Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 7. Модель спин-бозона в приближении вращающейся волны. Модель Фридрихса. Метод псевдомод

Теретёнков Александр Евгеньевич

17 марта 2025 г.

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Спин-бозон
$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk +$$
$$+ \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes I + (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left(g_k^* b_k^\dagger + g_k b_k \right) dk.$$

$b_k^\dagger$ и b_k — операторы рождения и уничтожения удовлетворяющие ККС

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Вакуум

$$b_k |\mathrm{vac}\rangle = 0$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Приближение вращающейся волны

$$\hat{H}_0 = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes I$$

$$\hat{H}_I = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left(g_k^* b_k^\dagger + g_k b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t} =$$

$$= (e^{-i\Omega t}|0\rangle\langle 1| + e^{i\Omega t}|1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left(e^{i\omega_k t} g_k^* b_k^\dagger + g_k e^{-i\omega_k t} b_k \right) dk =$$

$$= \int \Bigg(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + e^{i(\omega_k + \Omega)t} g_k^* |1\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger +$$

$$+ e^{-i(\omega_k + \Omega)t} g_k |0\rangle\langle 1| \otimes b_k + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \Bigg) dk \approx$$

$$\approx \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \right) dk = \hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t)$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

$$\hat{H}_{\text{SB}}^{\text{RWA}} \equiv e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t) e^{i\hat{H}_0 t} =$$
$$= \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes I +$$
$$+ \int \left(g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + g_k |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{N} = \int I \otimes b_k^\dagger b_k dk + |1\rangle\langle 1| \otimes I$$

$$[\hat{H}_{\text{SB}}^{\text{RWA}}, \hat{N}] = 0$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Проектор на 0-частичное подпространство

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|$$

Проектор на 1-частичное подпространство

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}| + \int |0\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|b_k$$

$$[P_i, \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}}] = 0$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

$$P_0 \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} P_0 = 0$$

$$P_1 \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} P_1 = \int \omega_k |0\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| b_k dk + \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| +$$
$$+ \int \left(g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| + g_k |1\rangle\langle 0| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| b_k \right) dk.$$

$$\begin{aligned} |1\rangle \otimes |\mathrm{vac}\rangle \quad &\to |\hat{1}\rangle, \\ |0\rangle \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle &\to |\hat{k}\rangle, \end{aligned}$$

$$H_F = \int \omega_k |\hat{k}\rangle\langle \hat{k}| dk + \Omega |\hat{1}\rangle\langle \hat{1}| + \int \left(g_k^* |\hat{k}\rangle\langle \hat{1}| + g_k |\hat{1}\rangle\langle \hat{k}| \right) dk,$$

— модель Фридрихса.

Утверждение. Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_F|\psi(t)\rangle \\ |\psi(0)\rangle = |\hat{1}\rangle \end{cases}$$

имеет решение

$$|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \int dk \psi_k(t)|\hat{k}\rangle,$$

где $\psi_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -i\Omega\psi_1(t) - \int_0^t d\tau G(t-\tau)\psi_1(\tau),$$

где введено обозначение $G(t) = \int dk e^{-i\omega_k t}|g_k|^2$, а $\psi_k(t)$ может быть выражено через $\psi_1(t)$ по формуле

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau - t)}\psi_1(\tau).$$

Модель Фридрихса

С учтётом $|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)||\hat{1}\rangle + \int dk\psi_k(t)|\hat{k}\rangle$, имеем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - i\int dk g_k \psi_k(t), \\ \frac{d}{dt}\psi_k(t) = -i\omega_k\psi_k(t) - ig_k^*\psi_1(t). \end{cases}$$

С учётом $\psi_k(0) = 0$, имеем

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau - t)}\psi_1(\tau).$$

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - \int dk|g_k|^2 \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau-t)}\psi_1(\tau)$$

Метод псевдомод

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} J(\omega).$$

$$J(\omega) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_l g_l^2}{\left(\frac{\gamma_l}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_l)^2}$$

$$G(t) = \sum_{l=1}^{n} g_l^2 e^{-\left(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l\right)t}, \quad t > 0,$$

Метод псевдомод

Утверждение. Введём неэрмитов гамильтониан в $H_{\text{eff}} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ по формуле

$$H_{\text{eff}} = \Omega|\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| + \sum_{l=1}^{n} \left(\left(\omega_l - i\frac{\gamma_l}{2}\right)|\tilde{l}\rangle\langle\tilde{l}| + g_l(|\tilde{l}\rangle\langle\hat{1}| + |\hat{1}\rangle\langle\tilde{l}|)\right)$$

тогда вектор

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \sum_l \varphi_l(t)|\tilde{l}\rangle,$$

где

$$\varphi_l(t) = -ig_l \int_0^t d\tau e^{-\left(\frac{\gamma_l}{2}+i\omega_l\right)(t-\tau)}\psi_1(\tau),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\tilde{\psi}(t)\rangle.$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - i\sum_l g_l\varphi_l(t).$$

Кроме того, дифференцируя определение $\varphi_l(t)$, имеем

$$\frac{d}{dt}\varphi_l(t) = -ig_l\psi_1(t) - \left(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l\right)\varphi_l(t).$$

Полученные уравнения совпадают с уравнением $\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\tilde{\psi}(t)\rangle$, расписанным покомпонентно. □

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$ и матрицу

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \langle \psi | \\ | \psi \rangle & R \end{pmatrix}, \qquad \rho_{00} = 1 - \mathrm{Tr}\, R, \quad R = R^\dagger.$$

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Утверждение. Решение уравнения ГКСЛ $\rho(t)$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[0 \oplus H, \rho(t)] + \sum_{l=1}^{n} \left(L_l \rho(t) L_l^\dagger - \frac{1}{2} L_l^\dagger L_l \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_l^\dagger L_l \right),$$

где $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $(H = H^\dagger)$ и $L_l = \sqrt{\gamma_l} |0\rangle\langle l| \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$, имеет вид представленный на предыдущем слайде, где $|\psi(t)\rangle$ и $R(t)$ удовлетворяет уравнения

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\psi(t)\rangle,$$
$$\frac{d}{dt}R(t) = -iH_{\text{eff}}R(t) + iR(t)H_{\text{eff}}^\dagger,$$

где

$$iH_{\text{eff}} = iH + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \gamma_l |l\rangle\langle l|,$$

—аккретивная матрица.