

О гипонормальных измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев¹.

Пусть алгебра фон Неймана \mathcal{M} операторов действует в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , \mathcal{M}^{pr} — решетка проекторов в \mathcal{M} , τ — точный нормальный полуконечный след на \mathcal{M} , $S(\mathcal{M}, \tau)$ — $*$ -алгебра всех τ -измеримых операторов. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $T^*T \geq TT^*$; *когипонормальным*, если $T^*T \leq TT^*$. Мы продолжаем исследования, начатые в [3].

Теорема 1. Если оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, $P \in \mathcal{M}^{pr}$ и $TP = \lambda P$ для некоторого комплексного числа λ , то $TP = PT$ и оператор $T|_{P\mathcal{H}}$ нормален.

Пусть $\mu(t; X)$ — функция сингулярных значений оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Теорема 2. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}^{pr}$ с $\tau(P) < +\infty$.

Пусть $t_{\tau l}$ — топология локальной сходимости по мере на $S(\mathcal{M}, \tau)$; определение и свойства $t_{\tau l}$ см. в [1; 2; 4; 5]. Следующее утверждение является обобщением задачи 226 из книги [6] на неограниченные τ -измеримые операторы.

Теорема 3. Множество всех τ -измеримых гипонормальных операторов $t_{\tau l}$ -замкнуто.

Следствие. Множество всех τ -измеримых когипонормальных операторов $t_{\tau l}$ -замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана \mathcal{M} конечна.

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет.
Email: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

Литература

1. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Труды МИАН. — 2006. — Т. 255. — С. 41—54.
2. *Бикчентаев А. М., Тихонов О. Е.* Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере // Труды МИАН. — 2024. — Т. 324. — С. 51—59.
3. *Bikchentaev A.* Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Advances in Operator Theory. — 2024. — Vol. 9, no. 4.
4. *Bikchentaev A. M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2004. — Vol. 14. — P. 17–24.
5. *Ciach L. J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloquium Mathematicum. — 1988. — Vol. 55, no. 1. — P. 109–121.
6. *Halmos P. R.* A Hilbert space problem book. — Second Edition. — Berlin : Springer-Verlag, 1982. — 369 p.