

Формула Фейнмана-Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем

В. П. Бурский¹².

Рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = q\Delta u + V(x)u, & (x \in \mathbf{R}^N, t > 0), \\ u(x, 0) = f(x), & (x \in \mathbf{R}^N), \quad 0 \leq f \in L^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \quad (*)$$

Интерес к задаче (*) с указанным потенциалом вызван тем, что в скалярном случае $u(x, t) \in \mathbf{R}$, $q > 0$, $c > 0$, при $0 \leq V \in L_{loc}^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, $V(x) \leq c/|x|^{2-\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в окрестности нуля задача (1) имеет единственное неотрицательное решение в смысле распределений, а при $V(x) \geq c/|x|^{2+\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности нуля, задача (*), как показали Брезис и Лионс, не имеет неотрицательного решения. В работе [2] рассматривается скалярная задача (*) $q = 1$, $V(x) = c/|x|^2$ и ее приближение

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = q\Delta u_n + V_n(x)u_n, & (***) \\ u_n(x, 0) = f(x), & \end{cases} \quad V_n(x) = \begin{cases} c/|x|^2, & |x| \geq 1/n \\ cn^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

и доказано, что, если $0 \leq c \leq c^* = (N-2)^2/4$, то u_n возрастает к решению и из (1) в смысле распределений, а если $c > c^*$, то $u_n(x) \rightarrow \infty$,
 $\exists \alpha > 0$, $\int_{R^n} |x|^{-\alpha} f(x) dx < \infty$.

В нашей работе [1] рассмотрена система (*), где $u(x, t) \in \mathbf{R}^p$, $q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_p)$, $q_k > 0$, $V^{ij}(x) = c^{ij}/|x|^2$, которая приближается системой (**). Доказано, что, если $c^{ij} > 0$, $c^{ii} > \pi^2 N^2 \max_i q_i/8$, то решение системы (**) $u_n(x, t) \rightarrow \infty$, $\forall t > 0$, $\forall x$. Наоборот, пусть $S = \max_i S_i/q^i$, где S_i — сумма элементов i -й строки матрицы (c^{ij}) . Если $S \leq (N-2)^2/4$, то задача (*) имеет неотрицательное решение. В доказательстве используется формула Ли-Троттера-Далецкого для параболических операторов,

¹Московский физико-технический институт.

Email: bvp30@mail.ru

²Институт прикладной математики и механики РАН (Донецк).

которую теперь часто называют формулой Фейнмана-Каца.

Литература

1. Бурский В. П., Самойлова О. В. Об одном применении формулы Фейнмана-Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем // Нелинейные граничные задачи. — 2005. — Т. 15. — С. 126—140.
2. Baras P, Goldstein J. The Heat Equation with a Singular Potential // Transactions of The American Mathematical Society. — 1984. — July. — Vol. 284. — P. 121—121. — DOI: 10.2307/1999277.