Спектральный анализ одномерного оператора Шрёдингера со сдвигом в свободном члене

Д. И. Борисов[1], Д. М. Поляков[2].

В настоящем докладе мы рассматриваем одномерный оператор Шрёдингера, который возмущен оператором сдвига. Основная цель работы — получить асимптотику собственных значений для больших номеров, которая будет равномерна по параметру сдвига. Ранее (см. [1] и используемую там литературу), в основном, изучались задачи для отдельных модельных случаев операторов, которые содержали малый параметр при старшей производной.

Дадим подробную постановку задачи. В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ вида $\mathcal{A}y = -y''$, который мы будем считать невозмущенным. В качестве области определения оператора $\mathcal{A}$ будет выступать пространство $\mathring{W}_2^2(0,1)$, т. е. подпространство функций из пространства Соболева $W_2^2(0,1)$, обращающихся в нуль на концах отрезка. При этом оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен.

Введем в рассмотрение два вспомогательных оператора. Через $\mathcal{L}$ обозначим оператор продолжения нулем вне интервала $(0,1)$, который рассматриваем как действующий из $L_2(0,1)$ в $L_2(\mathrm{R})$, а через $\mathcal{R}$ — оператор сужения на $(0,1)$, действующий из $L_2(\mathrm{R})$ в $L_2(0,1)$. Оба введенных оператора задаются следующим образом: $\mathcal{L}y = y$ в $(0,1)$ и $\mathcal{L}y = 0$ вне $(0,1)$, а также $\mathcal{R}y = y$ на $(0,1)$. Далее в $L_2(\mathrm{R})$ определим оператор $\mathcal{T}^\alpha$ сдвига $(\mathcal{T}^\alpha y)(x) = y(x+\alpha)$, где $\alpha \in [0,1]$.

Пусть V и S — комплекснозначные функции из пространства $C^1[0,1]$. Тогда для произвольной функции $y \in L_2(0,1)$ основной возмущающий оператор $\mathcal{B}^\alpha$ в пространстве $L_2(0,1)$ действует следующим образом:

$$(\mathcal{B}^\alpha y)(x) = -V(x)y(x) - S(x)\big(y(x+\alpha) - y(x)\big),$$

[1]Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН.
[2]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН. Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН. Email: DmitryPolyakow@mail.ru

где функция y считается продолженной нулем вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на данный отрезок. Хорошо видно, что при $\alpha = 0$ оператор $\mathcal{B}^\alpha$ превращается в обычный оператор умножения на потенциал $-V$, а при $\alpha = 1$ — в оператор умножения на потенциал $-V + S$. Таким образом, основным объектом изучения в настоящей работе является оператор $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{A} - \mathcal{B}^\alpha$, действующий в $L_2(0,1)$ на области определения $\mathring{W}_2^2(0,1)$.

Несложно установить, что оператор $\mathcal{H}^\alpha$ имеет компактную резольвенту и его спектр состоит из счетного числа собственных значений с единственной точкой накопления в бесконечности. Обозначим собственные значения через λ_n, $n \in \mathrm{N}$, и пронумеруем их в порядке возрастания их модулей. Через $\chi_I = \chi_I(x)$ будем обозначать характеристическую функцию отрезка I на вещественной прямой.

Наш основной результат посвящен асимптотике собственных значений оператора $\mathcal{H}^\alpha$ при больших номерах n.

Теорема 1. *Для собственных значений λ_n оператора $\mathcal{H}^\alpha$ справедлива следующая асимптотика*

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 2\int\limits_0^1 V(x)\sin^2 \pi n x\,dx$$

$$+2\int\limits_0^1 S(x)\sin \pi n x\Big(\chi_{[0,1-\alpha]}(x)\sin \pi n(x+\alpha) - \sin \pi n x\Big)\,dx$$

$$-\frac{\sin \pi n\alpha}{2\pi n}\int\limits_0^1 (S(x)-V(x))\left(\int\limits_{\max\{0,x-\alpha\}}^{x} S(t)\,dt - \alpha\int\limits_0^{1-\alpha} S(t)\,dt\right)dx$$

$$+\frac{\sin 2\pi n\alpha}{2\pi n}\int\limits_0^{1-\alpha} S(x)\left(\int\limits_{\max\{0,x-\alpha\}}^{x} S(t)\,dt - \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{1-\alpha} S(t)\,dt\right)dx + O(n^{-2}),$$

при $n \to +\infty$. Оценка остаточного члена равномерна по $\alpha \in [0,1]$.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, rscf.ru/project/23-11-00009.

Литература

1. *Шкаликов А. А.* О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, № 6. — С. 950—953.