

## Логарифмическая гёльдеровость и экстремумы степенных функций Такаги

О. Е. Галкин<sup>1</sup>, С. Ю. Галкина<sup>2</sup>.

Доклад посвящен свойствам степенных функций Такаги  $S_p(x)$ . Эти функции по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги  $T(x)$ , описанной в 1903 году. Они имеют один вещественный параметр  $p > 0$  и могут быть заданы так:

**Определение 1.** *Степенной функцией Такаги с параметром (или показателем)  $p > 0$  мы называем вещественнозначную функцию  $S_p$ , задаваемую на числовой оси  $\mathbb{R}$  с помощью равенства*

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $S_0(x) = |x - \lfloor x + 1/2 \rfloor| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q|$  — расстояние между точкой  $x$  и ближайшей к ней целой точкой,  $\lfloor y \rfloor$  — целая часть числа  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\{y\}$  — дробная часть числа  $y$ .

При  $p = 1$  функция  $S_p(x)$  совпадает с функцией Такаги  $T(x)$ .

Частичные суммы ряда (1) будем обозначать через  $S_{p,m}(x)$ :

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

График степенной функций Такаги  $y = S_p(x)$  для случая  $p = 0,5$ , изображенный сплошной синей линией, вместе с графиками частичных сумм  $y = S_{p,n}(x)$  при  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , изображенными красными и зелеными линиями, можно увидеть на рисунке 1. Вертикальные штрихпунктирные линии указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке  $[0; 1]$ :  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$ .

---

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».  
Email: oleggalkin@ya.ru

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».  
Email: svetlana.u.galkina@mail.ru

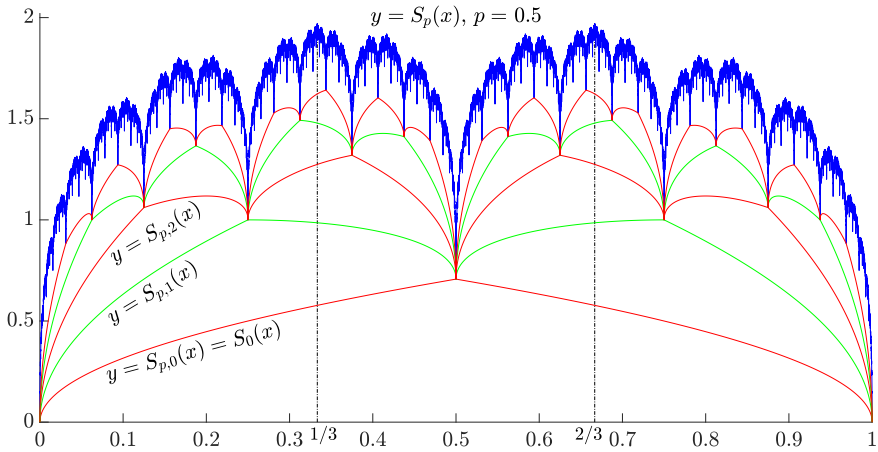


Рис. 1: График функции  $y = S_p(x)$  при  $p = 0,5$ .

Мы получили, в частности, следующие результаты:

1. Функции  $S_p$  на  $\mathbb{R}$  при любом  $p > 0$  непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены, причём в случае  $p \in (0; 1)$  они нигде не дифференцируемы.
2. Для  $p \in (0; 1)$  глобальный максимум функции  $S_p$  равен  $2^p / (3^p(2^p - 1))$  и достигается только в точках вида  $q + 1/3$  и  $q + 2/3$ , где  $q \in \mathbb{Z}$ , а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках.
3. При  $p \in (0; 1]$  степенная функция Такаги  $S_p$  удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера  $|S_p(x) - S_p(y)| \leq C \cdot |x - y|^p \cdot \log_3(1/|x - y|)$  с наименьшей константой  $C = 2^p / (2^p - 1)$ . Отсюда вытекает «обычное» условие Гёльдера для  $S_p$ .
4. В случае  $p \in (0; 1)$  в двоично-рациональных точках, и только в них, функция  $S_p$  достигает строгого локального минимума на  $\mathbb{R}$ , а в точках вида  $q/(3 \cdot 2^n)$ , где  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $q$  — целое и не делится на 3,  $S_p$  достигает строгого локального максимума.

### **Литература**

1. *Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Муляр О. А.* О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средне-волжского математического общества. — 2023. — Т. 25, № 4. — С. 223—241.
2. *Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Тронов А. А.* О глобальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. — 2023. — Т. 25, № 2. — С. 22—36.