

Оценки на скорость сходимости в теореме Чернова об аппроксимации экспонент от линейных операторов

О. Е. Галкин¹, И. Д. Ремизов².

Экспоненту от конечной матрицы и от линейного ограниченного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве можно задать стандартным степенным рядом для экспоненты, который сходится по обычной норме операторов — полностью аналогично нахождению экспоненты от вещественного числа. Если оператор замкнутый, но не ограниченный, то он определён не всюду и ряд по его степеням — весьма неудобный объект, и он не подходит для определения экспоненты.

Однако, разумный аналог экспоненты для неограниченного оператора всё же существует, соответствующий объект называет сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов (краткое название этого объекта: C_0 -полугруппа). В отличие от степенного ряда, само определение C_0 -полугруппы не даёт никакого метода для вычисления экспоненты даже приближённо. Тем не менее, такие методы есть, но они требуют вычисления резольвенты оператора, а это зачастую сложная задача. Однако, если известна так называемая операторно-значная функция Чернова для оператора A , то экспоненту от A можно выразить в виде предела произведения некоторых построенных по функции Чернова ограниченных операторов при стремящемся к бесконечности числе сомножителей. Теорема Чернова — это бесконечномерный вариант теоремы о «втором замечательном пределе» из курса элементарного анализа.

Докладчикам удалось доказать примерно следующее: если функция Чернова имеет один с полугруппой многочлен Тейлора порядка k и мало уклоняется от своего многочлена Тейлора, то черновские аппроксимации полугруппы, построенные по этой функции Чернова, имеют скорость сходимости не хуже, чем порядка $1/n^k$, где n — номер аппроксимации. Заметим, что нетривиален даже одномерный аналог этого результата — когда вычисляется экспонента не от оператора, а от вещественного числа.

¹НИУ ВШЭ, Нижний Новгород. Лаборатория топологических методов в динамике.
Email: ivremizov@yandex.ru

²НИУ ВШЭ, Нижний Новгород. Лаборатория топологических методов в динамике.

В докладе будет дано элементарное введение в тематику, рассказано о приложениях и сформулирована теорема об оценках на скорость сходимости черновских аппроксимаций.

Доклад основан на результатах недавно вышедшей в Israel Journal of Mathematics статьи докладчиков [1].

Благодарности. Работа выполнена в Лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ, грант Российского научного фонда № 23-71-30008 «Диссипативная динамика бесконечномерных и конечно-мерных систем, разработка математических моделей механических, гидродинамических процессов»

Литература

1. *Galkin O. E., Remizov I. D.* Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators // Israel Journal of Mathematics. — 2024. — Oct. — ISSN 1565-8511. — DOI: 10.1007/s11856-024-2678-x.