z$$

(неуказанные доопределяем нулями).

Интегралы движения

Утверждение. Обозначим

$$H^n \equiv \frac{1}{2}\left(A^n + A^{-n}\right), \quad Q^n \equiv \frac{1}{2}\left(B^n + B^{-n}\right), \quad n \geqslant 0,$$

тогда

$$[H, H^n] = [H, Q^n] = 0.$$

Динамика в трансляционно-инвариантном секторе пространства Онзагера

Утверждение. Обозначим

$$R^{\pm n} \equiv \frac{1}{2}\left(A^n - A^{-n}\right) \pm \frac{i}{2}\left(B^n - B^{-n}\right), \qquad n \geqslant 1,$$

и $R_t^n \equiv e^{\mathcal{L}^* t} R^n$, тогда

$$\partial_t R_t^n = -2i\left(R_t^{n-1} + R_t^{n+1}\right), \quad n \geqslant 1,$$

$$R_t^0 = 0.$$

Термодинамический предел

$r \in \ell_2$

$$\mathcal{M} = -2 \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & \dots \\ i & 0 & i & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & i & \dots \\ 0 & 0 & i & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\ell_2)$$

$$(e^{\mathcal{M}t} r)_n = \sum_{m=1}^{\infty} i^{n-m} \left(J_{m-n}(4t) - (-1)^n J_{m+n}(4t) \right) r_m$$

Чистая дефазировка

Рассмотрим динамику с тем же гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y\right)$$

и операторами Линдблада

$$C_j = \sqrt{\gamma}\sigma_j^z, \quad j = 1,2,\ldots,N, \qquad \gamma > 0.$$

Модель может быть отображена на фермионную модель с квадратичным гамильтонианом и квадратичным и эрмитовым операторами Линдблада. Однако, это негауссовская динамика.

Чистая дефазировка

Утверждение.

$$\mathcal{D}F^{\pm n} = -4\gamma F^{\pm n}, \quad n \geq 1,$$

где $F = A, B, H, Q, R,$ за исключением

$$\mathcal{D}H^0 = 0.$$

Чистая дефазировка

Утверждение.

$$\mathcal{D}F^{\pm n} = -4\gamma F^{\pm n}, \quad n \geq 1,$$

где $F = A, B, H, Q, R$, за исключением

$$\mathcal{D}H^0 = 0.$$

Следствие. Обозначим $F_t^{\pm n} \equiv e^{\mathcal{L}^* t} F^{\pm n}$, тогда

$$F_t^{\pm n} = e^{-4\gamma t} \left(F_t^{\pm n} \Big|_{\gamma = 0} \right), \quad n \geq 1,$$

$$H_t^0 = H^0.$$

Бесконечно-температурный диссипатор

Рассмотрим динамику с тем же гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y\right)$$

и операторами Линдблада

$$C_{2j-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\sigma_j^x, \quad C_{2j} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\sigma_j^y, \quad j = 1,2,\ldots,N, \quad \gamma > 0.$$

Бесконечно-температурный диссипатор

Утверждение.

$$\mathcal{D}A^0 = -2\gamma A^0, \quad \mathcal{D}F^{\pm n} = -2\gamma n F^{\pm n}, \quad n \geqslant 1,$$

где $F = A, B, H, Q, R$.

Бесконечно-температурный диссипатор

Утверждение.

$$\mathcal{D}A^0 = -2\gamma A^0, \quad \mathcal{D}F^{\pm n} = -2\gamma n F^{\pm n}, \quad n \geqslant 1,$$

где $F = A, B, H, Q, R$.

Следствие 1.

$$H_t^n = e^{-2\gamma n t} H^n, \quad Q_t^n = e^{-2n\gamma t} Q^n, \quad n \geqslant 1$$

$$H_t^0 = e^{-2\gamma t} H^0$$

Бесконечно-температурный диссипатор

Утверждение.

$$\mathcal{D}A^0 = -2\gamma A^0, \quad \mathcal{D}F^{\pm n} = -2\gamma n F^{\pm n}, \quad n \geqslant 1,$$

где $F = A, B, H, Q, R$.

Следствие 1.

$$H_t^n = e^{-2\gamma n t} H^n, \quad Q_t^n = e^{-2n\gamma t} Q^n, \quad n \geqslant 1$$

$$H_t^0 = e^{-2\gamma t} H^0$$

Следствие 2.

$$\partial_t R_t^n = -2i \left(R_t^{n-1} + R_t^{n+1} \right) - 2\gamma n R_t^n, \quad n \geqslant 1,$$

$$R_t^0 = 0.$$

Термодинамический предел

Если определить оператор

$$\mathcal{M} = -2\begin{pmatrix} \gamma & i & 0 & 0 & \ldots \\ i & 2\gamma & i & 0 & \ldots \\ 0 & i & 3\gamma & i & \ldots \\ 0 & 0 & i & 4\gamma & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

на максимальной области определения $\{v \in \ell^2 : \mathcal{M}v \in \ell^2\}$, тогда

Термодинамический предел

$$\mathcal{M}u_l = \lambda_l u_l, \qquad u_l \in \ell_2, \qquad l = 1, \ldots,$$

тогда и только тогда, когда

$$\lambda_l = 2\gamma\nu_l, \qquad J_{\nu_l}(-2i/\gamma) = 0$$

$$(u_l)_n = c_l J_{\nu_l+n}\left(-\frac{2i}{\gamma}\right), \quad l, n = 1{,}2, \ldots,$$

$$c_l^{-2} = -\frac{i}{\gamma} J_{\nu+1}\left(-\frac{2i}{\gamma}\right) \partial_\nu J_\nu \left(-\frac{2i}{\gamma}\right)\Bigg|_{\nu=\nu_l}$$

Замечания

1. Если собственные числа совпадают, то это всегда жорданов блок.
2. Если посмотреть на матрицы как на вектора
$$\mathbb{C}^{2^N\times 2^N} \simeq \mathbb{C}^{2^N} \otimes \mathbb{C}^{2^N},$$
то на $\mathcal{L} : *$ можно смотреть как на неэрмитов гамильтониан. Если сделать "Виковский поворот" $\gamma \to ig$, то рассмотренные примеры отобразятся в эрмитовы гамильтонианы, которые принято считать неинтегрируемыми.
    - A. Teretenkov, O. Lychkovskiy, Duality between open systems and closed bilayer systems: Thermofield double states as quantum many-body scars, Phys. Rev. B, 110 (2024), 241105, 8 pp., arXiv:2304.03155

Модели с точно-решаемым спектром

Рассматривается генератор ГКСЛ

$$\mathcal{L}\rho = -i[H, \rho] + \sum_s \gamma_s \left(A_s \rho A_s^\dagger - \frac{1}{2} A_s^\dagger A_s \rho + \rho A_s^\dagger A_s \right),$$

где

$$[A_s, N] = A_s$$

для некоторого интеграла N гамильтониана H: $[H, N] = 0$.

- Torres, J. M. (2014). Closed-form solution of Lindblad master equations without gain. Physical Review A, 89(5), 052133.

Модели с точно-решаемым спектром

Он представляется в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} + \mathcal{A},$$

где

$$\mathcal{K}\rho = -iK\rho + i\rho K^\dagger, \qquad K = H - i\sum_s \frac{\gamma_s}{2} A_s^\dagger A_s,$$

$$\mathcal{A}\rho = \sum_s \gamma_s A_s \rho A_s^\dagger.$$

Модели с точно-решаемым спектром

Утверждение. Если K—дигонализуема[1] $K = Q\Lambda Q^{-1}$ линейным преобразованием Q, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_d\}$, то $\mathcal{K}$ — диагонализуема посредством супеороператора $Q \ \cdot Q^\dagger$

$$\mathcal{K} = (Q \ \cdot Q^\dagger)(-i(\Lambda \ \cdot \ - \ \cdot \ \overline{\Lambda}))(Q \ \cdot Q^\dagger)^{-1},$$

причём преобразование Q может быть выбрано так, что

$$\mathcal{A} = (Q \ \cdot Q^\dagger)\mathcal{J}(Q \ \cdot Q^\dagger)^{-1},$$

где $\mathcal{J}$ имеет наддиагональный вид [2].

[1] Это является дополнительным условием к тем, что приведены выше, вообще говоря, уже тут могут возникать жордановы блоки.

[2] но не обязательно это жорданов блок

Модели с точно-решаемым спектром

В частности,

$$\operatorname{spec}\mathcal{L} = \operatorname{spec}\mathcal{K} = \operatorname{spec}(-i(\Lambda\ \cdot\ -\ \cdot\ \overline{\Lambda})) = \{-i(\lambda_j - \overline{\lambda}_k)\}.$$

То есть $\operatorname{spec}\mathcal{L}$ просто считается по спектру K. Последний в случае гамильтонианов вида $H = H_0 + \sum_s \omega_s A_s^\dagger A_s$ получается из спектра этих гамильтонианов посредством замены $\omega_s \to \omega_s - i\frac{\gamma_s}{2}$.

Модели с точно-решаемым спектром

Построение собственного базиса при этом упрощается не очень сильно и, фактически, представляет собой процесс диагонализации верхнетреугольной матрицы $-i(\Lambda \cdot - \cdot \overline{\Lambda}) + \mathcal{J}$ общего вида.